# Kani 法と Cross 法

## ——Kani 法はより収れんが早いか——

吉　村　虎　蔵*

**要　旨**　ラーメン解析における Kani の数値計算法とまったく同じ演算を Cross 法でも行なうことができる。その方法については筆者が 1956 年に発表したことがある。ここでは上の事実を多少説明を変えて再び記述し，いくつかの数値計算例をも掲げて Kani 法と Cross 法とを比較した。

## 1. 緒　　言

周知のように G. Kani は Die Berechnung mehrstöckiger Rahmen[1]と題する小冊子を Stuttgart で出版し，その英訳書が 1957 年にアメリカで出版[2]され，1961 年に和訳出版[3]されるに至った。訳者はこの方法を紹介された方々，またはこの方法を研究なされる方々の一部，および Kani 法を好んで使用される方々の中に，Kani 法および Cross 法に対して誤まった解釈がなされているように見うけられる。例えば，

① Kani 法は節点移動の有無にかかわらず Cross 法にくらべて計算が簡単で，しかも収れんが早い，

② ラーメンの影響線の計算は Kani 法によれば簡単で，Cross 法では困難である，

などである。

H. Cross のモーメント分配法は，1930 年に Proc. ASCE に発表された論文[4]に始まるが，彼がこの方法のアイデアを得たのは 1922 年であって，24 年以降 Illinois 大学の学生に講義していた。したがって Cross 法はこの期間に十分練り上げられて，発表時にはすでに現在の形に大成されていたものと思われる。このことは 1932 年に N.D. Morgan との共著で出された Continuous Frames of Reinforced Concrete[5] の内容を一見してうかがいうるところである。Trans. ASCE[4]における討議と，Morgan との共著に収められているところを考察すると，モーメント分配法に関するあらゆる算法の基本的なアイデアは発表のときすべて出つくしている感じをうける。例えば，村上教授や筆者などが好んで用いている法，すなわち不つりあいモーメントをバランスするときに到達モーメントだけを記載する方式とか，級数和を利用する方式，あるいは節点移動のあるラーメンにおける Shear and Moment Distribution の方式等々である。このようなわけで，不つりあいモーメントをバランスさせる方式，すなわちモーメント分配法* に関する「新しい方法」と称するものは，たいていが Cross 法の modification と見なされるべきであると考えられる。筆者は，1956 年に「モーメント分配と撓角分配について」[6]なる小文を発表した。この内容は多層多スパンの長方形ラーメンを対象としたもので，モーメント分配計算法に第 5 法の方式が述べられており，このうちの第 2 法が Kani 法と同じ結果を与えることは，後述のとおりである。また影響線については，かねてから，村上教授が数編の論文[7]として発表され，かつ，筆者との共著「構造力学」[8]にも収録されているので，これらを参照することによって，上記 ①，② の解釈は適当でないと筆者は考える。この小文は Cross 法と Kani 法に対する誤まった解釈を是正する目的をもって草したものである。

## 2. 節点の回転モーメントと到達モーメントおよび部材角モーメント

ここでは定断面の連続ばりあるいは長方形ラーメンについて述べる。所論は拙論[6]と多少重複するところもあるが，この説明が理解されやすいと考えるからである。周知のように直線・定断面材 $ab$ の端モーメントは次式にて与えられる。

$$\left.\begin{aligned} M_{ab}&=k_{ab}(2\varphi_a+\varphi_b+\psi_{ab})+C_{ab} \\ M_{ba}&=k_{ab}(2\varphi_b+\varphi_a+\psi_{ab})+C_{ba} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

ここに，$\varphi=2EK_0\theta$, $\psi=-6EK_0R$, $K=K_0k$, $\theta$ は節点の回転角，$R$ は部材の回転角，なお，ここでは $k\varphi$[6], $k\psi$[8] をそれぞれたわみ角モーメント，部材角モーメントとも呼んでいる。

さて，長方形ラーメンでは一般に節点方程式と層方程式との 2 つの条件の満足が要求される。

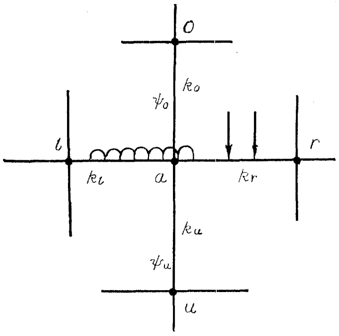
### (1) 節点のバランス

図—1 を参照して，節点 $a$ におけるモーメントのつり

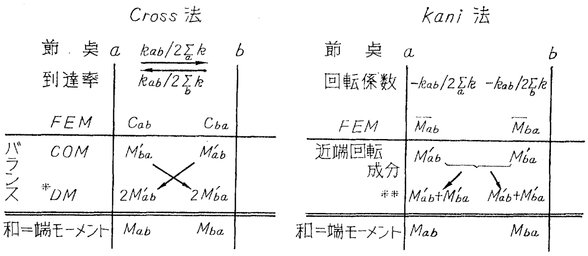
* 本論文では上述の理由で，Cross 法とモーメント分配法を同義語として扱う。

* 正会員　工博　熊本大学教授　工学部応用力学教室

図—1




図—2




*印欄は演算の最後に記入する　　**印欄は演算の最後に記入する

あいの式すなわち節点方程式から，次式が得られる。

$$2\sum_a k\cdot\varphi_a \equiv \Phi_a = -\{\sum_a C + \sum_a (k\varphi) + (k_0\psi_0 + k_u\psi_0)\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ここで，$\sum_a k = k_0 + k_r + k_u + k_l$ = 節点 $a$ に集まる材の剛比の和

$\sum_a C$ = 節点 $a$ の近端の固定端モーメント（$FEM$）の和

$\sum_a (k\varphi) = k_0\varphi_0 + k_r\varphi_r + k_u\varphi_u + k_l\varphi_l$ = 節点 $O, r, u, l$ から $a$ 端への到達モーメント（$COM$）の和{後述の式 (4) 参照}

いま，節点 $a$ に集まる材に荷重がなく，他端の回転を拘束したとき，節点 $a$ を $\theta_a$ だけ回転させるに要するモーメントをたわみ角式から求めるとただちに次式が得られる。

$$2\sum_a k\cdot\varphi_a = \sum_a 4EK\cdot\theta_a = \Phi_a \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

したがって，式 (2) は式 (3) の節点 $a$ の回転モーメントであることが知られ，式 (2) の右辺のカッコの各項は，節点 $a$ における不つりあい（回転）モーメントということができる。

いま，節点 $a$ の他端を拘束して，不つりあいモーメントの逆モーメントすなわち $\Phi_a$ を加える（節点 $a$ をバランスさせる）と，モーメント分配の原則によって，節点 $a$ に集まる材の剛比に比例して近端に分配モーメント（$DM$）$2k\varphi_a$ が生じ，その 1/2 が他端に到達する。すなわち到達モーメント（$COM$）はつぎのとおりである。

$$k\varphi_a = \Phi_a \times \left(\frac{k}{\sum_a k}\cdot\frac{1}{2}\right) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

このように式(1)の $k\varphi_a$ は $\Phi_a$ の $COM$ として得られ，$k\varphi_b$ は $\Phi_b$ の $COM$ として得られる。これらはそれぞれ，Kani 法における $M'_{ab}$, $M'_{ba}$ の計算と同じである。式(4)の右辺の係数 $k/2\sum k$ を回転モーメントの分配到達率，略して拙著[8]では到達率とよんでいる。

節点移動のない場合の演算を Cross 法，Kani 法について図示すると図—2 となる。演算の途中記入する数字は Cross 法，Kani 法とも第2行目のそれぞれ $COM$ と回転成分だけである。このことからして実際の計算では結局同じ数字が互いに場所を入れかえて反対の位置に記されていることがわかる。ゆえに，両者は同じ演算をなし，両者の間には収れんの遅速がないことが知られよう。

**（2） 層のバランス**

長方形多層ラーメンの第 $N$ 層における水平せん力のつりあいの式すなわち層方程式から，つぎの式が得られることは周知のとおりである（図—3）。

$$k_n\psi_N = -\frac{k_n}{2\sum_N k}\{P_N h_N + 3\sum_N k_n(\varphi_n + \varphi_{n'})\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

ここに，$\sum_N k_n$ = 第 $N$ 層の全柱の剛比の和

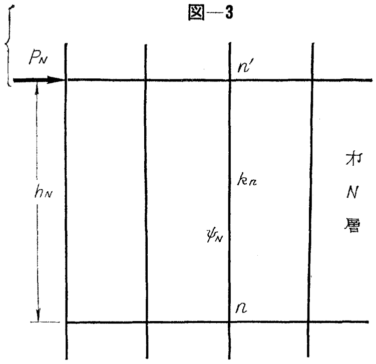
$P_N h_N$ = 第 $N$ 層より上層にある全水平せん力のモーメント

$3\sum_N k_n(\varphi_n + \varphi_{n'})$ = 節点回転による第 $N$ 層の全柱の上下端の $COM$ の和の3倍，あるいは節点回転による第 $N$ 層全柱の端モーメントの総和

部材角モーメント $k_n\psi_N$ は式(5)を使って演算を進めることができるが，つぎの形に変えてもさしつかえない。

$$k_n\psi_N = -\frac{3k_n}{2\sum_N k}\left\{\frac{1}{3}P_N h_N + \sum_N k_n(\varphi_n + \varphi_{n'})\right\} \equiv \Psi_{nn'} \quad \cdots\cdots\cdots(6)$$

図—3



式(5)あるいは式(6)の左辺は，Kani 法における $M''_{nn'}$ あるいは $M''_{n'n}$ であって，これは右辺のカッコの不つりあい層モーメントをバランスさせたとき，柱の上下端に到達した到達層モーメントとして求められる。右辺のカッコ外の係数は層モーメント到達率とよぶことができよう。

## 2．Cross 法における演算2種について

ラーメンを解析して端モーメントを求めるには，式(1)を参照すれば結局，$k\varphi$ と $k\psi$ あるいは $M'$ と $M''$ とを求めればよいことになる。$\Sigma C$ と $k\psi$ が既知量として与えられた場合には，$k\varphi$ は式(4)に示すように節点の回転モーメントの $COM$ として得られる。

しかしながら，節点移動が生じ $k\psi$ が未知の場合には，式(2)が示すように回転モーメント $\Phi$ の中に $k\psi$ がふくまれているので，これの計算のために式(5)または式(6)の層モーメントの到達演算が必要となる。ゆえに Cross 法で節点移動のあるラーメンを解く場合には，節点の水平移動を拘束して全節点の回転操作をするときの $COM$ の演算式(4)と，節点の回転角を上の状態に拘束して層の水平移動操作をするときの層モーメントの到達演算式(5)または(6)とを，交互にくり返し使用することによって最終のつりあい状態が得られ，$k\varphi$ と $k\psi$ とが逐次調整され，端モーメントが計算されることになる。つぎに演算法数種のうち本論に関係のある2種の方法について述べる。

**第 1 法**

① 節点の水平移動を拘束し，荷重によるおのおののはりの固定端モーメント($FEM$)の和(不つりあい回転モーメントの第1近似値 $-\Phi^{(1)}$)をバランスさせて，節点の周囲部材へ $COM$ させ，これらを到達材端に記入する。節点の回転操作式(4)を使用。

② 節点の回転角を①のまま拘束し，層ごとに不つりあい層モーメントを計算し，これをバランスさせて層の水平移動を行なわせる。このときの柱の部材角モーメントの第1近似値 ($k\psi^{(1)}\equiv\Psi^{(1)}$) は式(6)で求め，各柱の途中に記入する(曲げモーメントは柱頭・柱脚に同じ $\Psi^{(1)}$ が記入されるべきであるが，記入を簡単にするためにそれぞれの柱について1個記入すればよい)。……層の水平移動操作。

③ ①，②の操作によって各節点に新たに生じた不つりあいモーメント $\{-\Phi^{(1)}\}$ の補正量 $\{-\Delta\Phi\}$ だけを，①と同じ操作によりバランスさせ，このときの $COM$ $\{\Delta k\varphi\}$ を到達材端に記入する。……節点の回転。

④ ③の操作によって生じた新しい不つりあい層モーメントだけを②と同じ操作でバランスさせ，$\Psi^{(1)}$ と同じところにその補正量 $\{\Delta\Psi\}$ を記入する。……層の移動。

⑤ 以下③，④の操作をくり返して，所要の精度のつりあい状態になったところで演算を終える。したがって端モーメントの計算はつぎのとおりである。

はり端 $M=FEM+\Sigma COM+$(他端の $\Sigma COM$ の2倍または $\Phi$ の $DM$)

柱　端 $M=\Sigma COM+$(他端の $\Sigma COM$ の2倍または $\Phi$ の $DM$)$+$($\Sigma k\psi$ または $\Sigma\Psi$) ……………………………………(7)

**第 2 法**

① 第1法と同じ。

② 第1法と同じ。

③ ①，②によって各節点に新たに生じた不つりあいモーメント(材の近端の $COM$ の和すなわち $\{-\Delta\Phi\}$ と節点の上下の柱の $\Psi^{(1)}$ との和)を $\{-\Phi^{(1)}\}$ に加えて，これを第2近似値 $\{-\Phi^{(2)}\}$ とし，①の演算をする。

④ ③で生じた $COM$ によって層の不つりあいモーメント量を修正し，②の演算を行ない $\Psi$ の第2近似値 $\Psi^{(2)}$ を各柱の途中に記入する。

⑤ ③，④の操作をくり返し，$\Phi$，$\Psi$ が所要の精度の一定値に収れんするまで演算する。この方法は第1法のように $\Phi$，$\Psi$ の補正量 $\Delta\Phi$，$\Delta\Psi$ を求めず，逐次 $\Phi$，$\Psi$ の修正値を求めてゆく算法である。鷹部屋教授がたわみ角分配法[9]で用いられている算法と同じである。また，Kani もこの方法をとっている。端モーメントの計算はつぎのとおりである。

はり端 $M=FEM+$(最終の $COM$)$+$(他端の最終 $COM$ の2倍または最終 $\Phi$ の $DM$)

柱　端 $M=$(最終の $COM$)$+$(他端の最終 $COM$ の2倍または最終 $\Phi$ の $DM$)$+$(最終の $\Psi$) ……………………………………(8)

## 4．計　算　例

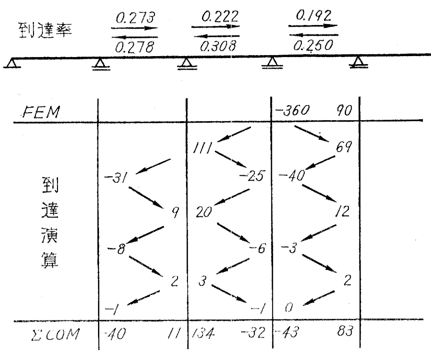
**例題 1．Kani の著書 Abb-15 の影響線の計算**

$FEM$ の計算は Kani の著書によるのも一法であるが村上教授の方法[7),8)]によってもよい。結局 $FEM$ は同じとなり，今の問題はそのバランス演算だけである。

第1法によると**図—4**のようになる。村上教授の数字は到達率であり，矢印方向の材端への到達率を表わす。演算途中の矢印は演算順序の理解を助けるために記入したが，これを省けば**図—5**となり，結果は $\Sigma COM$ 欄にみるように Kani の Abb-15 a と同じとなる。ただその記入場所が左右入れかわっているにすぎない。Kani 法および第2法は上の演算の累和方式となっているわけである。

第2法で行なえば，Abb-15 a と同じ数字が材端の左右の場所を入れかえて並んでゆくことは自明で，第1法

**図—4**




（乗数：1/1000）

**図—5**

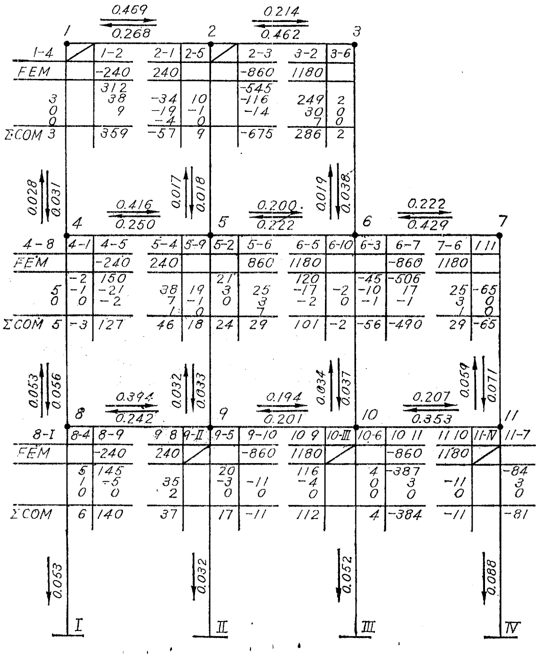
| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| FEM | | | | | | | -360 | 90 | | |
| 到 | | | -31 | | 111 | -25 | -40 | 69 | | |
| 達 | | | -8 | 9 | 20 | -6 | -3 | 12 | | |
| | | | -1 | 2 | 3 | -1 | 0 | 2 | | |
| ΣCOM | | | -40 | 11 | 134 | -32 | -43 | 83 | | |
| DM | | | 22 | -80 | -64 | 268 | 166 | -86 | | |
| | 0 | 18 | -18 | -70 | 70 | 236 | -237 | 87 | -87 | 0 |

（乗数：1/1000）

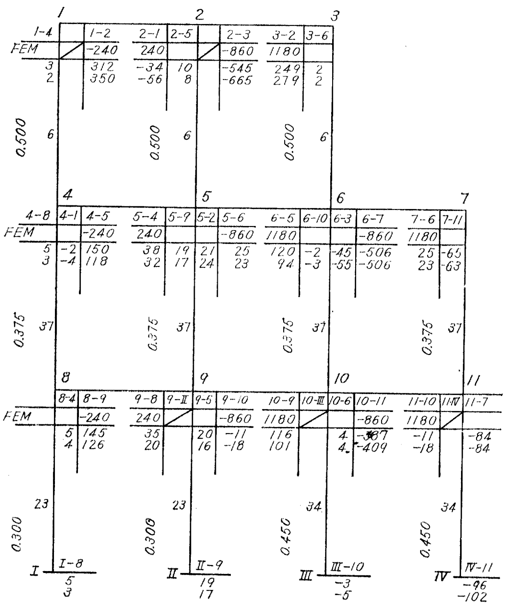
によるも，第2法によるも，Kani 法によるも収れんの遅速は生じない。

**図—6**

注：　到達演算ではつぎのサイクルでバランスすべき COM を同一行に並べた。
バランス順序は 3，2，1，…… であるが，一般には節点を千鳥形に選ぶがよい。乗数：1/100




**図—7**




**例題 2．Kani の著書 Abb-3 の節点の移動のないラーメンの解析**

第1法で Abb-3 a と同じバランス順序すなわち，節点 3，2，1；7，5，6，4；11，9，10，8 の順で演算をくり返すと図—6 を得る。Abb-3 a と同じ演算回数のとき，材端 (2−1) に − 4，材端 (3−2) に + 7 などの不つりあい $M$ が残っていることが知られる。本法はこのように未処理の不つりあい $M$ の大きさが判断される利点がある。

第2法で，Abb-3 a と同じ演算をすると，材端の数字は Abb-3 a と全く同じものが材端を入れかえて並んでゆくにすぎないから演算図を省く。

**例題 3．Kani の著書 Abb-6 a の節点移動のあるラーメンの解析**

第2法で $\Phi^{(2)}$ のバランスまでやったものを図—7 に示す。Abb-6 a と同じ数字が並ぶ。柱の途中の小数は層モーメント到達率，それに隣りの数字は部材角モーメント $\Psi^{(1)}$ の値である。

## 5．結　　び

Cross 法によるラーメンの影響線の演算法2種を示したが，これらは演算の途中ラーメンに加える操作は Kani 法と全く同じであるから，両者の間には解の収れんの遅速は生じえない。しかも例題で示したように，節点移動のあるなしにかかわらず，あるいは影響線の計算においても，本文第2法では Kani 法と同じ数字が並ぶ。したがって Kani 法と第2法とは全く同じ演算であり，両者の間に優劣はない。Kani 法の演算は Cross 法にお

いても可能なわけである。例題に示した計算表は，村上教授や筆者らが使っている記入方式を採っているが，Cross のように骨組の図上にそれぞれの材端に位置を定めて記入してもよい。

モーメント分配法ではその演算法として，この論文に記した2つの方法のほかに数種の演算法のあるのは周知のとおりである。また上記の2法をさらに簡易化しようとする提案もいくつかあげられる。これらについては拙論[6]に簡単な紹介があるが，文献欄にいくつかを記すにとどめよう[10]。

鷹部屋教授のたわみ角分配法は，$\varphi$ と $\psi$ を逐次調整してゆく解析法であるが，これらと本論文の $\Phi$ と $\Psi$ とがそれぞれ相対応するものと考えると，さらに興味があると思う。このように考えると Kani 法はたわみ角分配法から生れたとも思われる。さらに，一言したいのは Kani の著書に終始使われている例題のラーメンは，柱の剛比がはりのそれにくらべてきわめて小さいことである。解の収れんの早い原因はこのためであって，解析法の優秀さによるものと判断するのは当たっていない。多径間のディビダーク方式のラーメン橋では Kani 法によっても収れんはきわめて遅い。

このようであるにもかかわらず Kani 法が近年特別に推奨されている事実に，筆者は奇異なものを感じる。Cross 法こそ再認識推奨されるべきではなかろうか。近年ラーメンの解析法はますます多岐にわたり，教科書などにも，その紹介の章が増すばかりである。この小文が Kani 法と Cross 法とに対しての認識を新たにするために多少とも役にたつならば幸せである。本文を草するにあたって，村上教授の貴重なご助言を頂いた。付記して深く謝意を表す。

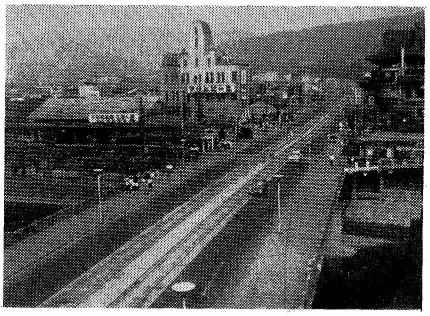
### 参考文献


1) Kani, G.：Die Berechnung mehrstöckiger Rahmen, Konrad Wittwer, Stuttgart, 7 Aufl. 1959, 初版の年次不明
2) Kani,G.：Analysis of Multistory Frames (Transrated by C.J. Hyman), Frederik Ungar, N.Y., 1957
3) カーニ：多層ラーメンの数値計算法（奥村・佐々木訳），技報堂，1961
4) Cross, H.：Proc. ASCE, May, 1930 and Trans. ASCE, Vol. 96, 1932
5) Cross, H. and N.D. Morgan：Continuous Frames of Reinforced Concrete, J. Wiley, N.Y., 1932
6) 吉村：モーメント分配と撓角分配について，熊大工学部研究報告，Vol. 5, No. 2, Dec., 1956
7) 村上：影響線のプロット法（その 1，2，3），九大工学部集報，Vol. 26, No. 4, 1954, Vol. 27, No. 2, Vol. 27, No. 4, 1955
8) 村上・吉村：構造力学，コロナ社，初版 1957
9) 鷹部屋：土木学会誌，昭和10年1月
　同　：ラーメン新論，岩波，昭和13年
10) Grinter, L.E.：Wind stress Analysis Simplified, Trans. ASCE, Vol. 99, 1934 あるいは Theory of Modern Steel Structures, Vol. II, 1953, p. 133～ McMillan, N.Y.
精度の高い $\Phi$ の近似値を求める研究としては，鷹部屋教授の撓角分配法，Cross and Morgan の著書 p. 125 および p. 229, また右田助教授が日本建築学会昭和30年秋季大会（研報第33号）その他に発表している。
$\Phi$ を級数和として求める研究としては，吉村，Memoirs of Faculty of Eng., Kumamoto Univ., Vol. II, No. 1, 1955, および土木学会誌，1955
吉村・村上：Memoirs of Faculty of Eng., Kumamoto Univ., Vol. III, No. 1, 1955, A. Pauw, Proc. ASCE, Paper No. 763, 1955
井上：岐阜大工学部研究報告，1955 などがある。
11) 谷口：建造力学，裳華房，昭和19年
二見：構造力学，実教出版，昭和25年
塚本：ラーメンの実用解法，理工図書，昭和28年


（1694. 6.30・受付）

---

## 四条大橋高欄設計懸賞募集
### 京　都　市


四条大橋全景

1. 内　　　容：四条大橋（鴨川筋）高欄および照明灯の設計
2. 募集期間：昭和39年10月15日から昭和39年11月15日まで
3. 入選発表：昭和 39 年 12 月
4. 入選作品にはつぎの賞金を呈する

| | | |
|---|---|---|
| 優秀作品 | 100 万円 | 1名 |
| 佳　　作 | 10 万円 | 若干名 |

5. 応募しようとする者は住所・氏名・年令・職業および性別を記入し昭和 39 年9月1日から昭和 39 年 10 月 15 日までに 10 円切手3枚同封のうえ，つぎの設計公募係宛申し込めば公募要綱を郵送する。
6. 詳細については下記に照会すること

京都市中京区寺町御池　京都市土木局四条大橋高欄設計公募係（TEL 23—6259）