構造設計

大地羊三*

1. まえがき

本講座は実際にプログラムを組む人々のためのものではなく，もっと広い層の人々に電子計算機を正しく理解していただき，将来電子計算機を利用されようとするとき，最も効率のよい使い方をしていただくためのものである。この目的のために，むずかしい数式をさけ，設計計算のプログラム化はいかにあるべきか，また現状はどうかということに重点をおいて解説した。しかし問題の性質上多少の数式はのせざるを得なかった。数式の誘導や記号の説明はできるだけ簡単にしたため，かえって解りにくくなった点もあるが，数式の説明が主目的ではないのでご了承願いたい。

電子計算機を利用して設計計算を行なうこころみは，かなり一般化されてきている。またこの問題を対象にした論文も数多く発表されている。しかし，それらの中には，電子計算機の特長をよく理解しているかどうか，疑問なものも散見される。本文中でもふれているが，電子計算機の特長は，簡単な四則演算を高速にまちがいなく行なう所にある。したがってむずかしい計算をやらせるよりも，簡単な計算をくり返しやらせる方が利口である。またプログラムを組むことはかなりやっかいな仕事であるから，完成したプログラムは数多く利用できるものであることが望ましい。

電子計算機のなかった時代には，元数の多い連立一次方程式を解くことは不可能に近かった。そのためいろいろと工夫がこらされてきた。現在ではこの工夫は不用である。むしろ問題の本質をとらえるためには，邪魔なものであるとさえ感ぜられる。諸先輩が築き上げた仕事が不用であるというわけではないが，いままでの慣習にとらわれずに，積極的に新しい手法を取り入れて行く態度が必要であろう。

本文では設計計算を，断面力計算・断面形状の決定・そのほかの三つに分けて解説してある。第一の断面力計算は構造力学の問題である。これは計算法の種類によって，さらに三つに分けた。第二の断面形状の決定は設計の問題であり，与えられた断面力に抵抗できる断面の形をきめる問題である。以上のほかにでき上がった構造物が，動荷重に対してどのように応答するか，あるいは座屈に対して安全かどうかなどの問題がある。これらを一括して最後の節にまとめてある。

2. 常微分方程式を出発点とする断面力の計算

はりの問題は，つぎの常微分方程式を

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2y}{dx^2}\right)=p \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

適当な境界条件，例えば単純ばりの場合であれば

$$\left.\begin{aligned}&x=0 \text{ で } y=0,\ M=-EI\frac{d^2y}{dx^2}=0\\&x=l \text{ で } y=0,\ M=-EI\frac{d^2y}{dx^2}=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(2)$$

のもとに解けばよいことは皆様のよく理解されている所であろう。境界条件を変えれば，また各種の支持条件をもつはりや連続ばりを解くことができる。また断面二次モーメント I を x の関数にすれば，変断面の問題ともなる。このように常微分方程式を出発点として，変形や断面力の計算ができるものには，はりのほかにアーチ・つり橋・曲線桁などがある。ここでは簡単のために，単純ばりを中心にして話をすすめることにする。

この問題を電子計算機にかけようとする場合，まず考えられることは条件(2)のもとに式(1)を解き，この解析解をプログラムすることであろう。しかしこの方法だと，境界条件が変わるごとに，プログラムを作りなおさなければならない。一つの問題をプログラムすることは，自動プログラム方式（本講座第1編 参照）が開発されかなり楽になったとはいえ，まだ多くの日時を要し，費用のかかるものである。米国では命令1個当り8ドルかかるといわれている。わが国ではこれまででないにしても700円くらいにはなっているであろう。したがって一つでできるだけ多くの問題が処理できるプログラムを作ることが望ましい。

またアーチ・曲線桁などの解析解には，多くの三角関数・双曲線関数をふくんでいる。電子計算機は基本的には四則演算の回路だけを持つものであり，そのほかの関数は別の方法（サブルーチン）で計算させている。したがってこれらの関数は，計算できないわけではないが，使わないですむものなら，その方が有利である。さらに与えられた常微分方程式が解析的に解けないとき，例えば一般の変断面のはりの場合には，この方法は全く無力

* 正員 工博 法政大学教授

である。このように考えると，解析解をプログラムすることは，あまり感心した方法ではない。しかしいかなる場合にも不利だというわけではなく，あとで述べる方法にも欠点があるから，それらを総合して検討すべきである。

つぎに考えられる方法は，常微分方程式を数値積分することである。このようにすれば常微分方程式さえ作ることができれば，問題は解けたことになる。今の場合式 (1) をつぎのごとく，二つの常微分方程式に分解する。

$$\frac{d^2M}{dx^2}=-p,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{M}{EI}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(3),(4)$$

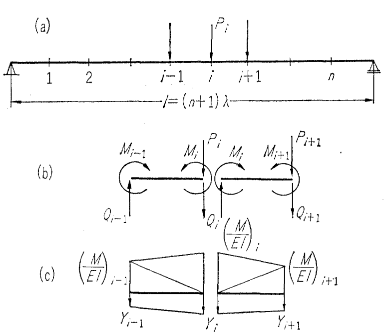
数学的には，式 (2) で表わされる境界条件のもとに式 (3),(4) を解くいわゆる境界値問題ということになる。これを数値計算するには，式 (3),(4) をつぎのごとき差分方程式になおし，

$$M_{i-1}-2M_i+M_{i+1}=-p_i\lambda^2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

$$y_{i-1}-2y_i+y_{i+1}=-\left(\frac{M}{EI}\right)_i\lambda^2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

境界条件 (2) を使って材端からはみ出る変数を整理し，連立一次方程式の形にすればよい。しかしこの方法では**図—1** の分割点の間隔をかなりせまくしない限り，精度の良い答は得られない。

図—1 単純ばりの例



分割点の数を少なくして精度の良い結果を得るためには，構造力学の立場から式 (3),(4) を見なおさなければならない。式 (3) は力のつりあいを表わすものであり，式 (4) は変形量と断面力の関係を表わすものである。**図—1** (b) のごとく部材片の一部を取り出して力のつりあいを考えると，左側の部材片に対しては

$$M_{i-1}-M_i+Q_i\lambda+P_i\lambda=0$$

右側の部材片に対しては

$$M_{i+1}-M_i-Q_i\lambda=0$$

が得られ，両式を加えあわせると

$$\frac{1}{\lambda}(M_{i-1}-2M_i+M_{i+1})=-P_i\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

が得られる。一方，式 (4) は M/EI を荷重（弾性荷重）と考えた場合の曲げモーメントが，たわみ y となることを意味しているから，**図—1** (c) のごとく考え，式 (7) の場合と同様の方法で計算を進める。今度は M/EI が分布荷重であるため

$$\frac{1}{\lambda}(y_{i-1}-2y_i+y_{i+1})=-\frac{\lambda^3}{6EI}(M_{i-1}+4M_i+M_{i+1})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

となる。式 (5),(6) のかわりに式 (7),(8) を用いれば，分割点の数を減らしても精度の良い結果が得られる。材端の条件を考慮しながら，式 (7),(8) を整理し行列の形で書くと，次式が得られる。

$$[\delta](M)=-(P),\quad [\bar{\delta}](y)=-[k](M)\cdots(9),(10)$$

(y) の係数が作る行列 $[\bar{\delta}]$ と，(M) の係数が作る行列 $[\delta]$ とでは，支点条件のいかんによって，多少形が変わることがあるので，前者に「－」をつけておいた。仮想働の原理を用いると，$[\bar{\delta}]$ は $[\delta]$ の行と列を入れかえた行列になることが証明されるが，ここではこれ以上くわしいことは述べないことにする。式 (9),(10) より (M) を消却すると最終的な連立一次方程式として

$$[\delta][k]^{-1}[\bar{\delta}](x)=(P)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

が得られる。これを解けばたわみ (y) が求まり，得られた (y) を式 (10) に代入して曲げモーメント (M) を求めることができる。式 (11) の左辺に表われる行列は，外国で stiffness matrix とよばれているものである。

以上のごとく常微分方程式を境界条件を用いて解く問題は，連立一次方程式（あるいは行列）の問題に書きなおすことができる。この方法によれば解析的に解くことのできない問題も処理することができるし，境界条件が変わったときでも，行列 $[\delta]$,$[\bar{\delta}]$ を多少変更するだけでことがたりる。一方この方法の欠点は，多くのメモリー（記憶容量）を必要とすることである。したがって小容量の電子計算機を使用する場合には，メモリーが少なくてすむようにいろいろ工夫をしなければならない。行列を使う方法には，上記のもの以外にも，二，三の提案があるが，紙面の関係もあるので割愛する。

3．骨組構造物の部材力の計算

トラス・ラーメン・格子桁などのごとく多くの部材を節点で結合した骨組構造物の部材力の計算について述べる。電子計算機が導入された初期には，手計算時代からの解法，例えば弾性方程式による方法，たわみ角法，モーメント分配法などによるプログラム化が行なわれていた。

弾性方程式による場合は未知数—不静定量—にかかる係数を求める計算がかなりやっかいである。さきにも述べたごとく，電子計算機は簡単な四則演算を高速に実施する所に特徴がある。またプログラミングを簡単にする観点から，同じ種類の計算をくり返すようにすることが望ましい。この意味で係数ごとに異なったやっかいな計算をさせることはこのましくない。

たわみ角法による場合は，構造物の形式が異なるごとに，別の節点方程式・層方程式を作らなければならない

し，軸力による変形が無視されていることもこのましくない。モーメント分配法は，構造物ごとに分配係数・伝達係数を変えなければならないが，くり返し計算にその特徴がある。くり返し計算は，電子計算機の最も得意とする仕事の一つである。しかし反面において，くり返しを何回やれば，所期の精度で結果が得られるか解らないという欠点がある。したがって前もって，正確な計算時間がつかめない。秒単位で計算時間を推定している時代であるから，イテラチオンにかわる良い方法がある場合には，さけるべきであろう。

以上要するに，個々の係数あるいは方程式にこだわりすぎたために出て来た欠陥である。そこで構造物全体を巨視的に見る立場に立って新しい方法が開発された。

以下最も簡単なトラスを例に取って説明する。

i 節点で力のつりあい方程式を立てると，次式が得られる。

$$\sum_{(k)=(1)}^{(n)} \delta_{xi(k)}\cdot\cos\theta_{(k)}N_{(k)}=P_{xi},$$

$$\sum_{(k)=(1)}^{(n)} \delta_{yi(k)}\cdot\sin\theta_{(k)}N_{(k)}=P_{yi} \cdots\cdots\cdots\cdots (12),(13)$$

ただし (n)：部材の数

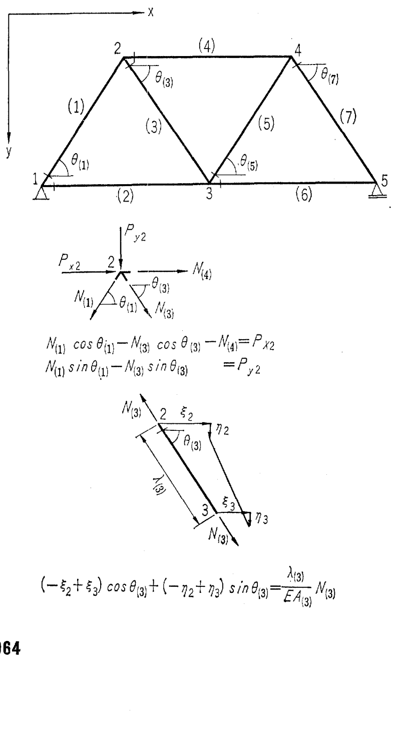
P_{xi}，P_{yi}：i 点に使用する外力の x,y 方向分力

$N_{(k)}$，$\theta_{(k)}$：(k) 部材の軸力と x 軸に対する傾き

$\delta_{xi(k)}$，$\delta_{yi(k)}$：(k) 部材と i 部材のつながり方を示す量

両者が結合していなければ 0，傾き $\theta_{(k)}$ を計る基準となった側が i 節点と結合していれば -1，反対側が結合していれば $+1$ とする。つぎに述べるように式 (12)，(13) は常に組になって表われるとは限らないので，δ_x，δ_yと区別した。

図—2 トラスの例



各節点について式 (12)，(13) を作るわけであるが，その中で支点反力をふくむものをのぞいて，2×(節点の数)−(支点反力の数) だけの方程式をたてる。これらを簡単に

$$[\delta_x][\cos\theta](N)=(P_x),\ [\delta_y][\sin\theta](N)=(P_y) \cdots\cdots\cdots (14),(15)$$

で表わすことにする。

一方節点の変位と，それに結合している部材の端部の変位は同じであるという条件より次式が得られる。

$$\sum_{i=1}^{m}\cos\theta_{(k)}\delta_{xi(k)}\xi_i+\sum_{i=1}^{m}\sin\theta_{(k)}\delta_{yi(k)}\eta_i$$

$$=\frac{\lambda_{(k)}}{EA_{(k)}}N_{(k)} \cdots\cdots\cdots\cdots (16)$$

ただし　m：節点の数

$\lambda_{(k)}$，$A_{(k)}$：(k) 部材の長さおよび断面積

ξ_i，η_i：i 節点の x 方向，y 方向の変位

右辺は (k) 部材の伸びを表わし，左辺は (k) 部材と結合している節点の変位を表わしている。各部材について式 (16) を作り，それらをまとめて

$$[\cos\theta][\bar{\delta}_x](\xi)+[\sin\theta][\bar{\delta}_y](\eta)=[\kappa](N) \cdots (17)$$

で表わすことにする。ここに $[\bar{\delta}_x]$，$[\bar{\delta}_y]$ はそれぞれ $[\delta_x]$，$[\delta_y]$ の行と列を入れ替えた行列である。式 (14)，(15)，(17)より (N) を消却すると

$$\left.\begin{array}{l}[\delta_x][\cos\theta][\kappa]^{-1}[\cos\theta][\bar{\delta}_x](\xi)\\ +[\delta_x][\cos\theta][\kappa]^{-1}[\sin\theta][\bar{\delta}_y](\eta)=(P_x)\\ [\delta_y][\sin\theta][\kappa]^{-1}[\cos\theta][\bar{\delta}_x](\xi)\\ +[\delta_y][\sin\theta][\kappa]^{-1}[\sin\theta][\bar{\delta}_y](\eta)=(P_y)\end{array}\right\}\cdots(18)$$

が得られる。この式 (18) より節点のx方向のたわみ(ξ)および y 方向のたわみ (η) を求めることができ，さらに得られた (ξ)，(η) を式 (17) に代入することによって軸力 (N) を求めることができる。以上の方法は節点と部材の結合の仕方を表わす行列 $[\delta_x]$，$[\delta_y]$ を変えるだけですべての平面トラスに適用できる。しかも $[\delta_x]$ と $[\delta_y]$ は，それぞれ x 方向または y 方向の支点反力の有無によって，それに対応する行が消えたり現われたりするだけで，ほかの部分は全く同じ元素を持つ行列である。これを立体トラスに拡張することは容易である。さらにラーメン・格子桁などに拡張することもできるが，この場合には部材力として軸力以外に，曲げモーメント，せん断力あるいはねじりモーメントが現われるし，外力も格点荷重だけではなくなるため，かなり複雑な形になる。

無論上記の方法だけが用いられているわけではない。支点反力の処理方法，行列のならべ方に工夫がなされたものもあるし，たわみ(ξ)，(η) を求めないで直接軸力(N)が求められるように変形したものもある。さらに行列の元数を減らすための工夫もある。極端な場合には，初めに述べた弾性方程式の形にまで変形することも可能であるし，また平行した主桁を横桁が結んでいるような格子構造の場合には，Leonhalt や Homberg らの方法に似た形に変形することもできる。しかしこのような変

形をするとプログラムが複雑になり，コーデングにかなりの期日がかかる。電子計算機の容量がゆるすかぎり形が簡単で，しかも適用範囲の広いプログラムを作ることをおすすめする。

4. 偏微分方程式を出発点とする断面力の計算

平版の問題はつぎの偏微分方程式を

$$D\frac{\partial^4\omega}{\partial x^4}+2D\frac{\partial^4\omega}{\partial x^2\partial y^2}+D\frac{\partial^4\omega}{\partial y^4}=P\cdots\cdots\cdots\cdots(19)$$

適当な境界条件，例えば四辺が単純支持される長方形版の場合であれば

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \text{ で } \omega=0,\ \dfrac{\partial^2\omega}{\partial x^2}=0 \\ y=0 \text{ で } \omega=0,\ \dfrac{\partial^2\omega}{\partial y^2}=0 \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(20)$$

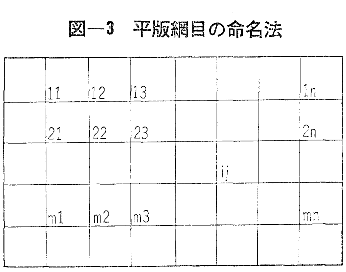
のもとに解けばよい。境界条件を変えれば，各種の支持条件をもつ平版や連続平版を解くことができる。

このように偏微分方程式を出発点として，変形や断面力の計算ができるものには，このほかに直交異方性版，平盤，シェル，重力式ダムおよび構造設計には直接関係はないが弾性論の諸問題がある。ここでは簡単のために四辺単純支持の平版を中心に話をすすめることにする。

電子計算機が導入される以前には，平版の問題は，たわみ ω をフーリエ級数あるいは二重フーリエ級数に展開して計算を進める方法がその主流であった。電子計算機導入後も，初めのうちは同じ方法が用いられていたようであるが，たわみ ω は別として，これを2回，3回と偏微分して求めた曲げモーメント・せん断力は，収束の悪い級数である。これを改善するため，収束値のわかっている級数との差を取るなどいろいろの策が講ぜられている。また係数 D が変化したり，境界条件が複雑になると，そのたびに新しい工夫が必要になる。

この問題を一気に解決する方法は，偏微分方程式を数値積分することである。**2.** の常微分方程式の場合と同様に境界値問題であるから，差分方程式が数値積分の最も有力な手段である。**図—3** のごとく平版を縦横の網目に切って，その交点に記号をつけると，ij 点に対する差分方程式はつぎのごとくなる。

図—3　平版網目の命名法

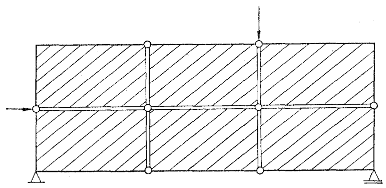


$$\begin{aligned}&(\omega_{i-2,j})+(2\,\omega_{i-1,j-1}-8\,\omega_{i-1,j}+2\,\omega_{i-1,j+1})\\&+(\omega_{i,j-2}-8\,\omega_{i,j-1}+20\,\omega_{i,j}-8\,\omega_{i,j+1}+\omega_{i,j+2})\\&+(2\,\omega_{i+1,j-1}-8\,\omega_{i+1,j}+2\,\omega_{i+1,j+1})+(\omega_{i+2,j})\\&=P_{ij}\,\lambda^4/D\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(21)\end{aligned}$$

すべての交点について上式を作り，平版からはみ出た点は，境界条件を使って整理すると，mn 個の連立一次方程式ができる。式 (21) の左辺はやっかいな形をしているように見えるが，実際に並べてみると，直積行列の和の形をしていることがわかる。この性質を利用すると Homberg 流の解法も可能となるが，ここではふれないことにする。

以上の方法は網目をこまかくしないと，精度が上がらない。これに対して，網目をあらくしたまま精度を上げることができないか，という問題が当然起こってくる。平盤を例に取って，米国でなされているこころみの一つを簡単に説明しよう。まず平盤を**図—4** のごとくいくつかのブロックに分割する。分割された各ブロックは，あらためて角でヒンジで結合しなおす。このようにモデル化すると，個々のブロックは骨組構造物の一つの部材と相似なものとなり，それらが節点で結合したものと考えられる。このモデルで，節点における力のつりあい式と，ブロックの角に作用する力と角の変位（節点の変位とも考えられる）を作ることにより，骨組構造物の場合と同じような方法で解くことができる。この場合切断面付近の応力状態は実際と合わないが，ブロックの内部ではかなり良く合うという報告がある。

図—4　平盤のモデル



以上のほかに2階の偏微分方程式の境界値問題を解くために，モンテカルロ法という確率の概念を取り入れた手法が利用され始めている。これはやがて4階の偏微分方程式の境界値問題にも利用されるようになるであろう。

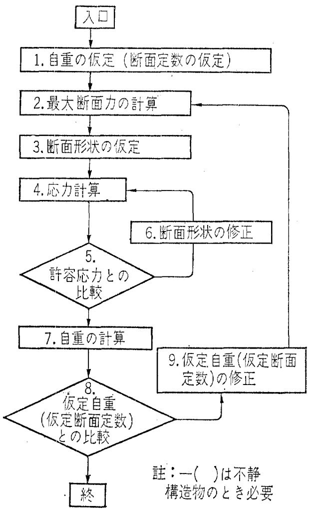
5. 断面形状計算

前節までに述べたことは，断面力の計算法である。構造物の設計計算は，これだけではすまされない。さらに断面の形状を決定する必要がある。設計計算の手順をブロック ダイヤグラムで示すと大略 **図—5** のごとくになるであろう。前節までに述べたことは，図のブロック 1,2 に対応する部分であった。設計計算では，さらに3以下の計算を実行しなければならない。この部分でやっかいなのは，4の断面形状の仮定と，6の断面形状の修正である。すなわち初めにどのような断面を仮定し，応力過大のときは，どのようにして断面を修正して行くか（幅を変えるか，高さを変えるか，変える量はどのくらいにするか）という問題である。この部分は従来設計者の感に頼っていた。これを公式化しなければ電子計算機

はうけつけない。また示方書の規定によるチェックも必要である。

もっとも簡単な方法は，あらかじめ何段階かの標準断面をきめ，それらを電子計算機におぼえさせておくことであろう。ある規準でそのうちの一つを選び出し，応力の計算を行ない，許容応力との比較をする。もし断面を変更する必要があれば，一段上か下の断面に切りかえて同じことをくり返すわけである。PCやRCのごとく断面の形をこまかく変えると型わくの関係あるいは現場施工の関係から，かえって不経済になるものでは，この方法が有利である。しかし鋼橋のごとく mm 単位で断面寸法の増減ができるものには利用できない。断面計算の手法をこまかく追跡したり，過去に設計された例を統計的に処理したりして，設計の手順を公式化する必要がある。この場合市販されていない板厚をのぞいたり，左右の断面と極端に異なった形にならないような制限も必要になってくる。

図—5　設計計算のブロックダイヤグラム



以上は従来から行なわれている設計の方式をプログラム化する場合のことであるが，最近 optimum design という言葉で，新しい方式が考えられ始めているので，これについて一言しておく。われわれが構造物を設計する場合，その製作価格を最小にすることが望ましい。製作価格の中にはいろいろの要因があるが，いま簡単のために製作価格を最小にすることは，構造物の総重量を最小にすることに等しいと考える。一方構造物が物として形をなすためには，個々の部材はある最小断面より大きくなければならない。すなわち

$$\underline{A}\leq A_i \cdots\cdots(22)$$

でなければならない。一方部材の応力は許容応力より大きくなることはゆるされないし，またあまり小さいと不経済になる。すなわち応力には上限と下限がある。

$$\underline{\sigma}\leq\sigma_i\leq\bar{\sigma} \cdots\cdots(23)$$

このように考えてくると，われわれの問題は，式 (22)，(23) なる条件のもとに構造物の総重量を最小にする解 A_i を求めることに帰着する。これは線形計画で議論される問題に似ている。ただしわれわれの場合は，式(23)が A_i の一次式とならないため，線形計画がそのままの形で利用できないところに問題がある。

6. そ の 他

以上設計計算に電子計算機を利用する場合の計算方式について述べてきたが，これらのほかに設計完了後あるいは設計の途中で，問題にしている構造物が，動的荷重に対してどのような応答をするか，あるいは座屈に対して安定であるかどうかの検討が必要となることがある。また過大荷重に対しては塑性領域まで考慮したいということもある。さらに最近のごとく曲線桁が数多く採用されるようになると，複雑な曲線形の計算が必要になってくる。これらはいずれも広い意味で設計計算にふくまれるものである。以下紙面のゆるす限り，おもなものについて概要を述べる。

(1) 振動問題

構造物の振動を論ずる場合，これを質点系におきかえることがよく行なわれている。一質点の振動方程式は衆知のごとく

$$m\ddot{y}+c\dot{y}+ky=f(t) \cdots\cdots(24)$$

である。これを質点系に拡張すると

$$[m](\ddot{y})+[c](\dot{y})+[k](y)=(f(t)) \cdots\cdots(25)$$

となる。ここに $[m]$,$[c]$ は各質点の質量および減衰係数を表わす行列であり，$[k]$ は各質点を結んでいる仮想のバネ部のバネ部常数を表わす行列である。そしてこの$[k]$が，**2.** で述べた stiffness matrix になっている。式(25)は2階の常微分方程式であるが，**2.** の場合と異なり初期値問題である。すなわち $t=0$ のときの (y) および $(\dot{y})$ を与えておいて，時間とともに (y) がどのように変化するかを調べる問題である。したがって Runge-Kutter-Gill 法，Newmark の Beta 法その他の数値積分法が利用できる。

(2) 安定問題

柱の座屈の式は衆知のごとく

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}+Py=0 \cdots\cdots(26)$$

で表わされる。この式の解を **3.** の式 (16) のかわりに用いて計算を進めると，元素の中に P をふくんだ stiffness matrix が得られる。この stiffness matrix の行列式 (determinant, 行列ではない) を0とする P の値が座屈荷重である。

7. あとがき

電子計算機を用いて構造設計をする場合に利用されている手段について解説した。著者の知る限りにおいて，外国で発表された文献をもらさないようにしたつもりである。しかし与えられた問題が広範囲なため，共通性のあるものを選び，特定の問題に限って用いられる手法は割愛した。また国内でもいろいろと有力なプログラムができているようであるが，個々のプログラムにはいっさいふれなかった。本講座の最後に，現在できているプログラムのリストがのるはずであるから，それを参考にしていただきたい。