最近の橋梁設計の新動向

――部材のねじれに関連した問題について――

島　田　静　雄*

1. は じ め に

最近，構造物の解析が非常にむずかしくなったといわれる。たとえば，箱橋・曲線橋の解析には種々の説があり，多くの複雑な理論式が見られるようになった。数値計算に電子計算機が利用できるようになったため，式さえ与えられれば，たいていの問題は処理できる，と思われている。

ところが，このように計算能力が増加してくるにつれて，奇妙な，かつ素朴な疑問が生れてくるようになった。一体，与えられた理論式が正しいかどうか，得られた結果をどこまで信用して良いか，などである。最初のほうの疑問は，その理論式を提唱した研究者にとっては失敬きわまりないものなのであるが，確かに理論的な式の取り扱いに誤りがないにもかかわらず，納得の行きかねることが少なくない。この疑問をたどって行くと，非常に本質的な物の考えかたにまでさかのぼってしまう。

構造物とは何か，与えられた仮定の正しいことを何によって証明するか，得られた結果の正当性は何によって保証されるか，などが説明されていなければならない。これらは，構造力学の本質論になる。構造力学においては，最近，部材のねじれに関連した報文を数多く見かける。非常に問題を厳密に処理してはいるし，与えられた仮定のもとに理論の展開に誤りはないが，筆者には納得しがたい点がある。この論説は，部材のねじれという問題に限って，筆者がどういう哲学で臨んでいるかをまとめたものである。

2. 問題点の提起

構造物の最小の構成単位を，仮りに部材と呼ぶことにする。構造物は，部材を力学的に，かつ幾何学的に接続してつくられたものと考えることができるから，構造力学の主要な命題は，与えられた外力の作用時における個々の部材の応力と変形とを知ることに重点が置かれる。解析の出発における仮定は，構造を構成する部材に，力の作用状態の約束があり，作用力に対して部材の応力と変形とはすでに知られているものとみなさなければならない。数学的な厳密さと，力学的な意味づけからは，これを stiffness Matrix で定義する。stiffness は，いわゆる剛性であって，EI, EA, GK という表現で示される定数である。

最も基本的な部材は，線状の構造要素である。構造物の２点，これは空間的な２点でもあるが，この２点を結ぶ連続した構造要素があれば，１点に作用する力は他の点に伝えられ，また，２点相互には相対的な位置関係が拘束される。伝えられる力は空間的に６成分あり，拘束の条件も６成分ある。柱・はり・棒という名称は，伝えられる力の種類によって，区別された線状の部材の名称である。

二次元的に広がった板や殻は，線状の構造要素を縦，横に無数に織りなした巨大な構造物の性格を持つので，部材という簡明な構造要素になりにくい。

さて，橋梁工学では，元来，線を基調にした部材を基本にして，設計計算や解析が処理されている。この考えかたは計算が簡単であり，かつ本質的な性質を誤らないという点で価値がある。しかし，もともと平面的に，また，立体的な広がりを持つ構造物を，線の力学で処理するというのは解析が不十分ではないであろうか，と考えられるようになった。

格子桁の考えかたは，線の力学から二次元的な広がりを持つ構造の開発として研究されたが，実際の設計に応用される場合には，分配係数という集約的な係数を導入して，従来どおりのはりの考えかたに帰納して処理される。ところで，箱構造を始めとして，橋全体が薄板を組み合わせてつくった断面形と考えられるような構造が多くなってくると，在来どおりの線の力学で解析を処理したのでは，実際的ではなくなる。

*正会員　工博　名古屋大学助教授　土木工学科

構造物を三次元的に考える場合には，ねじれの問題は必然的といえる。ねじれに対する処理は，橋構造においては経験が浅いので，この問題をいかに考えたら良いであろうか。これがこの報文の扱おうとする問題点である。

3. 部材の剛性

最も基本的な部材は，棒状の部材である。部材は任意の位置での切断や，2部材の接続が可能であるから，微分的に考えた単位長さの部材の力学的性質が，部材を考えるときの基本的な性質となる。部材の長さは，構造的なものと考える。

線状の部材の両端に作用する力と，その両端の相対的な変形を考えるとき，一端を空間に固定し，他端に作用する力と変位について線型の対応関係を立てなければならない。力学の原理から知られるとおり，最初に与えられる関係は，flexibility Matrix である。いいかえれば，変位は力によって定まるという表現である。この逆変換が stiffness Matrix である。

力は空間的に6成分，相対変位も6成分あるので，stiffness を表わす定数は 36 個必要であるが，相反作用の法則から，独立な定数は一般には 21 個必要である。しかし，部材に個有する対称軸などに座標変換をすることにより，定数の数を減らすことができて，常識的に理解される stiffness は6つである。すなわち，EA, EJ_x, EJ_y, GA_x, GA_y, および GK である。また，座標変換によって定められた中心を，その部材の軸線とするのである。

線状の部材では，剛性が6つだけであると考えるのは早計であって，部材の異方性を考えなければならないことが，ねじれに関連して生じてくるが，これは後にふれる。

4. 部材の寸法効果

構造部材は，観察をより微視化すれば，弾性素材で構成された巨大な構造物の性格を持っている。このため，部材断面に作用する応力は，無限の可能性を持った分布をするが，部材としての力は，単に6成分しかない。同じ理由で，部材断面のひずみ分布には，無限の可能性を持ちながら，部材としての変形では6成分しか必要としない。したがって，応力とひずみは，それらが合成されたときに意味を持つ分布以外は，考える必要がないことになる。

応力とひずみの合成を計算するときには，消滅するようなものは，局部応力や局部ひずみといわれるが，これらが無視できるという十分な根拠がない限り，与えられた構造要素を単純な部材とは仮定しがたい。この疑問に対する正当性を主張するより所には，サンブナンの法則が使われている。これは，互いにつりあっている局部的な力による応力はその作用位置から十分離れれば小になるというものである。局部応力は確かにこれら自身でつりあっているから，サンブナンの法則が成り立つためには，部材断面に比較して部材長が十分大きい必要がある。しかし，具体的にどれだけの比があれば良いかは，別の問題である。

もう一つ別の見かたがあり，部材のエネルギーに根拠を持つものである。部材は常にその両端での力と変位だけに関連する要素であるから，部材内部のひずみエネルギーの総量を知ればよい。これは，局部応力が部材の平面変形に関して仕事分を持たず，また，局部的なひずみは平均化した応力分に対して，ひずみエネルギーが最小になるのである。

このようなエネルギーの性質を応用することにより，部材の剛性を計算することは，実際には広く応用されている。

5. 部材剛性の計算の手法

ある与えられた断面形の部材の応力分布と剛性とを定めるには，二とおりの行きかたがある。

一つの方法は，変形を仮定し，その変形に見合った応力分布から剛性を定めるものである。はりの曲げなどに良く応用される平面保持の原則は，軸応力の分布を定めるのに一般的に使用されている。

部材が材料の弾性域で使用されているときにも，また，材料が非直線性の弾性的性質がある場合でも，最初に平面であった断面が，変形後も平面を保つという原則は，大局を誤らない。

もう一つの方法は，合力に見合う応力分布を，部材内部のつりあい条件から定め，これによって生ずるひずみの合成分を計算して部材の剛性を定めるものであって，せん断応力に関係する剛性を定めるのにしばしば用いられる。というのも，せん断応力を考えると，部材の平面保持の原則は成立しないことが多いからである。

いずれの二つの方法においても，部材の剛性はエネルギーの形で計算されることが理解される。

6. 曲げとせん断を受ける薄肉部材

いわゆる薄肉部材は，鋼板を溶接してつくる箱構造や，厚さの薄いコンクリート構造断面などを指すが，通常の部材のように，断面の応力と変形を平均値的な値で

判断するには，不十分である構造を指している。薄肉構造の解析の本質的な行きかたは，この構造を全体として巨大な弾性体と見る方法であるが，この方法はあまりにも実用とはほど違い。したがって，大局を誤らない程度の簡単な仮定のもとに，実際的な手法を探すという方法論がいくつか研究されてきている。

立体的に考えれば，無限大次の不静定構造物の性格を持つ薄肉部材では，せめて断面の応力状態だけでも簡単に処理できれば便利である。この方法には，せん断流理論がしばしば応用されている。純曲げにおける平面変形の原則は，応力分布においても十分な妥当性があるので，第一義的な計算を単純理論で処理し，断面の応力分布における不つりあい，もしくは断面のひずみの不適合を第二義的に補正しようというのが，一般的に採用されている。

せん断流理論の出発は，薄板における軸応力とせん断応力のつりあい条件にある。最初の軸応力の分布は，平面変形の仮定から容易に定まり，また，この軸応力に見合うせん断応力の分布は，せん断流理論によらなくても定めることができる。問題が起るのは，このせん断応力である。

せん断応力によるひずみを考えると，このひずみによって部材断面の平面保持は成立しなくなる。最初に平面であった断面の各位置が，変形後に凹凸を生ずるという量をそりといっている。そりの生ずる原因には二種類あり，純粋に幾何学的な要因によるものと，せん断応力に原因を持つものとがある。そりが断面の軸方向に一定であれば，紙製の食器皿を重ねたように，凸は凸に，凹は凹に重なって断面の軸方向にひずみの不適合を生じない。

そりが部材軸方向に変化するとき，これは部材のせん断に変化があったときであるが，これに見合う軸方向のひずみの不適合が生ずる。この量を第二義的に生ずる軸応力度にしようというのが，一般的に用いられるそりの処理方法である。

そりが変化する箇所は，せん断力の変化する所であり，部材の自重を除けば荷重の作用点である。また，荷重の作用がなければ，せん断力の変化に見合う力の出入が構造的に考えられなければならない。原則的に見て，せん断力の変化する箇所は応力的に複雑であり，実際の構造物では，補剛材や隔壁の助けを借りなければ，全然別の応力状態になるものである。

そりに根拠を持つ二次的な応力は，断面全体については合力成分を持たないから，サンブナンの法則にもとづく局部応力の性格を備え，究極の所，設計という実際問題を決定的に支配するほどの一義性はないものである。

7. 有効幅とシアラグ

幅の広いフランジを持つ曲げ部材では，設計において有効幅を考えて応力を検討することが示方書には規定されている。この規定の理論的な根拠は，二次元弾性体としてフランジを解析的に解いて得られる応力分布と，単純な曲げ理論における応力分布とを比較することから出発している。ただし解析的な解は，条件としては理想的な形を想定し，また，有限回数の操作では数学的な精確解が得られないので，多くの場合フーリエ級数の第一項をもって判断の資料としている。

有効幅というのは，せん断力の変化する部材断面において，局部的に生ずる軸応力の大きさを，同時に作用する曲げの軸応力と一緒に考えたために取られた便宜的な考えかたである。局部的な軸応力は，作用するせん断力の変化量，すなわち荷重の大きさに比例し，その局所だけに個有する。一方，曲げによる軸応力は，部材の支持状態で変化するから，もし，スパンが増加すれば軸応力は増加する。局部応力と単純理論の軸応力とを組み合わせて有効幅という概念でまとめれば，有効幅はスパンの増大により増加するし，また，プレストレスの存在は，同じく有効幅を増加させる。

シアラグ，もしくはせん断おくれと呼ばれる問題は，扱う対象が腹板であるだけで，求めようとする対象は同じ理論的な根拠によっている。

設計という実際的な問題で，局所的に生ずる応力の性質をすべて考慮するということは不可能であるし，また，必ずしも賞められたものではない。厳密に条件を設定して解こうとすると，有限回の操作で理論的に正しい値を得ることができないから，勢い，ある近似値で妥協することになる。このような場合に理論の誤用が生まれやすい。

8. ねじれを受ける薄肉部材

曲げにおいては，平面保持の仮定が第一次の近似を与え得たが，ねじれを受ける部材においては，変形後も部材断面が平面を保つという仮定そのものが無理であることが多い。ねじれによって生ずる断面のそりには，せん断応力のひずみが累積したものと同時に，幾何学的な移動量によるものが大きい。たとえば，紙テープを円柱にラセン状に巻きつけて行く過程を見てもわかるように，円柱の軸に直角な断面は，テープを斜めに切る。したがって，単純曲げに相当する単純ねじれの定義は，平面保持の仮定ではなく，軸方向の応力成分をもたないせん断応力だけの応力状態で定めるのである。これをサンブナ

ンのねじれと呼んでいる。

ねじりのモーメントは極性ベクトルであるため，Additiveである。ねじれ変形は，同じようにベクトル的には Additive であるので，任意の中心を選んでその中心回りの個々のひずみの運動量を全断面について加算すれば，これがこの断面のねじれに関する慣性モーメントになる。したがって，この量を，部材断面が平面保持のまま一定のねじれ率でねじれたときの慣性モーメントと等価することにより，この部材のねじれ率が定まる。すなわち，部材のねじれ剛性の定義である。

ねじれの場合には，そりは第一義的である。ねじれの変化は，部材軸方向にそりに見合った軸応力を生じ得るから，部材のねじれは，この軸応力のひずみエネルギーが最小となるように生ずる。これは，そりに見合った軸応力があると仮定すれば，この合力が0になるように部材はねじれようとする。したがって，この条件を満たすような中心が必らず存在し，部材はこのねじれ中心を軸とするようにねじれようとする。このことは，もしねじれ中心と部材の重心とが異なれば，部材の重心軸は，ねじれ中心を軸とするように，空間にスパイラルを描くようにねじれるのである。このような場合，部材をねじれば重心軸に曲率の変化，すなわち見掛けの曲げを起こす。もっとも，これは曲げではなく，せん断であることが知れるのであるが後で説明する。

せん断中心は，単純曲げを受けるこの部材の，せん断応力の合力がとおる中心という定義で定められるが，これがねじれ中心と一致することは，相反作用の法則から証明できることである。いま，上に説明したように部材にねじれを加えると，ねじれ中心には曲げ変形を生じない。曲げに個有するせん断力を部材に作用させれば，相反作用の法則から，せん断力の合力の中心であるせん断中心には，ねじれを生じないことになる。いいかえれば，ねじれ中心とせん断中心とは一致するのである。

一般に，非対称の断面を持つ部材では，重心とせん断中心が一致しない。部材の応力とひずみとをその重心軸で代表させた力と変形とで考えると，部材は異方性を示す。軸力，純粋の曲げモーメントに関しては，従来の常識どおりであるが，せん断力によるせん断変形は，同時に部材にねじれを生ずる。このことは，相対応する性質として，ねじれモーメントを作用させれば，ねじれ変形と同時に，部材にはせん断変形を生ずるべきであることが推論できる。先に簡単に触れたように，ねじれを作用させると部材の重心軸がスパイラルを描く性質は，部材がねじれると同時にせん断変形が加わってできる空間曲線であることがわかる。

これが，ねじれを考える部材の基本的性質である。

9. 曲げねじれの問題

単純ねじれの場合，部材断面の平面保持の原則は最初から否定されている。したがって，これを単独の部材と考えるには複雑すぎるといえよう。すなわち，部材自身が，より単純な素片を組み合わせでつくられた構造物的な性格を持っている。

ねじれを考えるときに，サンブナンのねじれとともに，ワグナーの曲げねじれが考えられるが，この後者はとくに構造物的な性格を持つものである。橋構造においては，2本のねじれ剛性のない主桁を並列にするだけで，三次元的な剛性を持った構造になるが，ねじれに対しては，左右の桁が対になって正負のせん断力を伝え，これがねじれに対する抵抗となっている。曲げねじれの思想はこのような機構と同じであり，とくにH型の断面はこれである。

曲げねじれにともなう軸応力は，断面全部についていえば，これ自身でつりあい外的な合力成分を持たないが，サンブナンの法則にしたがう局部応力ではない。したがって，曲げねじれが問題になる部材は，すでにその部材が単独の部材であると考えるよりも，二種もしくは二種以上の部材が組み合わさった複合部材のような傾向を持っている。もし，そうでないならば，同一の部材に何ゆえ二種のねじれ剛性が存在するのであろうか。

このような立場から曲げねじれを考えると，普通常識的に考えているワグナーの曲げねじれ剛性の取り扱いが，いくつかの点で矛盾を持っていることに思い当る。まず，サンブナンのねじれ剛性で伝えられるねじれモーメントを構成する断面の応力分布と，ワグナーのそれとでは全く性質が異なっている。したがって，一つの断面内で二種類の応力分布が共存するための条件が満足されていなければならない。

構造力学的に見たH型の断面では，左右のフランジを連結するウェブが，フランジのせん断力の変化とねじれモーメントの伝達をはかるから，二種類のねじれ剛性の存在は近似的に見て正しい。ただし，ウェブがせん断力の伝達をはかるという機構は，格子構造の横桁の作用と同じであり，当然の帰結として，ウェブは直線性を保ち得ない。いいかえれば，断面形は不変ではあり得ない。

一方，閉じた箱型の断面では，断面内に二種類の応力分布があっても，ひずみ分布の適合条件を考えると，この二種の応力が共存するための条件は，それぞれ独立にねじれモーメントに抵抗する2本の部材のようなときだけであることが推定できる。これは，ねじれの基本式の解を使って応力関数に代入すれば，応力関数の表現式が一般に0にならないということで証明できる。

以上のことからわかるように，部材のねじれにおいて，ワグナーの曲げねじれは，構造物的な性格を持つことがわかる。二種のねじれ剛性のある部材で，それぞれの剛性に関連するねじれモーメントは，並列バネ系で分配される個々の荷重と同じ傾向を持つ。同じような二種類の剛性に関連する桁のたわみは，曲げ変形とせん断変形とがあるが，この場合の変形は直列バネ系で理解されよう。

ねじれにおいて，そりの拘束という条件を構造物的に扱い得る場合は，サンブナンのねじれ剛性が小さく，変形が大きいときである。多くの場合，開いた薄肉断面を持つ部材がこれに当る。折板構造と呼ばれるものは，板の個々の断面が，それぞれ平面変形を保つという仮定がよく使われる。板の素片個々についてのそりの問題は，シアラグと全く同じ扱いができる。

サンブナンのねじれ剛性が大きい場合，たとえば閉じた箱断面のような場合，そりの問題はシアラグと全く同じ扱いになり，局部応力の性格を持つものである。変形が大きくなったときには，そりは構造変形の性格を持つようになり，断面変形によって対応するように振舞う。

10. 立体解析の手法

橋断面全体を一つの部材のように考えて，応力の解析をしようという試みは，設計の簡易化にとって有意義である。構造物は，全体に見れば巨大な不静定次数を持つ構造であるが，断面に生ずる応力分布にはあるきまった形があるから，この形を類別することによって，不静定量を有限個に限定してしまうことができる。

もっとも簡単な仮定は，断面全体を一つの部材とする考えである。部材としては，作用する力と変形が6成分しかないから，曲げとねじれを受ける部材に必要な剛性は，曲げ剛性，せん断剛性，ねじれ剛性の三種である。このような仮定が応用し得る断面は，単独の箱構造である。

断面が2つ以上の部材の複合構造であるときには，橋断面の応力分布と変形の形を定める必要がある。断面変形がないという仮定が許されるならば，単独の部材と同じように，曲げ剛性，せん断剛性，ねじれ剛性の3種に見合う応力分布を仮定すると同時に，構造的な意味を持つ曲げねじれ剛性を加えれば便利である。

橋断面が横方向にも変形する。すなわち断面変形であるが，この変形を考えなければならないときは，変形の形を類別して，その形ごとに剛性を定める必要がある。たとえば，格子桁であるが，ねじれ剛性のないn本の主桁を並列にした断面においては，変形の形がn種類ある。それぞれの変形の形に応じた応力分布があり，また一応の剛性が計算できる。このとき，変形の形を定めるのに注意して，それぞれエネルギー的に独立になるように定めるのが，手法としてはシャレた方法である。

11. あとがき

この論説は，筆者の構造物に対する見方の一部をまとめたものである。ある与えられた構造物を解析したいとき，その構造物を力学的にどう判断するかという条件が設定されれば，その後の処理はなかば機械的である。構造物に対する見方というのは，各人各様の好みもあって，もし，全く異なる立場から同じ問題に着手したとき，何ゆえにその条件が持出されたかということに，大半の説明は費やされてしまう。

ねじれの取り扱いが，まさにこれである。

この論説を書くに当って，意識的に数式を使うことをやめて，すべて文章で表現することにした。そのためにどうしても表現が硬く，また，概念的に飛びこす部分ができてしまった。この点はご容赦願いたい。なお，学会の論文集には，討議の欄がないので，論説という形で投稿した**。

**(編集部注) 土木学会論文集にはその登載論文に対する討議の欄は設けられている。