

今月は論文集第 104 号 (39 年 4 月発行) 登載予定論文としてつぎの 6 編を紹介いたします。なお、次号では第 105 号登載論文として下記の 4 編を紹介する予定です。

小堀為雄・山田善一：桁橋ヒンジにおける衝撃とその影響に関する研究

岡田 清・小柳 治：コンクリートにおける塑性ヒンジの生成に関する研究

林 公重：杭の支持力，先端抵抗，引抜抵抗におよぼす杭先の影響に関する模型実験的研究

松尾 稔：送電用鉄塔基礎の引揚げ抵抗力について

### 長大スパンつり橋のタワーの耐震 計算法に関する研究

小西 一郎・山田 善一  
高岡 宣善・国広 昌夫

この論文はすでに発表されている地震 スペクトル 線図を用いて、長大スパンつり橋 タワー の動的耐震設計を迅速に行なう方法についてのべたものである。そして数値計算例によって、震度法による計算結果ならびに著者らがさきに発表した論文の計算結果と、本理論による結果とを比較したものである。

1. においては著者らがこれまで行なってきた長大スパンつり橋の耐震計算の研究結果について若干ふれ、タワーの耐震計算が非常に重要であることを指摘する。そして、つり橋はタワー・補剛桁・ケーブル・アンカー ブロックなどの互いに剛性の大きく異なる構造部材であるから、タワーと補剛桁とは別々に切り離してそれぞれ別個に耐震計算を行なえることについて述べる。

2. と 3. においてはタワーの運動方程式を誘導し、この運動方程式を Modal Analysis の方法によって解く。そうすると、最後に解くべき微分方程式は、

$$\ddot{q}_j + 2\beta \dot{q}_j + \omega_j^2 q_j = -\ddot{z}_0, \quad (j=1, 2, \dots, n) \dots\dots(1)$$

となる。ここに  $\ddot{z}_0$  は地震加速度である。初期条件を  $q=0, \dot{q}=0$  とすると式 (1) の解は周知のごとく、

$$q_j(t) = -\frac{1}{\omega_j \sqrt{1-\zeta^2}} \int_0^t \ddot{z}_0(\tau) e^{-\omega_j \zeta(t-\tau)} \sin \omega_j \sqrt{1-\zeta^2}(t-\tau) d\tau, \dots\dots(2)$$

ただし  $\zeta = \beta/\omega_j$

で与えられる。

4. においては地震度の速度スペクトル、

$$S_V = \left[ \int_0^t \ddot{z}_0(\tau) e^{-\omega_j \zeta(t-\tau)} \times \sin \omega_j \sqrt{1-\zeta^2}(t-\tau) d\tau \right]_{\max} \dots\dots(3)$$

についてのべ、5. においてこの  $S_V$  を用いて構造物の最大レスポンスを求める。

すなわち、 $\zeta$  が 1 にくらべて十分小さいとすると式 (2)、および (3) から、

$$q_{j,\max} = \frac{1}{\omega_j} \cdot S_V \dots\dots(4)$$

となるから、タワーのたわみ、曲げモーメント、せん断力の最大値はそれぞれつぎのようになる。

(1) たわみ

$$Y_{i,\max} \leq (Y_i) = \sum_{k=1}^8 \frac{1}{\omega_k} |f_k Y_i^{(k)}| S_V, \dots\dots(5)$$

$$(\bar{Y}_i) = \sqrt{\sum_{k=1}^8 \left( \frac{1}{\omega_k} f_k Y_i^{(k)} S_V \right)^2} \dots\dots(6)$$

(2) 曲げモーメント

一般の点に対しては、

$$M_{i,\max} \leq (M_i) = \frac{EI_i}{b^2} \sum_{k=1}^8 \frac{1}{\omega_k} |f_k A_i^{(k)}| S_V, \dots\dots(7)$$

$$(\bar{M}_i) = \frac{EI_i}{b^2} \sqrt{\sum_{k=1}^8 \left( \frac{1}{\omega_k} f_k A_i^{(k)} S_V \right)^2} \dots\dots(8)$$

タワーベースの曲げモーメントは、

$$M_{0,\max} \leq (M_0) = \frac{2EI_0}{b^2} \sum_{k=1}^8 \frac{1}{\omega_k} |f_k Y_0^{(k)}| S_V, \dots\dots(9)$$

$$(\bar{M}_0) = \frac{2EI_0}{b^2} \sqrt{\sum_{k=1}^8 \left( \frac{1}{\omega_k} f_k Y_0^{(k)} S_V \right)^2} \dots\dots(10)$$

(3) せん断力

一般の点に対しては、

$$Q_{i,\max} \leq (Q_i) = \frac{EI_i}{b^3} \sum_{k=1}^8 \frac{1}{\omega_k} |f_k D_i^{(k)}| S_V, \dots\dots(11)$$

$$(\bar{Q}_i) = \frac{EI_i}{b^3} \sqrt{\sum_{k=1}^8 \left( \frac{1}{\omega_k} f_k D_i^{(k)} S_V \right)^2} \dots\dots(12)$$

タワーベースに対しては、

$$Q_{0,\max} \leq (Q_0) = \frac{EI_0}{b^3} \sum_{k=1}^8 \frac{1}{\omega_k} |f_k D_0^{(k)}| S_V, \dots\dots(13)$$

$$(\bar{Q}_0) = \frac{EI_0}{b^3} \sqrt{\sum_{k=1}^8 \left( \frac{1}{\omega_k} f_k D_0^{(k)} S_V \right)^2} \dots\dots(14)$$

塔頂に対しては、

$$Q_{8,\max} \leq (Q_8) = \frac{EI_8}{b^3} \sum_{k=1}^8 \frac{1}{\omega_k} |f_k D_8^{(k)}| S_V, \dots\dots(15)$$

$$(\bar{Q}_8) = \frac{EI_8}{b^3} \sqrt{\sum_{k=1}^8 \left( \frac{1}{\omega_k} f_k D_8^{(k)} S_V \right)^2} \dots\dots(16)$$

なお、質点  $m_i$  に作用する最大慣性力が  $m_i(\dot{y}_i + \ddot{z}_0)_{i,\max} = m_i \omega_k f_k Y_i^{(k)} S_V, (k=1, 2, \dots, 8)$  で与えられるので、この慣性力を用いて最大せん断力を計算する式についてものべてある。

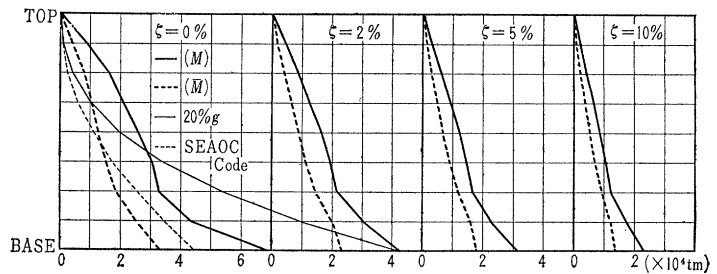
6. においては、以上の諸式を用いて数値計算を行なった結果を示す。その一例を図-1 に示す。

7. と 8. において計算結果に対する考察と結論とをのべる。その結論を要約すればつぎのようである、

① 本研究ではつり橋系の中からタワーのみ取り出して耐震計算を行なったが、このような簡略化によって生ずる誤差はごくわずかで無視しうる。

② 塔頂に作用する軸方向圧縮力は、振動周期・振動モードに対してほとんど影響をおよぼさない。

図-1



③ 地震の作用によりタワーの断面に生ずる応力のうち支配的なのは曲げ応力であって、せん断応力の値はごく小さい。

④ 低次モード、とくに第1次振動モードによるレスポンスが全レスポンスに対して支配的であり、たわみ・曲げモーメント・せん断力となるにつれて順次第 2, 3 次のモードをとれば全レスポンスの大部分をしめる。

⑤ 減衰はレスポンスの低減に大いに貢献する。平均速度スペクトルを使用した場合、 $\zeta=2\%$  のときは  $\zeta=0\%$  のときの 60~70% に、また  $\zeta=5\%$  のときは 40~50% に、また  $\zeta=10\%$  のときには 35% 前後にまでレスポンスを低下させる。この低下の度合いはたわみ・曲げモーメント・せん断力となるにつれて順次大きくなる。

⑥ つり橋タワーのように高くたわみやすい構造物においては  $(\bar{R}) = \sqrt{\sum (Maximum Modal Response)^2}$  によって、全レスポンスを計算するほうが  $(R) = \sum |Maximum Modal Response|$  によるよりも真の値により近い値を与える。

⑦ つり橋タワーを従来の震度法によって計算するのは合理的でない。 (1983. 7. 1・受付)

小西：正 員	工博	京都大学教授	工学部
山田：正 員	工博	京都大学教授	工学部
高岡：学生員	工修	京都大学大学院工学研究科博士課程	
国広：正 員		川崎重工業	KK

## 結合法による弾性支承を有する連続ばりの動的解析

平井 一 男

### 1. 緒 言

筆者は、結合法によってランガー桁橋や格子桁の動的解析ができることをすでに発表しているが、ここでは同様の手法によって、変位あるいは回転に対して抵抗を有する弾性支承上の連続ばりの固有振動数・振数モードを求めることについて述べる。一般に構造物の固有振動数・振動モードが求められたならば、その動的レスポンスは求めることができるから、この論文では、この両者を求めることについて述べる。

ここでいう弾性支承とは、変形に比例した抵抗を生じる支承であり、今後変位・回転に対して抵抗を有する支承をそれぞれ変位支承・回転支承と呼ぶことにする。この種の支承を持った連続ばりの動的解析はほとんど行なわれていないようである。ここに結合法と呼んだ解析法は、連続した1本のほりに、各支承を順次結合して基礎式を誘導する方法である。振動たわみ角法によって解析する場合には、はりを各スパンごとに切断し、その両端における変形と支承との連続条件を考慮して式を誘導するのに反し、上に述べた解析法によると、単に連結した1本のほりに支承を結合することのみを考慮して基礎式を誘導できるから、考え方が非常に簡明になる。このように1本のほりに支承を結合してゆくと、この解析法を結合法と名づけた次第である。またはりと全支承との結合は必ずしも同時に行なわなくてよいのであって、数値計算の可能な範囲において順次結合して解析を進めて行けばよい。特に支承が多い場合には、はり全体を適当なグループに分割し、各グループについて上述の解析を逐次行ない、最後にこれらの両端を結合して与えられた連続ばりに組み立てることも可能である。さらに、この解析法では振動モードが全スパンにわたり一つの式で与えられるので、走行荷重をうけるはりのレスポンスの数値計算が容易に行なうこと

のできる利点もある。

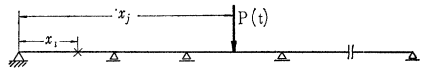
### 2. 理 論

ここで取り扱う集中荷重・モーメント荷重は、すべて定常周期的なものであるから、今後  $P_i \sin \omega t$ ,  $M_i \sin \omega t$  と書く代りに  $P_i$ ,  $M_i$  と略記する。

#### (1) 集中荷重をうけるはりのたわみとたわみ角

図-1 に示すはりに、集中荷重  $P(t) = P_0 \sin \omega t$  が作用するとき、そのたわみとたわみ角は式 (1), (2), (3) により与えられる。

図-1



$$V(x_i) = \sum_{m=1}^{\infty} v_m \dots \dots \dots (1)$$

$$v_m = \Omega_m \Phi_m(x=x_i) \Phi_m(x=x_j) P_0 \sin \omega t \dots \dots \dots (2)$$

$$\theta(x_i) = \sum_{m=1}^{\infty} \Omega_m \Phi_m'(x=x_i) \Phi_m(x=x_j) P_0 \sin \omega t \dots \dots \dots (3)$$

ここに、

$v_m$ :  $m$  次の振動モード  $\Phi_m(x)$  に対応する振動の大きさ

$\Omega_m$ :  $m$  次の固有振動数

$\Phi_m(x)$ :  $m$  次の振動モード

$\Phi_m'(x)$ : 正規化した  $m$  次の振動モード

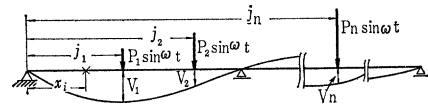
$x_i$ : 測定点の座標

$x_j$ : 荷重点の座標

$$\Omega_m = 1/(\omega_m^2 - \omega^2)$$

したがって、図-2 に示すように  $n$  個の強制周期力が作用する

図-2



とき荷重点のたわみ  $V_i$ , たわみ角  $\theta_i$  は次式により与えられる。

$$V_i = a_{i1}^P P_1 + a_{i2}^P P_2 + \dots + a_{in}^P P_n \dots \dots \dots (4)$$

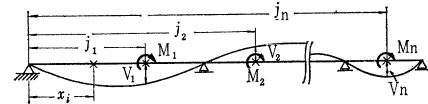
$$\theta_i = b_{i1}^P P_1 + b_{i2}^P P_2 + b_{in}^P P_n \dots \dots \dots (5)$$

$$a_{ij}^P = \sum_{m=1}^{\infty} \Omega_m \Phi_m(x_i) \Phi_m(j_j), \quad b_{ij}^P = \sum_{m=1}^{\infty} \Omega_m \Phi_m'(x_i) \Phi_m(j_j) \quad (i, j=1, 2, \dots, n)$$

#### (2) モーメント荷重をうけるはりのたわみとたわみ角

図-3 に示すように、 $n$  個のモーメント荷重をうけるはりの載荷点のたわみ  $V_i$ , たわみ角  $\theta_i$  は式 (6), (7) にて示される。

図-3



$$V_i = a_{i1}^M M_1 + a_{i2}^M M_2 + \dots + a_{in}^M M_n \dots \dots \dots (6)$$

$$\theta_i = b_{i1}^M M_1 + b_{i2}^M M_2 + b_{in}^M M_n \dots \dots \dots (7)$$

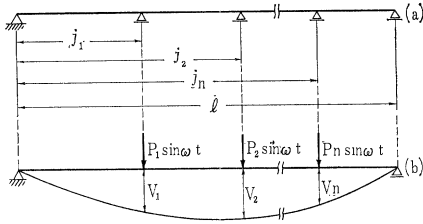
ただし、

$$a_{ij}^M = \sum_{m=1}^{\infty} \Omega_m \Phi_m(x_i) \Phi_m'(j_j), \quad b_{ij}^M = \sum_{m=1}^{\infty} \Omega_m \Phi_m'(x_i) \Phi_m'(j_j) \quad (i, j=1, 2, \dots, n)$$

#### (3) 連続ばりの自由振動

集中荷重またはモーメント荷重がはりに作用するとき、そのたわみまたはたわみ角は上述の方法によって求めることができ

図-4



るので、図-4 (a) に示す連続ばりの振動数方程式は、(b) 図を参考にして式 (8) により与えられる。

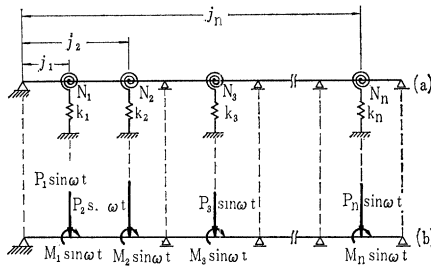
$$\begin{vmatrix} a_{11}^P & a_{12}^P & \dots & a_{1n}^P \\ a_{21}^P & a_{22}^P & \dots & a_{2n}^P \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}^P & a_{n2}^P & \dots & a_{nn}^P \end{vmatrix} = 0 \dots\dots\dots (8)$$

また振動モード  $\varphi_c(x)$  または  $\Phi_c(x)$ , ( $c=1,2,\dots,\infty$ ) は式 (8) より得られた固有振動数  $\omega_c$  をもととして決定できる。

(4) 弾性支承を有する連続ばりの自由振動

図-5 (a) に示す連続ばりを例にとって考える。この弾性支承は変位・回転ともに抵抗を有するものであり、その剛性を次式によりあらわす。

図-5



$$V_i = P_i^S / k_i = k_i' P_i^S \dots\dots\dots (9)$$

$$\theta_i = N_i M_i^S \dots\dots\dots (10)$$

まず (b) 図に示すように、弾性支承を取り除いた連続ばりの固有振動数  $\omega_c$ 、振動モード  $\Phi_c(x)$ , ( $c=1,2,\dots,\infty$ ) を (3) に述べた方法により決定し、この連続ばりに集中荷重  $P_i \sin \omega t$ 、モーメント荷重  $M_i \sin \omega t$  を弾性支承のあった点に作用させる。このとき、載荷点のたわみ  $V_i$ 、たわみ角  $\theta_i$  は式 (4)~(7) を使用するとつぎのように求められる。

$$\left. \begin{aligned} V_i &= a_{i1}^P P_1 + a_{i2}^P P_2 \\ &+ \dots a_{in}^P P_n + a_{i1}^M M_1 + a_{i2}^M M_2 + \dots a_{in}^M M_n \\ \theta_i &= b_{i1}^P P_1 + b_{i2}^P P_2 \\ &+ \dots b_{in}^P P_n + b_{i1}^M M_1 + b_{i2}^M M_2 + \dots b_{in}^M M_n \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

図-5 (b) の連続ばりに弾性支承を結合すれば与系が得られるがこれには変形を等しくする必要がある。これを式で表現すると式 (9)、(10) の変形と式 (11) の変形とを等置したことになる。またこのようにして弾性支承を結合した与系にはその結合点において、

$$\left. \begin{aligned} P_i + P_i^S &= p_i \\ M_i + M_i^S &= \alpha \theta_i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

なる外力が作用しているはずである。自由振動時には外力は 0 であるから、いまこの条件を式 (12) に入れ、これを式 (9)、(10) と式 (11) とを等置したものに代入することにより振動数方程式を得る。すなわち、

$$\begin{vmatrix} a_{11}^P & a_{12}^P & \dots & a_{1n}^P & a_{11}^M & a_{12}^M & \dots & a_{1n}^M \\ a_{21}^P & a_{22}^P & \dots & a_{2n}^P & a_{21}^M & a_{22}^M & \dots & a_{2n}^M \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}^P & a_{n2}^P & \dots & a_{nn}^P & a_{n1}^M & a_{n2}^M & \dots & a_{nn}^M \\ b_{11}^P & b_{12}^P & \dots & b_{1n}^P & b_{11}^M & b_{12}^M & \dots & b_{1n}^M \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1}^P & b_{n2}^P & \dots & b_{nn}^P & b_{n1}^M & b_{n2}^M & \dots & b_{nn}^M \end{vmatrix} = 0 \dots\dots (13)$$

ここに、

$$a_{ii} = a_{ii}^P + k_i', \quad b_{ii} = b_{ii}^M + N_i, \quad (i=1,2,\dots,n)$$

式 (13) より得られた固有振動数  $\omega_k$ , ( $k=1,2,\dots,\infty$ ) の値をもとにして振動モード  $\varphi_k(x)$  は容易に決定できる。

ここでは弾性支承・回転支承の条件を同時に満足させる方法をとったが、支承が多い場合には、変位・回転の条件を逐次満足させる方法をとることも可能である。(1963. 7.15・受付)

[筆者：正員 熊本大学助教授 工学部土木工学科]

つり橋ケーブルの水平反力簡易算定法

島田 静雄

両端単純に支持されたつり橋で、影響線解析法を具体的に数値計算すると、水平反力の影響線は厳密式の複雑さにもかかわらずほとんど放物線に近似できる。この性質を使って、水平反力の影響線を単位化した関数  $k(x)$  で与え、同時に、あるパラメータ  $cl$  の値のときの影響線面積に比例する係数  $N$  を定め、 $N$  と  $k(x)$  とを図表に示して計算の便に供した。

ケーブルの水平反力が、両端単純支持されたつり橋と、両端で拘束支持されたつり橋とでどの程度異なるかの比較は  $N$  の値で示した。また連続つり橋の計算のことを考えて、温度差、塔間隔の変化、支点モーメントの作用によるケーブル水平反力の計算式を示し、必要な数表を付した。(1963. 2.22・受付)

[筆者：正員 工博 名古屋大学助教授 工学部]

土砂をふくんだ洪水流の二、三の特性について

神月 隆一

従来洪水の問題を純水理学的立場から取扱った例は多いが、実際の洪水流中には、これによって浮遊させられた土砂や掃流土砂などの存在によってかなり複雑な様相をているのではないと思われる。特に土砂の影響を洪水流中に考慮するにあたっては、河床の移動にともなう河床の変化、ふくまれた土砂を浮遊させるための余分のエネルギーが水流から与えられなければならないこと、浮遊土砂の沈殿の影響、いわゆる粗度係数の変化の問題などが取りあげられるであろう。

このような各種の影響を考慮した問題は非常に複雑さをもっており完全なる解を得ることはほとんど不可能であるが、幾分でもこの問題について理論的な接近を試みたものである。

問題をとり扱いやすくする目的をもって、つぎの仮定を設けた。

- 1) 河床は一樣な粒子の土砂から成り立っている。
- 2) 河幅は一樣であって、かつ洪水前の河床勾配は一樣であるとする。
- 3) 水深に比して河幅は十分に広い長方形断面とする。
- 4) 浮遊土砂の流速と同じであるとする。
- 5) 流速の水深方向の速度分布は一樣であるとする。

6) 単位時間、単位面積当りの掃流、浮遊土砂量を  $q_T$  とすると、河川の流れの方向  $dx$  区間において単位時間、単位幅当り浮上する土砂量は、 $\frac{\partial q_T}{\partial x} \cdot dx$  であると仮定する。

7) 浮遊土砂を浮遊させておく以外の仕事、たとえば水波、砂れんなどに必要な仕事量を無視する。

以上の仮定のほかに、実際に式を展開するに当っては水深の流れ方向の変化に比して、河床の流れ方向の変化はさしていちじるしくはく無視しても差しつかえないものと考えて式の取り扱い方を簡単化することとした。

以上の仮定をもととして、1) 運動の方程式、2) 浮遊土砂の連続条件、3) 水の連続条件、4) 沈降する土砂に関する方程式、5) 河床変動に関する連続条件、の5つの方程式を立てて検討を行なった。

その結果、今まで洪水流の検討のときによくとられて来たように、加速度を表わす  $\frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2g} \frac{\partial u^2}{\partial x}$  の項を無視することによって、平均流速は、

$$u = \frac{\mu_0}{\sqrt{2}} \cdot \frac{C_s}{C_0} \sqrt{1 + \sqrt{1 - \frac{4\mu C_s^2}{\mu_0^4} \cdot q_T \left( \frac{C_0}{C_s} \right)^4}}$$

として近似的に表わされることが確かめられた。ここで  $\mu_0$  は土砂が混入しないときの Chézy の形式で表わした平均流速であり、このときの平均流速係数を  $C_0$  とし、 $C_s$  は土砂が混入した時の Chézy の平均流速係数を表わしており、 $\mu$  は、浮遊砂の比重に関する係数  $\mu = \frac{\rho_s - \rho_w}{\rho_w} \cdot \omega_0$ 、 $\omega_0$  は浮遊砂の静水中における沈降速度である。もちろん  $\mu_0$  は  $\mu_0 = C_0 \sqrt{H \left( i_0 - \frac{\partial H}{\partial x} \right)}$  の形で表現することができる。

筆者はさらに上式で示された平均流速の表現から、 $q_T$  にはある条件があって、ある勾配、流量、土砂の種類などによって、ある値以上にはなることができないことを判断し、 $C_0 = C_s$  と考えると、

$$q_T \leq \mu_0^4 / 4 \mu C_s^2$$

がその限度であろうことを類推した。このようにして得られた  $q_T$  を、かつてアインシュタインの求めた全土砂移動量  $q_T$  と比較するために、一例について ( $2 d/H = 4 \times 10^{-8}$ 、 $\omega_0 d/\nu = 10$  の場合)、数値を代入して調べてみたが、その結果は傾向がよくにていることを確かめることができた (この比較に当っては、 $C_s$  の値に、過去の実験から得られたものを使用した)。

これに引きつづいて、洪水流の波速について検討を加えたが、波速について検討すべき式は、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \cdot H \left[ \frac{\partial q_T}{\partial x} - \left( \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial Hu}{\partial x} \right) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial x} Hu \left[ \frac{\partial q_T}{\partial x} - \left( \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H\mu}{\partial x} \right) \right] \\ & = \omega_0 \left( \frac{\partial}{\partial t} H + \frac{\partial}{\partial x} Hu - \frac{\partial q_T}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

として得られた。

上記方程式を、若干の近似的表現によって集約し、簡単化することによって、整理して得られた波速は、

$$\omega = \frac{3}{2} \mu - \frac{\mu}{2H} \frac{\partial q_T}{\partial \mu}$$

という形で求めることができた。この計算の遂行に当っては、便宜上、Chézy の平均流速係数  $C$  を一定と見なして行ない、平均流速公式として Chézy の形を選んだ。通常、河床において掃流がなく、浮遊土砂もないときには、周知の洪水流方程式から得られる波速は、 $\omega' = -\frac{\partial H}{\partial t} / \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{3}{2} \mu$  であるから、これと比較すれば、土砂の混入を考えるとときには、若干波速に対して

修正を要するのではないかと示した。

最後にかかる論議を遂行する上に非常に大きな役割を果たす平均流速係数は、浮遊砂があるときにはかなり様相を異にするものであるから、この面からも検討を加える必要があるものとして、若干この方についても検討を行なって、定常常態において流れに土砂がふくまれた場合についての平均流速係数について考察を加えずで公表されている Vanoni や Ismail の実験値との結果を比較した。

(1963. 4. 5・受付)

[筆者：正員 関西電力 KK 建設部土木課]

## ゲートの空気吸込みに関する一考察

中島康吉・巻幡敏秋

本文はゲートの空気吸込みに関する従来の実験式と著者らが実験した模型実験および入手し得た実物実験の結果などと十分の一致が認められなかったので、本論文はトンネル内の流水面に発達する境界層にもとづく空気吸込現象を考え理論的な考察を加え実験値との比較を行なった。

### 1. 理論的考察

#### (1) 大気内の拡散現象

空気管の入口と空気管出口(ゲート室)とにおける圧力降下が無ずかでゲート室の気圧がほぼ大気圧に等しいと考えられる場合には放水路トンネル内の空気は非圧縮性流体、すなわち大気と同様な取り扱いができるので大気の運動方程式が成立する。

大気の運動方程式を放水路トンネル内の空気流の現象に適用するため、2次元を考える。流水面からあまり大きく離れていない距離のところでは空気の乱れは統計的に等方性になっていることが G.I. Taylor によって見い出されている。

この場合運動方程式は、次式に示しているように2次元の Navier-Stokes の方程式、すなわち層流境界層内における運動方程式と同形になる。したがって得られる解は形式的には層流境界層の解とまったく一致する。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho_a} \frac{\partial p}{\partial x} + K \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho_a} \frac{\partial p}{\partial y} + K \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots(2)$$

ここに  $u, v$  は  $x, y$  軸方向の分速度、 $\rho_a$  は空気の密度、 $K$  はうず(渦)動粘性係数で  $K = K_x = K_y$  である。なお簡単にするため地球の自転によって流体に働く Coriolis の力は省略している。

流水面を  $x$ 、その鉛直方向を  $y$  としてトンネル内の流水表面を  $U$  なる理論流速で動いている平板と考えると流水面の空気は粘性のために流水面の流速と同一になろうとする現象(運動量の拡散)が起こり流水面上の空気は  $u'$  の速度で運び去られることになる。またこの現象と同時に流水面は固体の平板でなく相当量の水の飛まつが流水面上の空気流に拡散されている。この拡散が空気の拡散に支配されているものとするれば空気の流速分布と同様に水の飛まつ濃度分布に境界層理論の解を適用することができる。この拡散において空気による水の拡散と水による空気の拡散とが同程度であると考えると運び去られる理論空気量  $Q_a$  は次式によって与えられる。

$$Q_a = B \left\{ \int_0^\delta (-\sigma) u' dy + \int_0^\delta \sigma u' dy \right\} \dots \dots \dots (3)$$

ここに、 $B$ :放水路の幅、 $\delta$ : $x=L$ ,すなわちトンネルの出口における境界層の厚さ、 $\sigma$ :単位体積中にふくまれる水の飛まつ濃度で、単位体積中にふくまれる空気は $1-\sigma$ になる。

ところが境界層理論から求められる $\delta$ よりもトンネル高さが小さい場合は、

$$Q_a = B \left\{ \int_0^\phi (1-\sigma) u' dy + \int_0^\phi \sigma u' dy \right\} (\delta > \phi) \dots \dots (4)$$

で近似的に空気量が与えられるものとする。ここに $\phi = S - S_0$ で $S_0$ はトンネルの高さである。

層流境界層内の流速分布 $u$ は一般に $u = Uf(\eta) = U(2\eta - \eta^2)$ なる値が採用されている。ただし $\eta = y/\delta$ である。この場合は逆に静止流体中を平板が運動する場合を考えているから $u' = U - u$ となる。また水の濃度も同じ式で表わされるから $u', \sigma$ は次式となる。

$$u' = U(1 - 2\eta + \eta^2), \sigma = 1 - 2\eta + \eta^2 \dots \dots \dots (5)$$

つぎに理論流量は $Q_w = U \cdot S \cdot B$ として示される関係から理論空気比 $\beta$ は次式となる。式(3)から、

$$\beta = \frac{Q_a}{Q_w} = \frac{1}{SU} \int_0^\delta u' dy \dots \dots \dots (6)$$

式(6)に式(5)を代入して $\eta$ の関数に置き換えると、

$$\beta = \frac{\delta}{S} \left\{ \int_0^1 (1 - 2\eta + \eta^2) d\eta \right\} = A \frac{L}{S} R_K^{-1/2} \dots \dots (7)$$

式(4)からは同様に、

$$\beta = \frac{\delta}{S} \left\{ \int_0^{\phi/\delta} (1 - 2\eta + \eta^2) d\eta \right\} = A' \frac{L}{S} R_K^{-1/2} \dots (8)$$

となる。ここに $L$ は放水路トンネルの高さ、 $R_K$ はラズ動粘性係数を用いたレイノルズ数 $R_K = \frac{UL}{\nu}$ 、 $A, A'$ は層流境界層内の流速分布を積分することによって得られる係数で $A=1.83$ となる。

## (2) 境流の拡散現象

ゲートから流出する水流を噴流と考え、流水の境界面を $x$ 軸、その鉛直方向に $y$ 軸をとり流出水と放水路トンネル内の静止流体(空気)とが接触し始める点(ゲート設置箇所)を原点とする。二つの流体が接触するところには流出水の水速 $U$ より0に移り変わる層ができ、流速の速いものと遅いものとが入り混じる。いわゆる拡散現象をともなう層ができ、この拡散層の幅は下流に向い次第に増大する。その結果流水境界面にある空気の一部は流れに誘引されるので、静止流体の部分には $U$ にくらべて小さいが $y$ 軸方向の流れが生ずる。この流れが空気吸込みの原因となる。一般に噴流の運動方程式と連続の式はつぎのように与えられる。

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho_w} \frac{\partial \tau}{\partial y} \dots \dots \dots (9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \dots \dots \dots (10)$$

式(9)における乱流せん断応力 $\tau$ はPrandtlの混合距離を用い従来の噴流理論を適用すれば、次式のようになる。なお、 $\frac{1}{2} c^2 x^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|$ は前節に用いた拡散係数 $K$ と同じ性質のものであるから、これを定数 $K'$ としても取り扱うことも考えられるが、ここでは従来の噴流理論をそのまま適用している。

$$\tau = \frac{1}{2} \rho_w c^2 x^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \dots \dots \dots (11)$$

ここに、 $u, v$ : $x, y$ 軸方向の流速、 $\rho_w$ :水の密度、 $\tau$ :乱流せん断応力、 $c$ :拡散幅を定義する定数である。

$u, v$ を求めるために流れ関数 $\psi$ をつぎのように定義する。

$$\psi = \int u dy = Ux \int f(\xi) d\xi = Ux F(\xi) \dots \dots \dots (12)$$

ここに、 $U$ :流出水の一様流速である。式(12)から $u, v$ はそれぞれ、

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = U F'(\xi), v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = U \{ \xi F'(\xi) - F(\xi) \} \dots (13)$$

として算出できる。

式(11)の $\tau$ を $\xi$ の関数に置き換えると、

$$\tau = \frac{1}{2} \rho_w c^2 x^2 U^2 F''^2(\xi) \dots \dots \dots (14)$$

となり、式(13)から求められる $\partial u/\partial x, \partial u/\partial y$ および式(14)から誘導される $\partial \tau/\partial y$ を式(9)に代入して噴流の境界条件を与えることによって $F(\xi), \{F'(\xi)\}$ が求まる。すなわち、

$$F(\xi) = c_1 e^{-\alpha \xi} + c_2 e^{\alpha \xi/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \alpha \xi + c_3 e^{\alpha \xi/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \alpha \xi \dots \dots \dots (15)$$

$$F'(\xi) = -c_1 \alpha e^{-\alpha \xi} + c_2 \alpha e^{\alpha \xi/2} \cos \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \alpha \xi + \tan^{-1} \sqrt{3} \right) + c_3 \alpha e^{\alpha \xi/2} \sin \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \alpha \xi + \tan^{-1} \sqrt{3} \right) \dots \dots (16)$$

となる。 $c_1, c_2, c_3, \alpha$ 値を示せばそれぞれ $c_1 = -0.0062, c_2 = 0.987, c_3 = 0.577$ および $\alpha = 11.8$ である。また式(11)に示した $c$ は実験の結果によれば $c = 0.255$ となっている。

つぎに噴流にともなう水の飛まつ濃度分布であるが、ここで水の飛まつ濃度分布は噴流の拡散に支配されているものとすれば、噴流の流速分布を求めたと同様に噴流理論の解を適用することができる。単位体積中の濃度 $\sigma$ は次式のようになる。

$$\sigma = F'(\zeta) = -\frac{c_1 \alpha c}{2} e^{-\frac{\alpha c}{2} \zeta} + \frac{c_2 \alpha c}{2} e^{\frac{\alpha c}{4} \zeta} \cos \left( \frac{\sqrt{3}}{4} \alpha c \zeta + \tan^{-1} \sqrt{3} \right) + \frac{c_3 \alpha c}{2} e^{\frac{\alpha c}{4} \zeta} \sin \left( \frac{\sqrt{3}}{4} \alpha c \zeta + \tan^{-1} \sqrt{3} \right) \dots \dots (17)$$

ここに、 $\zeta = \frac{2\xi}{c}$ であり、単位体積中にふくまれる空気は $1-\sigma$ となるから、噴流の拡散によって運び去られる理論空気量 $Q_a$ は次式で与えられる。

$$Q_a = \int_{-b/2}^{b/2} u(1-\sigma) dy \dots \dots \dots (18)$$

式(18)での積分の上限、下限は従来の噴流理論による水面を境界としての対称拡散幅であり、空気吸込量を求める場合はちょうど放水路トンネルの頂部の壁に噴流が接触する際の拡散幅を採用すべきである。特に下限境界がトンネル底面に達する場合は $-b/2$ の採用はできなくなり、ゲート開き $S$ となる。このようなゲート開きでは下限境界が底面に達しているため噴流の一様流速 $U$ は境界層内の流速となり、下流に向うにしたがって次第に減少する。そこで簡単化のためにトンネル底面に発達する境界層を省略し、噴流の中心をトンネル底面と考えて、トンネル底面での流速としての条件を満足する関係式として簡単に $U_c = (S/\phi)U$ ( $\phi = S_0 - S, S_0$ はトンネル高さ、 $S$ はゲート開きである)とおく。すると式(18)はゲート開きが $S < \frac{S_0}{2}$ か $S > \frac{S_0}{2}$ かによってそれぞれつぎのように表わされる。

$$S < \frac{S_0}{2} \text{ の場合は, } Q_a = B \int_{-S}^{b/2} u^*(1-\sigma^*) dy \dots \dots \dots (19)$$

ここに、 $u^* = U_c F'(\xi), \sigma^* = \frac{U_c}{U} \sigma$ である。

$S > \frac{S_0}{2}$  の場合は式 (18) がそのまま適用できる。

式 (19), 式 (18) を  $\zeta$  の関係で置き換えるときのようになる。

$$Q_a = \frac{b}{2} BU_c \int_{-2S/b}^{b/2} F'(\zeta) \left\{ 1 - \frac{U_c}{U} F'(\zeta) \right\} d\zeta$$

$$= SBU \int_{-S/\phi}^{b/2} F'(\zeta) \left\{ 1 - \frac{S}{\phi} F'(\zeta) \right\} d\zeta \dots \dots \dots (20)$$

$$Q_a = \frac{b}{2} BU \int_{-b/2}^{b/2} F'(\zeta) \{ 1 - F'(\zeta) \} d\zeta = 0.25 \phi BU \dots \dots (21)$$

ここに、 $B$ :放水路トンネルの幅、 $b=2\phi(\phi=S_0-S)$  である。

つきに理論流量は  $Q_w=S \cdot B \cdot U$  として表わされるので、理論空気比  $\beta$  はそれぞれつぎのようになる。

$$\beta = \frac{Q_a}{Q_w} = \int_{-S/\phi}^1 F'(\zeta) \left\{ 1 - \frac{S}{\phi} F'(\zeta) \right\} d\zeta \quad S < \frac{S_0}{2} \dots \dots \dots (22)$$

$$\beta = \frac{Q_a}{Q_w} = 0.25 \frac{\phi}{S} \dots \dots \dots (23)$$

## 2. 実験値との比較

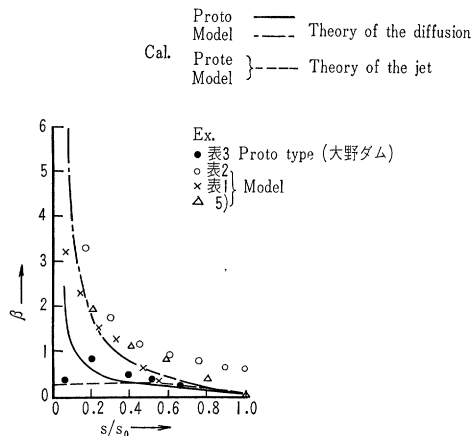
式 (7) を用いて実験値を整理し  $K$  を求めてみると、模型では  $6.44 \sim 9.07 \times 10^{-3} \text{m}^2/\text{sec}$ 、実物では  $9.45 \times 10^{-2} \text{m}^2/\text{sec}$  が得られる。Richardson は多くの測定値を整理した結果大気のうち動粘性係数  $K$  を現象の大きさ  $D$  との間に  $K=0.2 \sim 0.6 D^{4/3} \text{cm}^2/\text{s}$  なる関係を見出ししている。また Sutton は  $K \propto t^{3/4}$  なる関係を半実験的に求めている。

ただし、 $t$ : 拡散現象の行なわれる時間であり、 $t$  と物体の大きさは比例すると考えられるので Richardson の式も Sutton の式も互いに似かよった関係を示すものといえよう。本研究で得られた  $K$  値は Sutton が導き出している関係にあった。Sutton の式を  $K=\alpha D^{3/4}$  と置き換えて実験結果から  $\alpha$  を求めてみると  $\alpha=8$  が得られる。ゆえに放水路トンネル内における大気のうち動粘性係数  $K$  は一応模型、実物に対して  $K=8 D^{3/4}$  の式で推定できるようである。

実物実験および模型実験について式 (7),(8),(22),(23) から理論空気比  $\beta$  を計算し、実験値の空気比  $\beta^*$  と比較したのが 図一である。実線と鎖線は式 (7),(8) によったものでそれぞれ実物模型についてのものである。点線は式 (22),(23) によったものである。

$\beta$  と  $\beta^*$  との関係は理論空気比の式からわかるように  $\beta^*=\beta/c_e$  と表わされる。図中での計算値と実験値との相違は  $1/c_e$  の差となり、縮流係数  $c_e$  の小さいような流れとなるゲートではその差

図一  $\beta \sim S/S_0$  との関係



が大きく現われている。

図からわかるように計算値と実験値との間にはなおその差が認められるが、傾向としてはよく一致しているので、理論式の近似度を考慮すれば本論文で試みた考察は妥当であるといえる。

(1963. 8.31 受付)

中島: 工博 日立造船 KK 技術研究所  
 巻幡: 正員 日立造船 KK 技術研究所

## 人工粗度の実験的研究

足立 昭 平

種々の人工粗度が自然粗面の思考的モデルとして、あるいは水路とくに固定床模型実験における流水抵抗を制御する手段として、古くから用いられてきている。しかしながら、人工粗度の様式選定についてはいままお個々の経験にゆだねられているといつてよい。本研究では人工粗度の様式の差異がもたらす粗度効果の変化を明らかにすることに主眼をおき、線状の粗度要素をもつ2様式と点状の粗度要素をもつ一様式の計3つの様式について実験的考察を行なった。

実験に用いた水路は幅 20 cm、長さ 14.4 m、勾配 1/500 の鋼製水路であるが、まず高さ 5 mm、厚さ 6.4 m の長方形断面の栓棒を用いた線状粗度によって流れの形態を吟味した。この最初の実験によって、粗度間隔が大きい場合の抵抗係数が Nikuradse の砂粒粗度のそれと性状を異にし、その相当砂粒粗度が一定でなく水深とともに変化することが見出された。このような場合の流れでは、各粗度要素上で速度分布が変形しており、その流水抵抗は粗度要素間隔についての平均値として考慮しなければならぬ。Morris の分類によれば、粗面上の流れは、孤立粗度流、後流干渉流およびすべり流れに分類されるが、上記の流れはあとで測定された粗度要素の圧力抗力係数の値からそのうちの後流干渉流に属するといつてよい。相当砂粒粗度は、等面の流水抵抗をもつような Nikuradse の砂粒粗度の砂粒径あるいは間隔  $k_s$  として定義されるが、別の見地からすれば、Nikuradse の  $k_s$  は砂粒に関する尺度ではなくて、その粗度要素に強制されるうずが構成する壁面領域に関する尺度であると解釈できよう。こうした解釈にもつづけば、上記の流れについて相当砂粒粗度の値が水深とともに変化することはむしろ当然であるといつてもよいであろう。したがって、線状粗度に関する後流干渉流には砂粒粗度に代表されるものと、されないものとの2通りを考えねばならぬ。前者は完全干渉流、後者は不完全干渉流ともいうべきであろう。

流れの分類に関連して、いま一つの問題は粗面の基面である。1本の棧によって生ずる孤立粗度流の場合には、水路底面と棧全高が流水抵抗に寄与するわけであるからその基面は水路底面にとるべきであり、粗度要素は棧であるといつてよい。これに反して、同じ棧を非常に密に並べる場合には、水路底面と棧高はもはや重要でなく、その抵抗は、棧頂面の粗さとそのすき間における流体のせん断応力に決定づけられるから、その基面は棧の頂面にとるべきであって、粗度要素は溝であるといえよう。このように基面の位置は、その粗度要素の機能が棧であるか溝であるかによって決定されねばならぬ。棧のうける圧力抗力係数はこうした機能を見出す一つの指標であろう。

中空の真鍮棒の前後面にそれぞれ4個の小孔をあけて線状粗度要素のうける圧力抗力の測定を試みた。各粗度間隔について測定された抗力係数は、水深によって変化するが、そのプロッ

トは両対数紙上でほぼ平行な直線に並び、 $s/k=160$  ( $s$  は棧間隔、 $k$  は棧高)の値は、 $s/k=\infty$  すなわち孤立状態のそれに一致した。それぞれの有効高を考慮して各抗力係数の値を補正すれば、孤立状態における値に一致するものと仮定して、各棧間隔に対する有効高  $k_e$  を算出した結果は次表のようであった。

$s/k$	160	80	40	20	10	5	2.5
$k_e/k$	1.00	0.96	0.85	0.74	0.61	0.22	0

これらの値は棧から溝への遷移を表わしている。そして、 $k_e/k=0.5$  すなわち  $s/k=8$  のときこの粗度要素は棧と溝の性格を同じようにもっているといつてよいであろう。この  $s/k=8$  の値は最初の実験において、最大抵抗を生ずる条件にも対応している。すなわち、 $s/k>8$  の場合には、棧間隔を小さくすればするほど流水抵抗は増すが、 $s/k<8$  の場合には逆に減少する。この点は棧相互の遮へい効果としても容易に理解できよう。さらに、この値は、不完全干渉流への遷移にも対応している。

棧と溝との限界を二者択一的に定め、基面を棧の底面か頂面かのいずれかに決めてしまうことは厳密ではないが、実際上便利である。少なくとも同種の粗度に対して、 $s/k=8$  という条件はこうした便宜的基準であろう。

以上の考察にもとづいて、3種の人工粗度の抵抗則について、それぞれの実験公式を導いた結果はつぎのようである。

1) 棧型粗度：この場合、壁面領域の挙動に関する主要素は水深  $H$ 、棧高  $k$ 、棧幅  $t$  および棧間隔  $s$  であろう。相当砂粒粗度  $k_s$  とこれらの要素との間に指数関数を仮定して、実験値を整理した結果は、次式のようである。

$$k_s/k=30 m (H/k)^{-0.9}$$

ここに、

$$m=0.79(s/k)^{-0.26}$$

$$\theta=0.02(s/k)^{0.8}$$

ただし、本実験では  $t$  は一定であつて  $t/k=1.3$  である。これを二次元流に関する対数抵抗則に代入すれば、

$$U/U_* = 1.50 \log_{10}(s/k) - 19.1 + \{5.75 + 0.12(s/k)^{0.8}\} \log_{10}(H/k)$$

となる。この棧型粗度に関する実験式は不完全干渉流に対応し、その適用限界は  $8 < s/k < 160$  である。

2) 溝型粗度：この場合、溝幅  $b$  が重要な要素と考えられるが、流れが溝上をすべり流れになるまでは、溝深  $k$  もま

た要素の一つとして残されるべきであろう。実験結果は、

$$k_s/k=10(s/b)^{-0.8}$$

で表わされ、二次元流に関する抵抗係数は、

$$U/U_* = 0.25 + 19.0 \log_{10}(s/b) + 5.75 \log(H/k)$$

この溝型粗度に関する実験式は完全干渉流に対応する。しかしながら、

$$s/b = (s/k)/(b/k) \text{ あるいは } (s/k)/\{(s/k)-(t/k)\}$$

であるから、厳密には溝と棧との分類には溝あるいは棧の形状係数である  $b/k$  あるいは  $t/k$  も考慮されねばならぬ。さらに、 $s/b$  の値が非常に大きくなれば、流れは後流干渉流からすべり流れへ遷移し、その抵抗は溝要素よりもむしろ頂面の粗度に決定づけられるであろう。これらの点については、なお将来の研究にまたねばならないが、本実験の範囲  $t/k=1.3$ 、 $s/b<2.6$  が実験式の適用範囲の目安となるであろう。

3) イボ型粗度：異種の粗度要素の一例として  $5 \text{ mm} \times 5 \text{ mm} \times 6.4 \text{ mm}$  の点状粗度要素についても実験を行なった。この場合、棧型粗度における  $s/k$  に対応するパラメーターは、粗度要素1個あたりの壁面積  $S$  と粗度要素の流れへの投影面積  $F$  との比である。棧型粗度の場合と全く同様の整理をして、

$$k_s/k=9.8(S/F)^{-0.94}(H/k)^{0.84}$$

$$U/U_* = 10.6 \log_{10}(H/k) + 5.4 \log_{10}(S/F) - 5.47$$

が得られた。この実験範囲は  $9.7 < S/F < 310$  であつて、上式に示されるように、その相当砂粒粗度は水深によって変化し、砂粒粗度と特性を異にしている。点状粗度要素の抗力係数が同断面の線状のそれよりも一般に小さいと考えられることから、この種の粗度は棧型粗度よりもさらに不完全干渉流もしくは孤立粗度流を生じやすいものと推察される。しかし、線状粗度要素の場合と同様に、粗度要素の形状とくに流れの方向の粗度要素の厚さの効果については、なお決定的資数が得られていないから、本実験式の適用は一応立方体に近い粗度要素が比較的疎に配置されている場合に限定される。

以上、流れの形態を考慮して人工粗度の様式を論じ、その実用的な基面を定め、3種の様式についての実験式を導いた。なお将来の研究にまつべき問題は多いけれども、本研究は、粗度の様式を系統的に分類し、それぞれの抵抗特性を論ずるうえに一つの指針となるであろう。

(1963.10.29 受付)

[筆者：正員 工博 名古屋大学教授 工学部]

## 土木製図基準(I)領布について

昭和28年に制定された土木製図基準は長い間品切れとなり、いろいろご迷惑をかけておりましたが、関係各位の強い要望により一部図面を追加した改訂版ができ上りましたのでご希望の方は学会へお申込み下さい。なお、製本費値上りによりやむを得ず定価を改定しましたのでご了承下さい。

体 裁：B5判 本文46ページ 付図11枚

内 容：第1編 総則 第2編 鋼構造 第3編 鉄筋コンクリート構造 付録 製図の書き方(製図用器具材料とその使い方)

定 価：250円 (〒50円)

訂正表：第49巻3号のグラビアページのうち「境大橋・関宿橋完成」の説明がまちがっておりましたのでお詫びして訂正致します。

正 下が 関宿橋 上が 境大橋

誤 下が 境大橋 上が 関宿橋