

# 土のせん断強さ

—その解説と研究の展望—

星 埜 和\*

## 1. はじめに

ひろく一般に構築材料が外部から加えられた力に抵抗して変形し破壊するまでの過程と、それにとまういろいろな現象は、材料の力学的性質としてもっとも基本的でかつ重要な問題であるが、多くの骨の折れる研究が積み重ねられてきたにもかかわらず、なおその本質は不明なままに残された点が少ない。特に土のような固体粒子の集合体を骨格として、そのまわりが水と空気、あるいはガスのような液体・気体によって包まれている三相系からなる材料の変形と破壊に関する力学的基本性質はきわめて複雑なものであって、解明のむずかしい多くの要素をふくんでいる。最近の研究はゆっくりながらかなり着実に進んできたように思われる。以下にこの分野を展望し、筆者の見解を加えながら解説を試みることにしたい。

## 2. せん断強さとは何か

材料に加えられる外力には引張力、圧縮力、せん断力などいろいろな形や方向があるが、材料の力学的性質を論ずるときに、これらの外力によって物体内部に生ずる応力という概念を導びいて、破壊するときの材料の強さを応力の大ききで表わし、また変形量から導びかれるひずみを計算して、応力とひずみの関係を解明してゆく方法は一般に広く認められ、実際に用いられている。

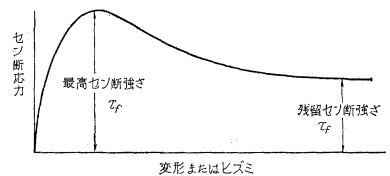
外力をうけた物体内部の一点をとおる任意の面を考えると、普通その面上に生じている応力は面とある傾きをなした方向に作用しており、これを面に垂直な直応力と面に平行なせん断応力にわけることができ、破壊を支配する応力はおもにせん断応力であることが認められているが、土のような材料では直応力が増すとせん断に対する抵抗が大きくなることも知られている。

ある土の破壊条件はせん断強さと普通いわれている極限のせん断応力で表わされるか、あるいは主応力の関数として表わされる。土のせん断強さを  $\tau_f$  とすると、これは破壊時における破壊面上のせん断応力であると定義されている。たとえば直接型のせん断試験ではせん断箱

\* 正員 工博 東京大学教授 生産技術研究所

の固定部と可動部の境界面は強制的な破壊面であると考えられ、この面の応力と変位の関係は

図一1 せん断応力変形図



図一1に示すようなはっきりした頂点を示し、このせん断応力のもっとも大きい値がせん断強さの大ききを与えらるものとされている。この応力変形(ひずみ)曲線の形は荷重のかけ方、変位速度排水条件などによって変わるものであるが、古くから知られ今日もおおく用いられているせん断強さの公式はクーロンの破壊法則として

$$\tau_f = c + \sigma_f \tan \phi \dots \dots \dots (1)$$

の式で与えられ、式中の  $\sigma_f$  はせん断破壊面上の直応力で、 $c$  は粘着力、 $\phi$  は内部摩擦角とよばれてきた。この公式はきわめて簡明なものであるが、 $c$  および  $\phi$  は多くの要素に支配されて広い範囲に変換することが明らかになり、したがって式(1)はその中の係数  $c$ 、 $\phi$  を求めたときと条件が同じでなければ適用できないものである。今日では、 $c$ 、 $\phi$  ともに物理的な意味での粘着性や内部摩擦とはかなりかけはなれた実験定数にすぎないと考えられるようになってきており、これらを見かけの粘着力とかみかけの内部摩擦とよぶことさえもさけて、破壊線が縦軸を切る点の高さとか、みかけのせん断抵抗角と注意深くよばれるようになってきている。

テルツアギは土の強さ、および変形が外力による全応力ではなく有効応力によって支配されるという基本的な考え方を初めて思いついたのであるが、破壊時における全直応力  $\sigma_f$  から間げき水圧  $u$  をひいた差を有効直応力  $\sigma_f'$ 、すなわち

$$\sigma_f' = \sigma_f - u$$

とすると、式(1)はつぎのようになる。

$$\tau_f = c' + \sigma_f' \tan \phi' \dots \dots \dots (2)$$

間げき水圧  $u$  は完全な排水条件下の試験では0となる。ただし、上の関係は厳密にいうと完全な飽和土に対してのみ正しく適用できるものであって、不飽和土の場合は間げき水圧のほかに間げき中の空気と水の境界に働らく

表面張力のような内部的応力がせん断強さに影響を与える。

われわれが実測する間引き水圧は土の固体粒子のまわりにある自由水の圧力であって、粘土のまわりに固着している水分のそれではない。有効応力という考え方もなかば経験的なものにすぎない点は従来とあまり変わる所がないにしても、上式(2)の妥当性は多くの室内実験と野外観測によって確かめられており、今日広く認められている。

以上のようなせん断強さに関する公式を実験によって導びく際に、たとえばせん断応力が最大となる頂点の付近でせん断面上の破壊は一樣に進んでいるとは限らず、ある部分ではまだ破壊に達していないが、他の部分ではすでに破壊が終っているといた状態がありうるし、応力の分布もせん断面上に均等に分布しているとは考えられない。したがって、上の式中にふくまれる応力の値はどこまでも破壊面上の平均的なものであることを忘れてはならないので、のちに破壊時のひずみや体積変化、間引き水圧などを考えるときも、破壊面におけるこれらの値を実験的に求めることは今日でもきわめてむずかしい問題であって、ある種の平均値あるいは推定値を求めているにすぎないことが多く、破壊面とそれに接する部分では全く不連続な現象が起こっていると考えた方がよいと思われる。

### 3. 圧密された土のせん断強さ

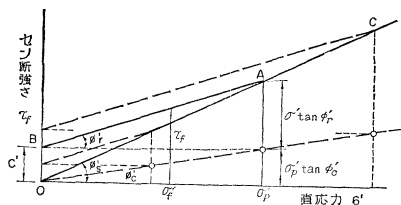
自然の地層を構成する土は生成の過程において事前に圧密をうけていると考えられるので、圧密をうけた土のせん断強さはきわめて重要なものである。

土をいったんよくねり返してから外圧力を加えて圧密した(いわゆる正規な圧密をした)飽和土のせん断強さは、有効直応力に対して 図-2 の直線 OAC で示すように、原点を通る直線で与えられ、図中の符号を用いると  $\phi' = \phi'_s$ ,  $c' = 0$  である。図中の直線 BA は圧力  $\sigma'_p$  で事前に圧密された同じ土のせん断強さを示し、 $\phi = \phi'_r$  である。土をさらに、大きな外圧力で圧密すると BA に平行したせん断強さを示す直線がえられ、 $c'$  は  $\sigma'_p$  に比例する関係があることがわかる。すなわち

$$c' = \sigma'_p \tan \phi'_c$$

したがって式(2)は

図-2 クーロンせん断強さ図



$$\tau_f = \sigma'_p \tan \phi'_c + \sigma'_f \tan \phi'_r \dots \dots \dots (3)$$

と書き改められ、正規な圧密をうけた上では  $\sigma'_p = \sigma'_f$  であるから、

$$\tau_f = \sigma'_f \tan \phi'_c + \sigma'_f \tan \phi'_r \dots \dots \dots (4)$$

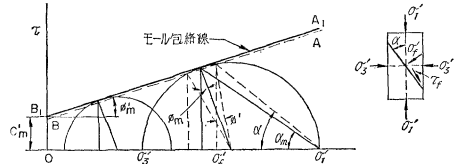
となる。この関係は過度に圧密をうけた土のせん断強さの近似値を与えるにすぎないのであって、クライ・ティディマンの破壊公式といわれている。実際に圧密された土が外圧力のくりかえしをうけたときせん断強さの変化はヒステリシスを画き直線からかなりずれていることが知られている。

### 4. 三軸応力と極限強さ

上に述べたような結果は主として直接型のせん断試験結果から得られたものである。今日、広く一般に用いられている三軸試験の結果は直接的に供試体に加わる軸方向応力  $\sigma_a$  と、これに直角方向の半径方向応力  $\sigma_r$  という2つの主応力間の関係で表わされるものであって、これにモールの応力円を組み合わせることによって直接せん断試験結果と対比されている。

図-3 に示すようなよく知られているモールの円の作図から直線の限界線をきめることができるらば、その傾きと縦軸の交点から  $\phi'_m$  および  $c'_m$  を有効応力に対して求めることができる。

図-3 三軸試験のモール応力図



クーロンの破壊条件式とモール円から求まる限界線は当然一致すべきものと仮定して論じられることが多いが、そのような一致を裏づけるような実験的事実は認められていない。もし両者が一致するならばすべり面が軸方向主応力の方向となす角  $\alpha$  は理論的に

$$\alpha = 45 - \frac{1}{2} \phi'_m$$

となるはずとされているのに対して、実測されるすべり面の傾き角  $\alpha$  の値は上の式で計算されるものより一般に大きいことが認められている。もっとも  $\alpha$  の値を実測により決定することはいちじるしく困難であって、断定的な結論はまだ得られていない。また土が異方性を有するときも上式は成立しない。

主応力で表わされるモール・クーロンの破壊条件式は

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma'_1 - \sigma'_3 = 2c'_m \cos \phi'_m + (\sigma'_1 + \sigma'_3) \sin \phi'_m \dots \dots \dots (5)$$

であるが、 $c'_m$ ,  $\phi'_m$  はいちいちモール応力円をかいて求めないでも、 $\sigma'_1$  を直接  $\sigma'_3$  に対して、あるいは  $1/2(\sigma'_1$

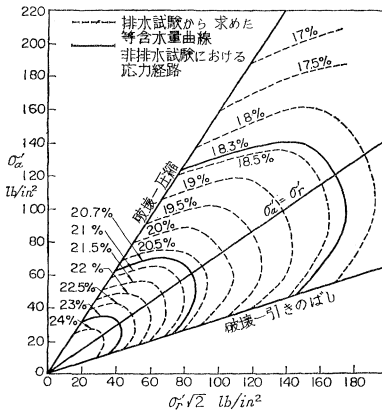
$-\sigma'_3$ ) を  $1/2(\sigma'_1 + \sigma'_3)$  に対してプロットして直線を決定し、これから計算によって求めることができる。レンドリックは横軸に  $\sqrt{2}\sigma'_3$  を縦軸に  $\sigma'_1$  をとって応力図を画く方法を考えたが、この図は正八面体面上の応力関係を示す図と本質的に同じものである。

### 5. 体積変化とエネルギー変化

せん断試験中におこる間げき水圧の変化と土の体積変化は試験結果に重要な関係を持っている。その関係を要約すると、平均外圧力がまずと間げき圧は増え間げき比は減る、正規圧密された粘土またはやや過圧密された粘土にせん断応力が生ずると間げき圧は増え間げき比は減る、強く過圧密された粘土のせん断応力が増すと間げき水圧は減り、間げき比は増す、応力のくりかえしやせん断応力の減少による間げき圧や間げき比の変化はせん断応力が増すときに起こるものと同符号であるがその量はずっと少ない、正規圧密された粘土に一定なせん断応力をかけ排水を許さないで置くと間げき水圧は時間とともにふえてゆくなどである。

図-4 はヘンケルが正規圧密されたウィールド粘土について三軸実験を行なった結果をレンドリック図上にプロットしたものであって、含水比の等しい点を結んだ等含水比曲線が書きこ

図-4 正規圧密したウィールド粘土の三軸試験結果 (ヘンケル)



まれている。飽和粘土において含水比が等しいことは間げき比や乾燥密度が等しいことを示し、また同時に体積変化が起こらないことを示しているが、これらが変化するときには、互いにつきに示すような直線比例の関係にある。単位体積当りの体積変化度を  $n$  とすると、含水比  $w$  および間げき比  $e$  は初期含水比と初期間げき比をそれぞれ  $w_0, e_0$  として

$$\left. \begin{aligned} w &= w_0 - \left( \frac{1}{G} + w_0 \right) n \\ e &= e_0 - (1 + e_0) n \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

ただし、 $G$  は土の固体粒子の真比重である。

ヘンケルの行なった三軸試験は排水条件、非排水条件の両方について、また側圧を一定に保って軸圧を加える普通の方法のほかには軸圧を減少させて供試体を軸方向に

ひきのばし破壊させる試験や軸圧を一定に保って側圧を加え、あるいは減らして破壊させる試験などをていねいに行なった結果から図-4 はまとめられたものといわれている。この図によると破壊時をふくめてある応力状態における試験体の含水比すなわち間げき比あるいは体積は応力の経路に関係なくそのときの応力状態によって一定の値をとること、破壊条件もまた応力の経路に無関係であること、および圧縮試験とひき伸ばし試験では破壊の限界線が異なることなど興味深い事実がよみとれる。

図-5 過圧密ウィールド粘土 (最大密圧力 120 lb/in<sup>2</sup>) の三軸試験結果 (ヘンケル)

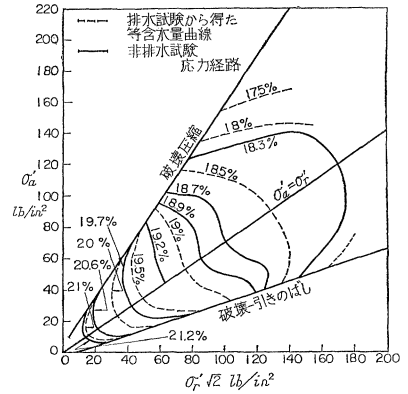


図-5 は全く同様にして求められた過圧密状態にあるウィールド粘土のレンドリック応力図である。この場合非排水条件の下で破壊に近づくとき過圧密比が小さいときは間げき水圧が増し

ているが、過圧密比の大きいところでは間げき水圧が減少し、有効応力が増している。

試験体に生ずる体積変化はエネルギーの増加あるいは消費を意味している。たとえば締まった砂とゆるい砂でせん断強さが異なるのはせん断中に生ずる体積変化とそれによるエネルギーの変化によって説明できるといわれている。体積変化によるせん断強さの部分、 $\tau_d$  は体積増加のとき正、体積減少のとき負で、体積変化が生じないときはもちろん 0 となる。体積変化によるエネルギーの変化という考え方は粘土についても適用されている。せん断中の粘土の体積変化の一部は砂と同様に粒子のかみあいによって生ずるであろうが、また、せん断ひずみによって粒子間の結合が乱され、粘土粒子間の有効応力を減少させることになるであろう。圧密試験のさいにこのようなかき乱しによって正規圧密された土がさらに圧密をうけることがあり、また強く過圧密され粘土がさらに膨張することがあるといわれている。

試験中に供試体の体積減少によって外部エネルギーの一部は圧密によって内部的に吸収され粘着力の増加をもたらすであろう。また、体積増加によって消費された外部エネルギーの一部は内部膨張圧力の補給をうけて粘着力の減少をひきおこすこともあろう。これらは結果的にせん断強さの角度を変えることになる。排水試験の際に破壊時の間げき圧は生じないとみなされているけれど

も、実際には体積変化にともなう間げき圧の変化が起こることは避けがたいと思われるが、破壊時に生ずる体積変化は供試体の各部によって一様でないためその影響を実測により求めることはむずかしいと考えられる。

### 6. せん断強さの成分

測定によって求められたせん断強さはいくつかの成分に分解され、有効直応力、および事前圧密圧力だけの関数として表わされるものではないと考えられるようになった。ねりかえした飽和状態の正規圧密粘土のせん断強さは、有効直応力  $\sigma_f'$ 、または破壊時の間げき比、 $e_f$ 、の関数として表わされ、くりかえし荷重をうけた過圧密の粘土のせん断強さはこれら2要素の組み合わせによって表わされることが報告されている。これらの2要素によるせん断強さの成分はそれぞれ応力成分、および間げき比成分と呼ばれるべきであるが、クーロン破壊条件にちなんで有効摩擦成分、および有効粘着成分とよび、 $\tau_\phi$  および  $c_e$  で表わされている。これに体積変化の成分、 $\tau_d$ 、を加えると、せん断強さ  $\tau_f$  は

$$\tau_f = \tau_\phi + c_e + \tau_d \dots\dots\dots(7)$$

となる。

粘性土は多くみかけの構造粘性を有しており、粘弾性的な変形をする。これは粘性成分とよばれるべきかも知れないが、他の因子もふくめてレオロジー成分とよび、 $c_v$  で表わすと、 $c_v$  は有効粘着成分  $c_e$  の一部としてふくまれており、時間の経過とともにあるいは変形速度の減少とともに消滅し、 $c_e$  は極限の粘着成分、 $c_u$  に近づくであろう。したがって式(7)はつぎのように改めることができる。

$$\tau_f - \tau_d = \tau_\phi + c_e = \tau_\phi + c_u + c_v \dots\dots\dots(8)$$

この式の左辺は外部エネルギーを表わし、右辺は内部エネルギーを表わすと考えてよいであろう。

間げき比一定の場合についてせん断強さの成分を図解すると図-6 のようになる。この図はテルツァギの提案した方法によって、正規圧密および過圧密のサイクルにおいて破壊時の間げき比なり含水比が等しい点を結んで求められるとされている(図-7)。このような考え方には一応疑問をさしはさむ余地があると思われる。

図-6 間げき比一定なときのせん断強さの成分

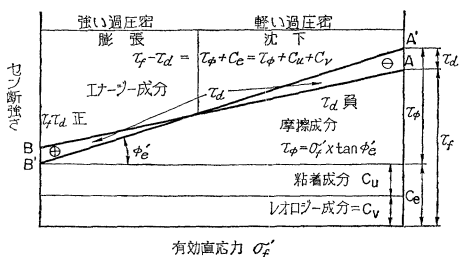
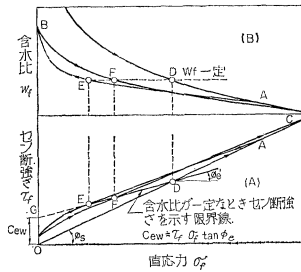


図-7 摩擦成分と粘着成分の分離



せん断試験の際にせん断抵抗が最大に達してのちせん断強さが低下して最終の残留せん断強さ、 $\tau_r$  に近づくものが多くみられる。この現象は土の種類、構造、圧密経過によるばかりでなく荷重

の方法、変形速度、排水条件、破壊後の経過時間などによっても変わるもので、ねりかえし粘土では間げき圧の変化やシキソトロピーが関係するものと思われるが、破壊後の間げき比の増減によって大きく支配され、特に乱さない土では内部構造の破壊によっておもにひきおこされるものと思われる。

研究者の中にはねりかえし粘土の摩擦と粘着を生じさせる物理化学的な力には本質的な相違はなく、粘着力は粘土粒子の間隔と配列が変化しそのまま残留した結果生ずるとみるべきであると主張している。このような主張には将来性があるように思われる。このような見解を考えに入れ、今後の研究に待って修正される可能性も少なくないので、真の内部摩擦角とか真の粘着力とかいう表現をなるべく避けて、有効内部摩擦角および有効粘着力という表現を用いるべきである、という提案も行なわれている。

以上はボシュレフの論文などを参考にして、これまで土のせん断強さや変形について得られた成果と、一般に受け入れられていると思われる見解についてごく骨子だけを述べたのであるが、読者の中にはしごく当り前のことが述べられていると感じられる方もあろうし、またほとんどが眼新しいことのように感じられる方もあろうかと思われる。

もともと土自体が複雑な物理的、ないし工学的な性質を持った材料であることもあるが、経験的事実が数多く集められた実験的手段も高度化するにつれて、いろいろな現象が明らかになるとともに、わからない問題が多くなるのは、あたかも山登りをするとき、中腹にさしかかると足下に眺望がひらけて見渡せる範囲が広がるとともに、これからきわめるべき山の高さがひしひしと身にせまって感じられるのと同じようなものであろう。

土の力学においてせん断強さがモール・クーロンの法則で簡単に表わせなくなったり、変形が弾性法則やその改善によって単純にわりきれなくなったり、土の内部力による物理化学的な粘着性の本質とか変形エネルギーの変化などやっかいな問題に首をつっこまざるを得ないはめになってきたと考えてよからう。

にもかかわらず基礎や土構造物の設計施工に従事し、事故の危険を予防し対処する技術者は、実際に目前にひかえた工学的問題を解決する仕事をやめて結論を待っているわけにはゆかない。このような実際家の立場も考えた上で、土の力学における問題点をひろいあげて、筆者なりの考えを述べてみることにしたい。

### 7. 応力の表わし方について

土の変形と破壊の問題を取り扱おうに当たって、有効応力とひずみの関係に基礎をおくやり方はいろいろ問題をふくんでいいるが、今日の時点でもっとも一般性のある考え方としてさらに発展させてゆくべきことはほかによりよい方法が見出せない限り当然であると思われる。

今日土の応力とひずみの関係を吟味するため三軸試験方法が多く用いられ今後ますます広く用いられるようになるであろうが、この種の試験では一応主応力と主ひずみを測定し、あるいは体積変化の測定を通じて、両者の間に存する関係を明らかにしようとしているわけで、その結果をクーロンの破壊条件に結びつける手段として、モール応力円を無批判に用いることには一応の疑問がさしはさまれるに至った。もし、モール応力円を用いる従来の方法があまり頼りにならないものであるなら、応力ひずみ関係を表わすのに主応力主ひずみをそのまま用いるか、もっと別の表わし方を考えるべきであろう。

筆者は土以外の材料の力学について最近広く用いられるようになってきた正八面体面上の応力と体積変化、ならびにねじりせん断変形を対応させて表示する方法を提案し、もっとも一般性のある合理的表現法として広く採用されることが望ましいと考えている。ニューマークもそのような考えを述べている。

主応力  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  がわかっているとき、正八面体面上の直応力  $\sigma_n$  およびせん断応力  $\tau_m$  はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} \sigma_n &= \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \\ \tau_m &= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} \end{aligned} \right\} \dots (9)$$

で与えられる。応力の特性値として、普通に用いられているものとやや異なるが、

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \\ J_2^2 &= \frac{1}{3}(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3) \\ J_3^3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{aligned} \right\} \dots (10)$$

とすると、上式(9)は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_n &= J_1 \\ \tau_m^2 &= 2(J_2^2 - J_1^2) \end{aligned} \right\} \dots (11)$$

せん断応力  $\tau_m$  の作用する方向と主軸の投影線とがなす角を  $\theta_m$  とすると

$$\cos 3\theta_m = \frac{2J_1^3 - 3J_1J_2^2 + J_3^3}{2(J_1^2 - J_2^2)^{3/2}} \dots (12)$$

によりせん断応力の方向がきまる。

三軸試験条件のときは、 $\sigma_2 = \sigma_3$  であるから

$$J_1 = \frac{1}{3}(\sigma_1 + 2\sigma_3)$$

$$J_2^2 = \frac{1}{3}(2\sigma_1\sigma_3 + \sigma_3^2)$$

$$J_3^3 = \sigma_1\sigma_3^2$$

となって

$$\sigma_n = J_1 = \frac{1}{3}(\sigma_1 + 2\sigma_3)$$

$$\tau_m^2 = 2(J_2^2 - J_1^2) = \frac{2}{9}(\sigma_1 - \sigma_3)^2,$$

$$\tau_m = \pm \frac{\sqrt{2}}{3}(\sigma_1 - \sigma_3)$$

$$\cos 3\theta_m = \pm 1 \quad \theta_m = 0 \text{ あるいは } \pm \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{または、} \theta_m = \pi \text{ あるいは } \pm \frac{\pi}{3}$$

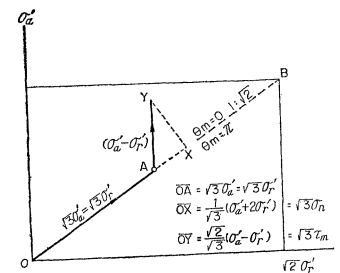
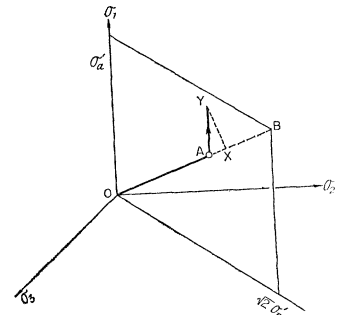
.....(13)

である。

レンドリック応力図は図-8に示すように3主応力を

直角座標にとった応力空間において、 $\sigma_2 = \sigma_3$  に対応する平面上の応力状態を表わすものであるが、この面内に引かれた横軸と1:  $\sqrt{2}$ の傾きをなす直線OXとこれに直角方向の直線XYで表わされる応力状態は正八面体応力 ( $\sigma_n, \tau_m$ ) を  $\sqrt{3}$  倍したものであることは、幾何学的な関係から容易にわかる。結局レンドリック応力図は正八面体面上の直応力とせん断応力の関係

図-8 レンドリック応力図と正八面体応力の関係



を骨子とするものであるから、当初から正八面体面応力の関係で表わし、これに体積変化とせん断ねじり変形を組み合わせると応力-ひずみ図を作成するのがもっとも一般性のあるしかも三軸試験結果を表わすのに適当な方法といえることができる。図-9 および 図-10 はヘンケ

ルの三軸試験結果から正八面体面応力図とこれに対応する体積変化にかわって含水比の変化を图示したものである。同様にせん断応力に対応するねじりせん断変形を图示することもできる。その際さらに一步すすめてひずみの表示を対数ひずみによればひずみがかなり大きい所まで適用でき、含まれる誤差も小さくなるであろう。なお普通の圧縮試験のように  $\sigma_1 > \sigma_3$  のときは

$$\theta_m = 0, \text{ または } \pm \frac{2}{3} \pi$$

であるが、引きのばし試験のように  $\sigma_1 < \sigma_3$  のときは、 $\tau_m$  の方向が反対になり

$$\theta_m = \pi, \text{ または } \pm \frac{1}{3} \pi$$

となる。

### 8. 応力とひずみの関係

全応力から間げき圧をさしひいたものを有効応力として、有効応力とひずみの関係は、応力とひずみがあまり大きくない範囲では弾性法則が成り立つとするのが普通である。弾性の基本式は主応力主ひずみの間によく知られた次式で与えられている。

$$\left. \begin{aligned} d\epsilon_1 &= \frac{1}{E} d\sigma_1 - \frac{\mu}{E} (d\sigma_2 + d\sigma_3) \\ d\epsilon_2 &= \frac{1}{E} d\sigma_2 - \frac{\mu}{E} (d\sigma_1 + d\sigma_3) \\ d\epsilon_3 &= \frac{1}{E} d\sigma_3 - \frac{\mu}{E} (d\sigma_1 + d\sigma_2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

これから体積変化度  $\Delta n$  は

図-9 正八面体面応力図と対応する体積変化を含水比で示した図（ヘンケルの正規圧密粘土に対する実験から）

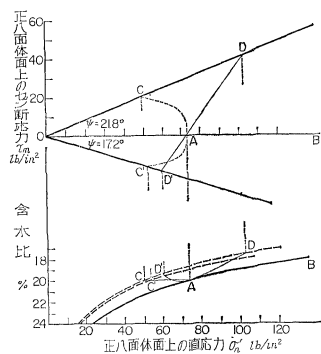
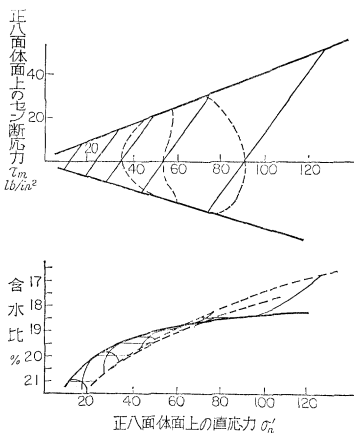


図-10 正八面体面応力図と対応する体積変化を含水比で示した図（ヘンケルの過圧密粘土に対する実験から）



$$\Delta n = \Delta\epsilon_1 + \Delta\epsilon_2 + \Delta\epsilon_3 = \frac{1-2\mu}{E} (d\sigma_1 + d\sigma_2 + d\sigma_3) \dots\dots\dots (15)$$

この関係は弾性法則によれば体積変化度  $\Delta n$  は3主応力の和したがって正八面体面上の直応力  $d\sigma_n = 1/3 (d\sigma_1 + d\sigma_2 + d\sigma_3)$  の変化に比例するが、せん断応力  $\tau_m$  には無関係であることを示している。三軸試験結果をくわしく調べてみると、多くの土においてせん断応力  $\tau_m$  が生ずるとそれに伴って体積変化度も変化し、時には増し時には減ることがあることが認められる。これは非排水試験のとき発生する間げき水圧の大きさにかなりの影響をおよぼす現象であり、普通砂についてはダイラテンシーとよばれて古くから注目されているが、それも破壊点付近におけるせん断による体積の膨張に主として注意が払われてきたようで、応力やひずみの小さいときのせん断による体積変化には一般にまだあまり気付かれてさえないようである。

このような体積変化をとり入れて、弾性の基本式を正八面体面応力で書き改めようとする、3主応力は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_n + j_1 \tau_m \\ \sigma_2 &= \sigma_n + j_2 \tau_m \\ \sigma_3 &= \sigma_n + j_3 \tau_m \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

$$\text{ここに、} j_1 = \sqrt{2} \cos \theta_m, j_2 = \sqrt{2} \cos \left( \frac{2}{3} \pi - \theta_m \right),$$

$$j_3 = \sqrt{2} \cos \left( \frac{2}{3} \pi + \theta_m \right)$$

で表わされ体積変化度  $n$  およびねじり変形度  $m$  は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta n}{1-n} &= -\Delta \log_e (1-n) = \frac{1}{V} \Delta \sigma_n + \frac{K}{U} \Delta \tau_m \\ \frac{\Delta m}{1-m} &= \tau_m - \Delta \log_e (1-m) = \frac{1}{U} \Delta \tau_m \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

式中  $V, U$  はそれぞれ体積変化度およびねじり変形度を与える係数で、弾性法則の  $E, \mu$  に相当するものであるが、一般に応力の関数として変化する値をもつと考えられ、 $K$  はダイラテンシーに関する係数である。

3主ひずみはそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\epsilon_1}{1-\epsilon_1} &= \frac{1}{3} \frac{\Delta n}{1-n} + \frac{j_1}{3} \frac{\Delta m}{1-m} \\ \frac{d\epsilon_2}{1-\epsilon_2} &= \frac{1}{3} \frac{\Delta n}{1-n} + \frac{j_2}{3} \frac{\Delta m}{1-m} \\ \frac{d\epsilon_3}{1-\epsilon_3} &= \frac{1}{3} \frac{\Delta n}{1-n} + \frac{j_3}{3} \frac{\Delta m}{1-m} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

三軸試験で三軸方向に等しい液圧を加えて圧密を行なうときは、 $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  であるから  $\Delta \tau_m = 0$  となり、 $\sigma_n = \sigma_1 = \sigma_3$  だけが増し、

$$\frac{\Delta n}{1-n} = -\Delta \log_e (1-n) = \frac{1}{V} \Delta \sigma_n'$$

の関係において、係数  $V$  が  $\sigma_n$  に比例すると仮定し

$$V = V_0 \frac{\sigma_n'}{\sigma_0}$$

$V_0$  は  $\sigma_n = \sigma_0$  における  $V$  の値とおいて、上式を積分すると

$$-\log_e(1-n) = \frac{\sigma_0}{V_0} \log_e \left( \frac{\sigma_n'}{\sigma_0} \right) \dots \dots \dots (19)$$

を得る。この式は多くの実験によって特に正規圧密粘土に対してかなり厳密に成立することが認められる。テルツァギが一軸的な圧密試験で求めた、間げき比  $e$  と圧密圧力  $p$  の関係

$$e = e_0 - c_c \log_e p$$

は上の関係式(19)と同じ形に書き改めることができる。

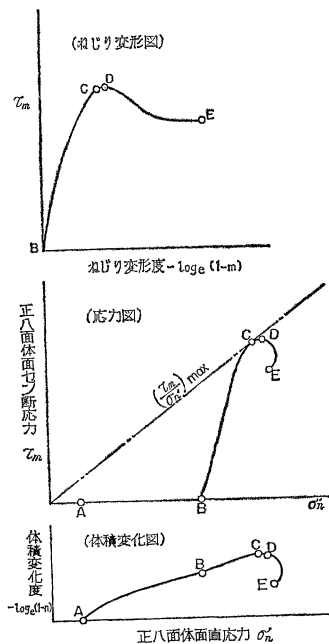
せん断応力とせん断ひずみの関係はずっと複雑であって、特に破壊点付近で生ずる体積の変化や間げき圧の変化などは多くの未解決な要素に支配されているようである。

### 8. 破壊点付近における応力とひずみ

図-11 は圧密非排水三軸試験結果を正八面体面応力と体積変化度、および、ねじり変形度の関係で表わした一例を示すものである。この図は応力図、体積変化図、ねじり変形図の組み合わせからなっており、図中の曲線 AB は液圧による等圧縮の経過を、曲線 BCDE は軸圧縮による有効応力変化とそれともなう体積変形ならびにねじり変形（対数表示による）を示している。破壊点付近において C 点では  $\tau_m / \sigma_n'$  の比が最大となり、D 点では  $\tau_m$  が最大であり、E 点では体積が変化せずねじり変形のみが増大してゆく最終状態を示している。しかし、これらの関係は平均の応力と平均のひずみの間におけるもので、すべり面上のそれらではないことに注意すべきであろう。

応力およびひずみが小さい間は、試験体の各部におけ

図-11 正八面体面応力と体積変化度およびねじり変形度の関係を示す一例



る応力とひずみの分布はかなり一様で、実測で求められる平均の応力なりひずみなりは十分正確と思われるが、破壊点に近づくと、局部的に大きな応力やひずみを生ずるので、実測された平均的な値はすべり面やその付近の状態を表わすものとは考えられなくなる。体積変化や間げき圧についても同じことがいえよう。モール・クーロンの法則が適用できるかどうかの結論を得るにも破壊すべり面の発生とその進行、破壊すべり面上の応力とひずみ、体積変化などについてさらにつき進んだ検討が必要と思われる。

### 9. 問題点の要約

せん断強さを単に粘着項と摩擦項に分けて考えるクーロン流のやり方は、全応力の代りに間げき圧を計って有効応力に換算して表わされることによりかなり改善されたけれども、なおいっそう複雑な問題をひきおこすようになってきた。物理的な意味での粘着力と内部摩擦角といったものと直接せん断試験や三軸圧縮試験で求められる数値とどのような関係があるのか一がいに断定はできない現状である。粘着力は応力に無関係なものと考えるか、粘着力を内部応力的なものに帰着させて考えるべきか、あるいはその両方を考えるべきか、また内部摩擦は体積変化や間げき比の変化と無関係なもののみならず本質的に結びついているもののみならず、この辺の根本的な考え方の違いによって現象そのものの解釈にも大幅なくいちがいが生まれてくる。

普通土の応力ひずみ関係を論ずるときに、飽和した粘土をよくねりかえして内部構造をもたない等方性の材料を人工的につくり、これを圧密あるいは膨張させたときのひずみやせん断強さについての試験結果がそのまま一般化されて論じられることのないように注意しなければならない。

自然の土はむしろ多くの場合に異方性をもち、内部構造が発達しており、また不飽和状態にあるものも少なくない。このような自然の土の示す力学的性質はきわめて複雑なものであって、一般的にはどうい論じがたいものであろう。

不飽和土のせん断強さは、間げき中にある空気の圧縮による応力と空気が間げき水中に溶けてむ量をボイルの法則とヘンリーの法則によって計算することによってある程度まで実験結果を解釈することが可能であるが、不飽和度が高くなり土が乾いた状態になると、間げき中の空気が持つ圧力と水が持つ圧力が異なってくるのでその修正を要するが、さらにそれだけでは説明のできない内部応力のようなものが生ずると考えられる。これは有効応力を全応力から間げき圧をさしひいたものと考えることが必ずしもいつも適当でないことを示している。

中間主応力の影響は土の変形法則の中には当然のこととして取入れられているが、極限のせん断強さがその影響をうけないとすることができるとか、もし影響ありとすればどのような量的関係があるか、という点はきわめて本質的な興味深い問題であると同時にきわめてむずかしい問題であろう。正八面体応力におきかえると、破壊条件が単に  $\tau_m$  と  $\sigma_n$  のみの関係で表わされるのか、あるいは  $\theta_m$  が影響を与えるものかどうかという点である。いろいろ実験的事実も発表されており、前に述べたヘンケルの実験結果によっても、普通の圧縮試験で  $\theta_m=0^\circ$  のときと、引きのばし試験で  $\theta_m=180^\circ$  のときでは、破壊のせん断抵抗角にかなりの差があり、せん断強さが  $\theta_m$  つまりせん断応力の方向したがって中間主応力の値によって影響されることを示している。この結果からみると一般に破壊条件は  $\theta_m$  によっても影響されると考えなければならないが、三軸試験に用いられる供試体が細長い円柱形であり、軸方向に圧縮するときと引張る

ときとは応力分布や変形が同じ条件の下でおけるとは考えられず、特に破壊点付近ではかなりの差異が生ずると思わざるを得ず、それが破壊時のせん断強さに影響をおよぼしていることを無視できないであろう。

これらの問題点は実用上というよりむしろ研究上重視されている現状であるが、土の変形や強度特性を試験によって決定し実際問題に適用してゆく際にも十分な考慮を払うべき価値のある重要事項であろう。

(1963.10.27・受付)

#### テレスアギ教授逝去さる

本文でも紹介されている土質力学の権成者 Karl Terzaghi 教授は去る 10 月 25 日 80 才の生涯をとじられました。ここに謹んで哀悼の意を表します。なお、同教授の研究・業績などについては次号で紹介する予定です。

(編集部)

鹿島研究所  
出版会

## 新刊・重版——好評発売中〈図書目録進呈〉

東京都港区芝田村町5-9  
浜ゴムビル5階

ジョイント・ヴェンチュア — 共同企業体 — 鹿島守之助著	工事原価管理 佐用泰司著	建設業成功の秘訣 L・ミラー著 鹿島出版会訳	技術者の哲学 H・クロス著 福田仁志訳	海外の土木技術 鹿島出版会編 第二版	建築構造計画実施例 工博 成田春人著	軟弱地盤における建築の地下掘削法 工博 甲野繁夫著 第二版	山口昇博士論文選集 刊行委員会編 限定版	基礎反力の解法 柴田直光著 第四版	機械化施工合理化の研究 佐用泰司著 第三版	空気調和設備の騒音制御 工博 長友宗重著	構造物基礎の応力調整工法 工博 堀松和夫著	軟弱粘土の圧密 新圧密理論とその応用 工博 三笠正人著	簡易索道の計画と設計 技術士 二宮嘉弘著	アースドリル基礎工法 工博種谷実著 池田太郎著
¥350	¥350	¥680 1月刊	¥220	¥600	¥380	¥400	¥1000	¥300	¥700	¥1200	¥580	¥750	¥980	¥600