

構造力学における最近の話題

小 西 一 郎*

1. ま え が き

最近における構造力学の進歩は、いくつかの分野にわたってめざましく、特に電子計算機の利用によって全く新しい研究面が開拓されようとしている。本文は構造力学における最近の話題に関するものであるが、すべての問題を網羅することは不可能であり、いくつかの重要なものを選択してのべたいと思う。特に電子計算機の応用に関係するものを重点的に説明することになるが、これ以外でも重要かつ現在その解決が強く要望されている問題が数多く存在するのは当然であり、それらについては後日説明したいと思う。

まず、構造力学の数年来の進歩の原因について考えると、最初にあげられるのが、前述のように、電子計算機の広範囲な利用である。従来、理論的に解析方法が明らかとなっても、實際上数値計算を行ないえないものがあつた。それが電子計算機を用いることによってきわめて短時間のうちに高精度の結果を容易に求めることが可能となったわけである。土木構造物、とくに諸形式の橋梁の複雑な静力学的解析、その固有振動数の計算などに、計算機を利用した結果が報告されている。しかしここで、単に従来の理論にしたがって問題を取り扱ったのでは計算機が人間に代って高速度で計算を行なつたに過ぎず、構造力学そのものの新しい発展を約束するものではない。複雑な計算を計算機に代行せしめるには、解析方法をより統一的に組織化し、問題を機械的に取り扱うことが必然的に要請されるのは当然である。たとえば立体トラスの応力解析では、一般に不静定次数を直観的に求めることは容易ではない。また、どのような不静定力を考えるのが、実際の計算上便利であるかという問題も改めて考慮されなければならないことになる。このように電子計算機という有力な解析手段を十分利用するために、数多くの新しい問題が研究対象として脚光をあびるようになったわけである。

ここでは、上述の問題に多くの貢献をなした英国の研究グループの成果を紹介したい。すなわち、土木構造物

* 正員 工博 京都大学教授 工学部土木工学教室

を対象とした Jenkins, Henderson, Morice らの線型構造解析理論 (Linear structural analysis)¹⁾ および航空機構造を対象とした Argyris, Hunt らによるエネルギー論による構造解析²⁾ である。最後に、最近の構造力学関係で計算機を利用した研究の二、三と、計算機関係以外の話題について簡単にふれてみたい。

2. エネルギー論 (Energy Theorem) による構造解析

構造解析は、換言すれば、外力による構造物の抵抗を知ることであるが、具体的には、部材各点における応力、あるいは変位を知ることになる。応力と変位は応力・ひずみの関係、および、ひずみ・変位の関係によって結びつけられているから、このような関係式を用いて一方の値から他方を互に決定することができる。しかしながら、応力の未知数は普通6個、変位の未知数は3個であり、計9個の方程式が必要となる。これらがつり合い方程式および適合条件式によって与えられるが、問題によっては上の方程式を解くことはきわめて困難となる。そのため、変位を適当な関数の series として逐次つり合い方程式より決定する方法がしばしば採用される。しかし、こうして求められた変位から、応力を求めることは、一般には収束性がいちじるしく悪く、解として十分な精度を上げることが困難な場合が多い。このように、求めようとする対象によって解法が異なってくるが、これを統一的立場より説明しようとするのが、エネルギー論 (Energy theorem) である。

いま変形しようとする物体に働く体力の成分を F_i 、表面力 (surface traction) を t_i とすれば、力のつり合いより

$$\int_S t_i dS + \int_V F_i dV = 0 \dots\dots\dots (1)$$

となる。さらに、応力 σ_{ij} 、法線ベクトル n_i から、 $t_i = n_j \sigma_{ij}$

なる関係が求められるから、これを式 (1) に代入すれば、

$$\int_S n_j \sigma_{ij} dS + \int_V F_i dV = 0$$

上式左辺第1項に Divergence 定理を応用すれば、

$$\int_V (\sigma_{ij,j} + F_i) dV = 0$$

$$\therefore \sigma_{ij,j} + F_i = 0 \dots\dots\dots(2)$$

となる。

式(2)は応力に関するつり合い方程式である。

さて、つり合い状態にある物体に仮想変位 δu_i を与えた場合、この変位による微小外力仕事 δW はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_V F_i \delta u_i dV + \int_S t_i \delta u_i dS \\ &= \int_V F_i \delta u_i dV + \int_S n_j \sigma_{ij} \delta u_i dS \\ &= \int_V F_i \delta u_i dV + \int_V (\sigma_{ij} \delta u_i)_{,j} dV \\ &= \int_V (F_i + \sigma_{ij,j}) \delta u_i dV + \int_V \sigma_{ij} \delta u_{i,j} dV \\ &= \int_V \sigma_{ij} \delta u_{i,j} dV = \int_V \delta \tilde{U} dV = \delta U \dots\dots(4) \end{aligned}$$

すなわち

$$\delta(W - U) = 0 \dots\dots\dots(4)'$$

δU は図-1 に示すように、物体の内部仕事に等しい。式(4)は仮想変位による微小外力仕事 δW と、微小

図-1

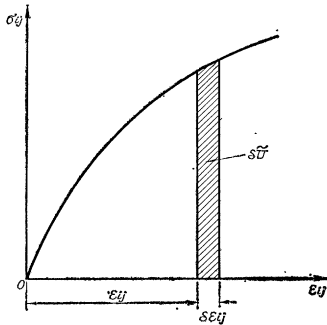
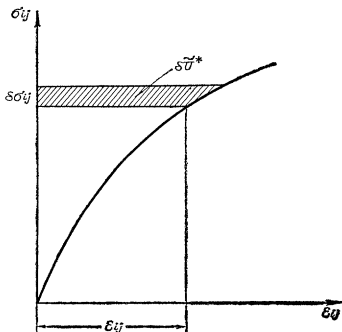


図-2



内部仕事 δU とが相等しいという仮想変位の原理を表わすものである。式(4)の右辺は微小内部仕事(図-1)を表わすから、これを δU とすれば、ただちに

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \varepsilon_{ij}} \dots\dots\dots(5)$$

なる関係式が求められる。

いま一つの仕事の変分として、仮想力によるものがあ。この外力仕事の要素を δW^* で表わせば、定義より、

$$\begin{aligned} \delta W^* &= \int_V u_i \delta F_i dV + \int_S u_i \delta t_i dS \\ &= \int_V \{u_i \delta F_i + (u_i \delta \sigma_{ij})_{,j}\} dV \\ &= \int_V u_i \{\delta F_i + (\delta \sigma_{ij})_{,j}\} dV + \int_V \delta \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV \end{aligned}$$

そこで、仮想力に対する基礎式として

$$\delta F_i + (\delta \sigma_{ij})_{,j} = 0 \dots\dots\dots(6)$$

$$\delta W^* = \delta U^*$$

$$= \int_V \delta \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \int_V \delta \tilde{U}^* dV \dots\dots(7)$$

が求められる。式(7)における U^* を complementary energy といい、これより

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial \tilde{U}^*}{\partial \sigma_{ij}} \dots\dots\dots(8)$$

(図-2 参照)。

式(5),(8)はそれぞれ potential 関数より応力、あるいは、ひずみが求められることを示すが、これは Castigliano の定理の一般化したものである。この場合式(5),(8)の誘導にあたって、応力・ひずみの関係は直接用いられていない。すなわち、非線型の応力・ひずみ関係に対してもこの両式が成立するわけで、これは Langhaar によって指摘されている³⁾。

上述の諸式は、力学の根本原理であるつり合い方程式、仮想変位の原理から出発して由来したものであるから、実際の問題を解く場合にきわめて重要なものである。たとえば求められたつり合い方程式が複雑となり、その厳密解が容易に求められないような場合、あるいは、構造物の変形特性が単純に抽象化できないような場合などでは、物理的に不合理でない近似解を追求することが、問題解決の一方法である。以上の諸式が変形式をとることから、近似解法追求の有力な手段を提供するものであり、かような意味でいままでの問題とは異なった新しい問題となる。その最も顕著な理論としては、Kirchhoff, Mindlin によって発展せられた近似理論がある。また固有値問題などでこれまでしばしば応用されてきた Rayleigh-Ritz の方法も本質的には式(4)に還元せられる。また Galerkin の方法は式(6),(7)から出発する手法である。よく知られているように、前者では構造物の変形に関する近似を、変分原理を基礎として求めようと

するものであるが、エネルギー論の立場から、他の基礎方程式とともに統一的理解によってその基礎が与えられるわけである。Galerkinの方法についても全く同様である。

さて、式(5)において、 \tilde{U} が ϵ_{ij} の2次形式であれば、

$$\tilde{U} = \frac{1}{2} s_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl}$$

$$\therefore \sigma_{ij} = \frac{\partial}{\partial \epsilon_{ij}} \left\{ \frac{1}{2} s_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

また、 \tilde{U}^* が σ_{ij} について2次形式であるとすれば、

$$\tilde{U}^* = \frac{1}{2} c_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl}$$

$$\therefore \epsilon_{ij} = \frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} \left\{ \frac{1}{2} c_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \right\} = c_{ijkl} \sigma_{kl} \dots (10)$$

となる。式(9),(10)は応力・ひずみの関係を与えるが、式(9)の形式で表わされる s_{ijkl} をstiffness、また式(10)の形式で表わされる c_{ijkl} をflexibilityという。これらの応用については以下において説明しよう。

3. 骨組構造物の線型構造解析

線型構造解析は、外力と変形の関係が線型である構造物の解析であるが、まず、構造物の拘束度について考察しよう。一般にトラス構造では、不静定次数という量で拘束度を表わすが、不静定次数が正の場合、その構造物を不静定構造、0の場合を静定構造、さらに負の場合これをmechanismという。

mechanismについては特に局部的mechanismを考えることもでき、くわしくは極限解析で考究される分野であるので、ここでは、不静定次数について正または0の場合を対象とする。

いま、図-3に示す構造物を考える。一般にこれらの構造物の不静定次数を直

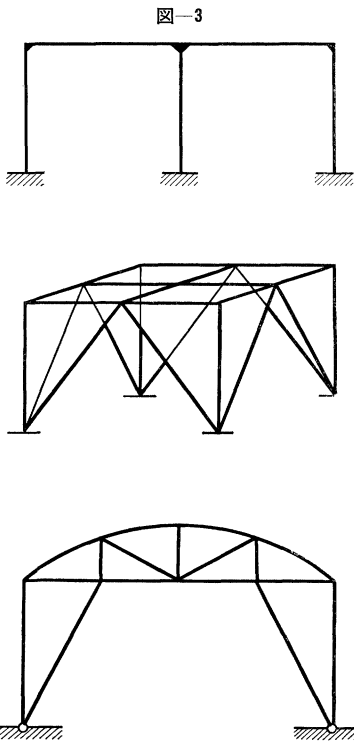
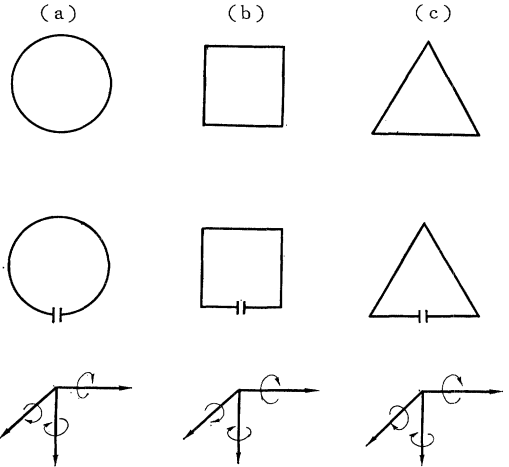


図-3

図-4 断面力の6成分

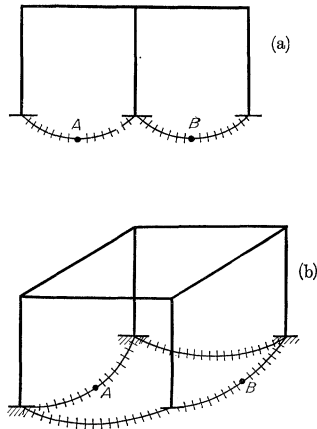


観的に求めることは容易ではない。この問題をきわめてlogicalに研究し、大きな貢献をなしたのがHendersonおよびBickleyである。かれらの考えの基本は、このような構造物をいくつかのringの集合と考えることである。すなわち、図-4(a),(b),(c)のいずれの場合も、任意の箇所切断して表われる内部力は、3つの力の成分と3つの回転成分である。

このringの概念を用いて、いわゆる線型構造の解析を行なうにあたり、まず単一連結(singly connected)および複合連結(multiply connected)について説明する。ある部材の一点より他の部材の一点に至るのに、ただ一つのpassしかない場合、2点はsingly connectedされているといい、そうでない場合をmultiply connectedされているという。図-5(a)の平面ラーメンについては、図示のようにringを形成する。ring上の2点A,Bについて閉経路について考えた場合、このringの集合体はsingly connectedである。図(b)の場合はmultiply connectedである。

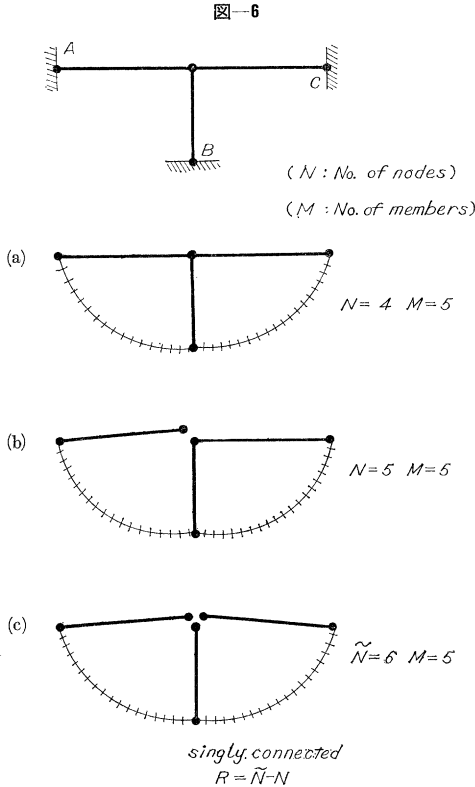
いま一つの概念は“completely stiff structure”である。

図-5 単一連結および複合連結 (閉経路について考えた場合)



すなわち、いかなる載荷形式によっても、応力が常に0となるような部材がない場合、これをcompletely stiff structureという。たとえば、2ヒンジアーチでは、両端で常にモーメントが0となるから、アーチをふくむringを考えるとき仮想部材にはモーメントは伝達されない。したがって、completely

stiff structure ではない。これを completely stiff structure にするには両端を固定すればよい。換言すれば2ヒンジアーチは(平面的に考えると)、両端固定の場合(completely stiff)から拘束度が2だけ解放されたことになる。このような次数を解放次数 (no. of releases) という。



さて、図-6のようなラーメン構造を考よう。まず、AB, BCを仮想部材で連結すれば(a)のようになる。この場合、節点数 N は4、部材数 M は5となる。そこで(b)のように0点の一部材を切断すれば、 $N=5$ 、 $M=5$ 、さらに単一連結の状態にするには(c)のように切断すればよいから、この場合 $N(\equiv \tilde{N})=6$ 、 $M=5$ となる。この構造物を表わす ring 数 R は2であるが、これは $(\tilde{N} - N)$ に等しいことが一般的に証明される。しかるに、一般に

$$\tilde{N} = M + 1$$

$$\therefore R = \tilde{N} - N = M - N + 1$$

となる。前述のように、一つの ring には6個の不静定力が考えられるから、結局求める不静定次数 n_s は

$$n_s = 6(M - N + 1)$$

となる。平面構造では一つの ring に3個の不静定力が考えられるから、

$$n_s = 3(M - N + 1)$$

となる。いま、構造物が completely stiff structure でない場合、 n_s は解放次数 r だけ少なくなるから、したがって、立体構造では、

$$n_s = 6(M - N + 1) - r$$

平面構造では、

$$n_s = 3(M - N + 1) - r$$

となる。以上の考えをいくつかの立体的、あるいは平面的構造物に応用した例を表-1に示す。

平面トラスの節点がすべてヒンジである場合

$$r = 2M - N \text{ となるから、} n_s \text{ は}$$

$$n_s = 3(M - N + 1) - (2M - N) = M - 2N + 3$$

となるが、これは従来の平面トラスに関する不静定次数の表式にはかならない。

表-1
(by Morice)

Actual Structure	Space fr. Plane fr.	Completely Stiff Structure	M	N	R	r	n_s
	P		4	3	2	5	1
	P		4	4	1	0	3
	P		2	2	1	2	1
	S		19	13	7	0	42
	S		6	4	3	0	18

4. 線型構造解析 (Flexibility 法と Stiffness 法)

2.において、構造物の stiffness s_{ijkl} および flexibility c_{ijkl} を考えたが、力と変形の関係についても同様に考えることができる。いま、3個の変形量 r_1, r_2, r_3 が外力 R_1, R_2, R_3 と一次的に関係づけられているとすれば、これは

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= f_{11}R_1 + f_{12}R_2 + f_{13}R_3 \\ r_2 &= f_{21}R_1 + f_{22}R_2 + f_{23}R_3 \\ r_3 &= f_{31}R_1 + f_{32}R_2 + f_{33}R_3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(11)$$

または

$$r_i = f_{ij}R_j \quad i, j = 1, 2, 3 \dots\dots\dots(12)$$

のように表わすことができる。式(11)は一般的表示であるが、式(12)はテンソル表示で、 $\mathbf{2}$. においてすでに用いた表示法である。また、上の関係をベクトル表示すれば、

$$\mathbf{r} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{R} \dots\dots\dots(13)$$

のように書き表わすことができる。 \mathbf{r} , \mathbf{R} はそれぞれ変形、および力を示す column vectors である。式(13)の \mathbf{f} を flexibility matrix という。

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(14)$$

いま、簡単な場合について、flexibility matrix の要素を求める。部材の点 i に外力 1 が作用したときの、各断面における曲げモーメント、軸方向力、せん断力を M_i , N_i , S_i とすれば、曲げ変形に対して

$$f_{ij}^B = \int \frac{M_i M_j}{EI} ds \dots\dots\dots(15)$$

軸方向変形に対して

$$f_{ij}^N = \int \frac{N_i N_j}{EA} ds \dots\dots\dots(16)$$

せん断変形に対して

$$f_{ij}^S = \int \frac{S_i S_j}{\kappa GA} ds \dots\dots\dots(17)$$

となる。これは式(11)の \mathbf{R} に $[1, 0, 0]$ のような column vector を考えて変形量を求めたのと等価である。すなわち、

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ f_{31} \end{bmatrix}$$

同様に $(0, 1, 0)$, および $(0, 0, 1)$ のような外力を考えれば、すべての行列要素が求められる。しかしながら、このような単位荷重の単独な作用を基礎とすることは実際上好都合でないことが多いので、いくつかの外力の集合を考え、これを一般力 (generalized forces) と定義する。一般力をベクトル \mathbf{Q} で表わし、 \mathbf{R} と一次結合で関係づけられているものとすれば、

$$\mathbf{Q} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{R} \text{ または } \mathbf{R} = \mathbf{BQ} = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{Q} \dots\dots\dots(18)$$

となる。この一般力に対する一般変位 (generalized displacement) \mathbf{q} はつぎのようにして定義される。いま仕事 W を \mathbf{Q} , \mathbf{q} および \mathbf{R} , \mathbf{r} を用いて表わすと、

$$W = \frac{1}{2} \mathbf{R} \cdot \mathbf{r} = \frac{1}{2} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{q}$$

$$\therefore \mathbf{BQ} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{B}^T \mathbf{r} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{q}$$

$$\therefore \mathbf{q} = \mathbf{B}^T \mathbf{r} \dots\dots\dots(19)$$

となる。 \mathbf{B}^T は \mathbf{B} の転置行列である。

ゆえに、式(19)に式(13)および式(18)を用いると、

$$\mathbf{q} = \mathbf{B}^T \mathbf{r} = \mathbf{B}^T \mathbf{f} \mathbf{R} = \mathbf{B}^T \mathbf{f} \mathbf{BQ} \dots\dots\dots(20)$$

となる。

式(20)は \mathbf{q} と \mathbf{Q} の一義的關係を与える式であるから、 \mathbf{F} として、

$$\mathbf{F} = \mathbf{B}^T \mathbf{f} \mathbf{B} \dots\dots\dots(21)$$

を定義すると、

$$\mathbf{q} = \mathbf{FQ}$$

となる。ここに \mathbf{F} を generalized flexibility matrix という。

つぎに、式(13)の代りに、外力 \mathbf{R} が変位 \mathbf{r} の一次式によって表わされるとすれば、

$$\mathbf{R} = \mathbf{s} \cdot \mathbf{r} \dots\dots\dots(22)$$

となる。ここで \mathbf{s} を stiffness matrix という。

式(11)の例に対応するものはつぎのようである。

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= s_{11}r_1 + s_{12}r_2 + s_{13}r_3 \\ R_2 &= s_{21}r_1 + s_{22}r_2 + s_{23}r_3 \\ R_3 &= s_{31}r_1 + s_{32}r_2 + s_{33}r_3 \end{aligned} \right\}$$

定義より明らかなように、 $\mathbf{s} = \mathbf{f}^{-1}$, または $\mathbf{f} = \mathbf{s}^{-1}$ である。前と同様に、一般力 \mathbf{Q} , および一般変位 \mathbf{q} を考え、 \mathbf{Q} を

$$\mathbf{Q} = \mathbf{A}^T \mathbf{R} \dots\dots\dots(23)$$

のように表わせば、

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{A}^T \mathbf{R} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{r}$$

$$\therefore \mathbf{r} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{q} \dots\dots\dots(24)$$

ゆえに、

$$\mathbf{Q} = \mathbf{A}^T \mathbf{R} = \mathbf{A}^T \mathbf{s} \mathbf{r} = \mathbf{A}^T \mathbf{s} \mathbf{A} \cdot \mathbf{q}$$

$$\therefore \mathbf{Q} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{q} \dots\dots\dots(25)$$

ここに

$$\mathbf{S} = \mathbf{A}^T \mathbf{s} \mathbf{A} \dots\dots\dots(26)$$

となり、これは式(21)と同一形式の行列である。 \mathbf{S} を generalized stiffness matrix という。

一般に、 $\mathbf{q} = \mathbf{FQ}$, $\mathbf{F} = \mathbf{B}^T \mathbf{f} \mathbf{B}$ を用いて構造解析を行なうのを flexibility 法 (または method of forces), $\mathbf{Q} = \mathbf{S} \mathbf{r}$, $\mathbf{S} = \mathbf{A}^T \mathbf{s} \mathbf{A}$ を用いるのを stiffness 法 (または method of displacements) という。この両者の相対關係を表示すると、表-2 のようになる。

これまで線型構造物の不静定次数、flexibility および stiffness について考察したが、一般の不静定構造の解法をここで考えてみる。これは、Argyris らが、従来の Müller-Breslau の手法を一般化したものであるが、その目的は電子計算機によって不静定力を機械的に求めようとするものである。

まず、不静定構造に、適当な releases を n_s 個入れて静定構造に帰着せしめるが、これを基本構造 (basic or principal structure) という。この解放によって生ずる不静定力を \mathbf{X} , 荷重によって基本系に生ずる断面力を \mathbf{X}_0 , さらに \mathbf{X} によって生ずる変形を \mathbf{r} , \mathbf{X}_0 によって生ずる変形を \mathbf{r}_0 とすれば、変形に関する拘束条件として、一般に

表-2
(by Argyris & Hunt)

Method of Forces		Method of Displacement	
Force	R	Displacement	r
Flexibility f	$f \cdot S = I = S \cdot f$		Stiffness s
Displacement	r	Force	R
Generalized Force $Q, R = B \cdot Q$		Gen. Displacement $q, r = A q$	
Gen. Flexibility $F = B^T f B$	$A^T B = I = B^T A$ $F S = I = S F$		Gen. Stiffness $S = A^T s A$
Gen. Displacement $q = B^T r = F Q$		Generalized Force $Q = A R = S q$	
Generalized Series Ass.		Generalized Parallel Ass.	
Addition of Flexibility		Addition of Stiffness	
(a)	(b)	(c)	$F_a + F_b = F_c$
(a)	(b)	(c)	$S_a + S_b = S_c$

$$r + r_0 = 0 \quad \dots\dots\dots(27)$$

また、断面力に関する拘束条件として、

$$X + X_0 = 0 \quad \dots\dots\dots(28)$$

を考えることができる。

いま flexibility matrix f を r に導入すれば、式 (27) は

$$fX + r_0 = 0 \quad \dots\dots\dots(29)$$

のように表わされる。拘束が部分的に解放された構造物では式 (27) および式 (28) の一部の組み合わせになり、結局、不静定力を求めるには、つぎのような連立一次方程式を解けばよいことになる。

$$DX + D_0 = 0 \quad \dots\dots\dots(30)$$

ここで、matrix D の rank は 3. において求めた不静定次数と一致しなければならない。

式 (30) を explicit に書き表わせば、

$$d_{11}X_1 + d_{12}X_2 + \dots + d_{1n}X_n + d_{10} = 0$$

$$d_{21}X_1 + d_{22}X_2 + \dots + d_{2n}X_n + d_{20} = 0$$

$$\dots\dots\dots$$

$$d_{n1}X_1 + d_{n2}X_2 + \dots + d_{nn}X_n + d_{n0} = 0$$

このような方程式を解くには、

$$X = -D^{-1}D_0$$

より明らかなように、 D の逆行列を求めなければならず、行列の階数が多くなれば、計算時間はいちじるしく増加する。普通 Gauss の消去法等を用いて、式 (30) を

$$TX + T_0 = 0 \quad \dots\dots\dots(31)$$

のような形に変換する。ここに T は triangular matrix でつぎのようなものである。

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & t_{n2} & t_{n3} & \dots & \dots & t_{nn} \end{bmatrix}, \quad T_0 = \begin{bmatrix} t_{10} \\ t_{20} \\ \vdots \\ t_{n0} \end{bmatrix} \quad \dots\dots(32)$$

matrix T が求めれば、式 (31) の第 1 式より X_1 が求められ、第 2 式よりただちに X_2 、第 3 式より X_3 等すべての X_i が機械的に求められる。

さて、automatic computation では、上のような方法のほかに、Jordan の方法がきわめて有利である。この Jordan の方法は、簡単にいえば、matrix

$$g = \begin{bmatrix} I & G \\ 0 & \dots \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(33)$$

のようなものに、別の適当な matrix を連続的に乗じて、単位 matrix に帰着せしめるが、これは同時に、original matrix の逆行列を求めることにもなる。

いま、matrix D の逆行列を求めることを考える。まず M_1 をつぎのように定義する。

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1/d_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -d_{21}/d_{11} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -d_{31}/d_{11} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -d_{n1}/d_{11} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(34)$$

ここで d_{ij} は D の ij 要素である。

式 (34) を D に乗ずると、

$$M_1 D = \begin{bmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(35)$$

のような形になる。

つぎに、matrix M_2 を下のように定義する。

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & -b_{12}/b_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/b_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -b_{32}/b_{22} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -b_{n2}/b_{22} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(36)$$

M_2 を式 (35) に乗ずると、

$$M_2 M_1 D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & c_{13} & c_{14} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & c_{23} & c_{24} & \dots & c_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & c_{n3} & c_{n4} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(37)$$

のようなになる。

したがって、この手法をくり返し行えば、えられる matrix は一般に式 (33) の g のような形になる。すなわち

$$g = \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & g_{1m} & \cdots & g_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & g_{2m} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & g_{mm} & \cdots & g_{mn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & g_{nn} \end{array}$$

これに対して、

$$M_g = \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & -g_{1m}/g_{mm} & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -g_{2m}/g_{mm} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1/g_{mm} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -g_{nm}/g_{mm} & \cdots & 1 \end{array} \quad \cdots (38)$$

を考え、 $M_g g$ を計算すれば、式 (35)、式 (37) と全く同一形の matrix を求めることができる。最後に、

$$M_n = \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & -n_{1n}/n_{nn} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & -n_{2n}/n_{nn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1/n_{nn} \end{array} \quad \cdots (39)$$

を用いると、結局

$$M_n M_{n-1} \cdots M_2 M_1 D = I$$

または

$$D^{-1} = M_n M_{n-1} \cdots M_2 M_1$$

ゆえに、式 (30) において

$$X = -D^{-1} D_0 \\ = -M_n M_{n-1} \cdots M_2 M_1 D_0 \quad \cdots (40)$$

となり、連立一次方程式の解がえられることになる。

この計算では、すでに明らかのように、各 step において求められる matrix の diagonal element g_{mm} が 0 となつてはならない。

一般に matrix D において $d_{ii} \gg d_{ij} (i \neq j)$ ならば、 g_{mm} は 0 とならない。また、 $d_{ii} > d_{ij}$ は計算結果の精度をよくする上からも必要なものである。Argyris は、この意味から、不静定力のとり方が重要であることを、つぎのような 2 スパン連続ばりの例を通じて強調している (図-7)。

簡単に、所要の結果のみを示すと、(a) の場合、 D は

$$D = \begin{vmatrix} 29 & 9 \\ 9 & 4 \end{vmatrix}$$

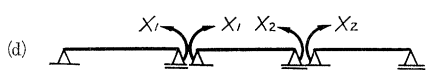
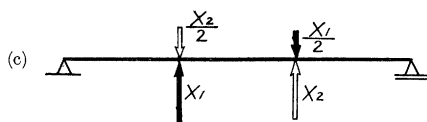
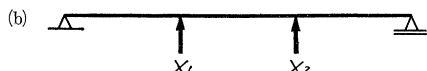
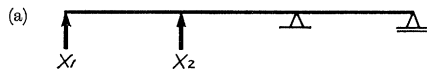
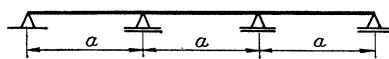
で $d_{22} < d_{12}$ であるから、不静定力のきわめて悪い選択である。

(b) では、

$$D = \begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

となり、(a) の場合よりよいが、diagonal element と off-diagonal element が同じ order となっており、必ずしもよい選択ではない。(c) の場合は、直接求めることもできるが、これは (b) の D に

図-7



$$B = \begin{vmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{vmatrix}$$

を operate すれば求められる。すなわち、式 (21) より

$$B^T D B = \frac{3}{4} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

となる。(d) について、同様に D を求めると、

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

となり、これは上の (c) の結果と一致する。また、この構造物における最もよい不静定力の選択であるが、これらは Clapeyron の 3 連モーメント式と一致することは興味深いことである。

このように不静定力の選定はきわめて重要なものであるが、複雑な構造物についての一般的手法はまだ確立されていないようである。

5. 最近の構造工学の二、三の話題

前節までは、最近の構造力学の体系および電子計算機の出現にともなう理論的研究のうち、いくつかの基礎的・話題について説明した。

ここで述べた結果はそのほとんどが、何らかの形で従来の構造力学の中にふくまれているものであるが、これらはいずれもが独立かつ断片的であり、統一の見解によって説明する試みがなされていなかったようである。この意味でエネルギー論は今後とも理論的発展の基になるものと考えられる。他方われわれが直接関与するいく

つかの構造工学上の問題も見逃すことはできない。

(1) 設計の自動化に関する研究

構造工学は構造物の力学的性状を考究し、構造物の使用目的に対して合理的な設計を行なうための基礎を与えるものである。実際に構造物を設計するためには、構造物の力学的性状を表わす常数だけでは構造物の形状、寸法が決定されない場合が多い。構造物の形を決定するためには、まず構造物の力学的特性を表わす常数を決定し、決まらない形状に関する値は、技術者の経験と直観によって、できるだけ所要建設費を少なくするようにするのが従来の設計法である。しかしこの方法は合理性を欠く点が多い。

この設計問題を合理的に解析しようとして、Moriceらは、簡単な立体ラーメン構造を、種々の幾何学的形状に設計し、いろいろの parameter に対する構造重量の変動のうちから、重量最小のものを見出すことを試みている⁹⁾。これはいまだ設計の実用の域には到達していないが、その理論の基礎は経費最小の条件を構造重量最小の目標に置きかえ、これにある線型計画を応用しようとするものである。今後の研究問題として開発が望まれるものの一つである。

(2) 曲面板構造に関する研究

土木構造物は、はり、トラス構造から平板構造、立体構造へと進歩、発展してきているが、曲面を利用した例は非常に少ない。材料の進歩、構造力学の進歩は必然的に slender な構造物、より軽い構造物の出現を可能にしている。これにともなって曲線あるいは曲面を有する構造も土木構造物として取り入れられる傾向にある。従来建築物では shell 構造の利用によっていちじるしい発展を示してきたが、また航空機、船舶の部門における構造解析でも、この曲面板構造は主要な課題と考えられる。

(3) 構造物の極限解析

現在の構造設計は、主として材料の降伏点強度を基準とした許容応力法によるものであり、真の構造物の耐荷力を基準にしたものではない。構造物をより合理的に設計し、さらに構造物の過荷重状態における性状を把握するためには、いわゆる極限設計法によるのが、より好ましいわけである。かかる意味から構造力学の分野においても、構造物の極限解析が、きわめて重要な研究課題とされている。わが国では造船、建築の分野で、活発な研究が行なわれ、とくに建築学会からは、その成果がとりまとめて出版されている⁹⁾。土木工学の分野でも今後この方面の研究が活発に行なわれねばならない。

とくに土木構造物では、荷重が移動するという特殊性をもち、解析がはなはだ複雑であるが、それだけ今後に残された問題が多く、またこの方面に電子計算機を利用して、問題を解析する分野がきわめて多い。さらに極限

解析では、構造物の局部的破壊、あるいは塑性座屈の問題があり、この方面における実験的、理論的研究の推進が望まれる。

(4) その他

橋梁構造の経済設計は、まず重量を減少することであることは前述のとおりである。この観点から、箱桁形式、鋼床板床組などが研究されてきたが、これらの構造物の特徴が大きな荷重に対して local な変形をしやすいということはすでに周知の事実である。しかしながら、この局部的変形がただちに構造物の破壊を意味するものではない。たとえば、鋼床板では破壊に至るまでにその力学的性状が変化する。すなわち、普通の曲げ抵抗から、bending stress と membrane stress の一体的抵抗に変わり⁹⁾、この解析には、非線型の von Kármán の式が基礎と考えられている。

いま一つの話題は、わが国が地震国であるということより、耐震設計に関するものである。すなわち、耐震工学上の最大の問題は、いかに地震力を標準化するかということである。最近の構造物は非常に slender なものが多く、したがって、慣用の震度設計法では構造物の耐震特性を合理的に検討するものではない。換言すれば、外力の時間変動と構造物の時間に対する依存性の関係がここでの主題である。外力の時間的変動をどのように理想化するかということは、この意味から、土木構造力学上きわめて重要な問題であり、この方面の研究の発展が望まれる。

6. む す び

最近の構造力学の話題として、電子計算機を利用するという観点から英国の Henderson, Morice, Argyrisらの研究を紹介した。紙面の関係上、その詳細を論議することができなかったが、これらの問題に興味をもっておられる研究者の一助ともなれば幸いである。

最後に本文をまとめるに当り白石成人助教授の協力を得たことを付記し深謝の意を表わす。

参 考 文 献

- 1) Morice, Linear Structural Analysis, Ronald, 1959
- 2) Argyris & Hunt, Energy Theorems and Structural Analysis, Butterworths, London, 1960
- 3) Langhaar, Energy Methods in Applied Mechanics, Wiley, 1962
- 4) Morice, Symposium on the use of Computers in Civil Engineering, Paper No. 50, Lisbon, Oct. 1962
- 5) 建築構造物のリミットアナリシス, 日本建築学会 1963
- 6) Chen, Dzialo, Harris, White, Yan, Symposium on the use of Computers in Civil Engineering, Paper No. 46, Lisbon, October, 1962

注 1) 表-1 は文献の 1) の Morice の著書より copy している。

2) 表-2 は文献の 2) の Argyris & Hunt の著書より copy している。(1963.9.2・受付)