

連続箱桁橋の近似解析法*

星 治 雄**

要 旨 連続支持の鋼床版箱桁橋について、主としてその変形を立体的に解析して、その近似解法を提示し、一例についての計算結果を添えたものである。

1. 概 説

著者はさきに単純箱桁橋の近似解法を発表した¹⁾。これと同様な考え方を連続箱桁橋に適用して、その解を得ることができる。

解析上の仮定はおおむね単純支持の場合と同様であるが、中間支点のところでは、箱桁はねじり固定の単純支持、床版は支持されていない、と仮定する。

次に解法の概要は次のとおりである。

- ① 全部の横桁をその支間中央のところで切断した構造を第1次基本系とする。
- ② 第1次基本系の中間支点を取り除いた単純支持の構造（これは単純箱桁橋の場合の基本系と同じ構造である）を第2次基本系とする。
- ③ 第2次基本系が外力をうける場合の中間支点のところの不静定反力を中間支点における諸条件（たわみおよびねじれ角が0である）から決定する。すなわち、任意の荷重に対する不静定反力の一般式を求める。
- ④ 以上で第2次基本系が解決するから、次に第1次基本系において、横桁切断面に働く不静定量を外力として取り扱い、これらによる支点反力、横桁切断面における変形量などの式を導く。
- ⑤ それらを使用して、横桁切断面における連続条件から、釣合条件式を誘導する。

上述のように、第2次基本系は単純支持の場合と同じ構造が取り扱われることになるが、中間支点が取り除かれたところに作用する不静定反力 (\bar{X}_j, \bar{Y}_j) が追加される点が相違する。

2. 基本系

基本系としては上述のように、全部の横桁をその支間中央のところで切断した箱桁と床版とよりなる構造を考えるが、この基本系の中間支点を取り除いた第2次基本系において、中間支点に相当するところに不静定力 \bar{X}_j および不静定ねじりモーメント \bar{Y}_j を作用させて、中間支点のたわみおよびねじれ角が0である条件を用いて、不静定量を決定すれば、 $x=0$ および $x=l$ の点で単純支持され、かつ箱桁によって弾性固定支持された床版を有する単純支持箱桁橋の解法²⁾ に帰することができる。

この際、取り扱う荷重としては対称荷重と逆対称荷重とにわけて解析しておけば、任意の荷重に対しては、これらを適宜重ね合わせることにより、その目的が達成される。

使用記号は大体前論文³⁾と同様であるから大部分は省略しおまなもののみあげる。

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{l}, K_{1n} = \frac{D}{EI_1} \alpha_n^{-1}, K_{2n} = \frac{D}{GJ} \alpha_n^{-1},$$

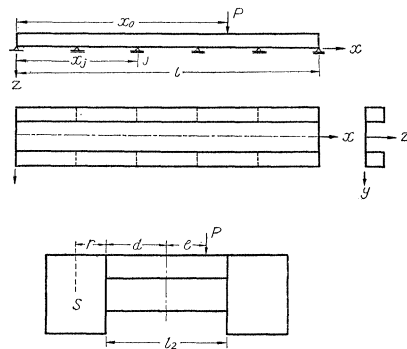
$$K_{3n} = \frac{EC_w}{GJ} \alpha_n^2, r_n = \frac{1}{1+K_{3n}}$$

ここで、

- D : 板の曲げ剛度
- EI_1 : 箱桁の曲げ剛性
- EI_2 : 横桁の曲げ剛性
- GJ : 箱桁の単純ねじり剛性
- EC_w : 箱桁の曲げねじり剛性

不静定量については、横桁切断面における X, \bar{X} と区別するため、中間支点の不静定反力は \bar{X}, \bar{Y} とする。なお座標系その他 図-1 のとおりである。

図-1

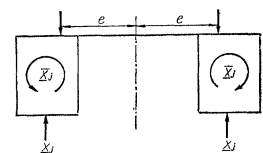


(1) 対称荷重

対称荷重の場合には中間支点のところにおける不静定量 \bar{X}_j, \bar{Y}_j は左右対称となって、その値は等しい(図-2)。ここで添字 j は第 j 番目の中間支点をあらわし、 \bar{X}_j, \bar{Y}_j の正方向は図のとおりとする。

以下解式の中間計算は単純支持の場合⁴⁾と同じであるから省略し、境界および連続条件とその結果とを記載することにする。

図-2



a) 不静定量 \bar{X}_j による中間支点の変形量 板のたわみの方程式を

* 土木学会・第15回年次学術講演会(昭35年5月)において一部発表

** 正員 工博 徳島大学教授 工学部土木工学教室

$$w = \sum_n L_n (A_n \cosh \alpha_n y + B_n \sinh \alpha_n y + C_n \alpha_n y \sinh \alpha_n y + D_n \alpha_n y \cosh \alpha_n y) \sin \alpha_n x \dots (1)$$

とすると、境界条件は次のとおりである。

表-1

| | | |
|---|-------|--|
| 1 | $y=0$ | $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$ |
| 2 | $y=0$ | $\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y} = 0$ |
| 3 | $y=d$ | $w = -\phi \cdot r + \delta$ |
| 4 | $y=d$ | $\frac{\partial w}{\partial y} = \phi$ |

ここで ϕ および δ は

$$-EC_w \frac{d^4 \phi}{dx^4} + GJ \frac{d^2 \phi}{dx^2} = D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=d} + D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right]_{y=d} \cdot \gamma \dots (2)$$

$$EI_l \frac{d^4 \delta}{dx^4} = D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right]_{y=d} - \sum_{j=1}^s \bar{X}_j \cdot U_l(x-x_j) \dots (3)$$

であって

$$\phi = \sum_n L_n R_n \sin \alpha_n x \dots (4)$$

$$\delta = \sum_n L_n S_n \sin \alpha_n x \dots (5)$$

$$\sum_{j=1}^s \bar{X}_j U_l(x-x_j) = \sum_n \frac{2}{l} \sum_{j=1}^s \bar{X}_j \sin \alpha_n x_j \cdot \sin \alpha_n x \dots (6)$$

と Fourier 級数展開されるものとして、以上から未定係数を決定すると次のようになる。ただし

$$N_n A_n = 2(K_{1n} + K_{2n} \gamma_n \alpha_n^2 r^2) \sinh^2 \alpha_n d + 2K_{2n} \gamma_n \cosh^2 \alpha_n d + \{1 - K_{1n} K_{2n} \gamma_n (1-\nu) - 2K_{2n} \gamma_n \alpha_n r (1-\nu)\} \alpha_n d + \{1 + K_{1n} K_{2n} \gamma_n (3+\nu)(1-\nu) + 2K_{2n} \gamma_n \alpha_n r (1+\nu)\} \sinh \alpha_n d \cosh \alpha_n d \dots (7)$$

とする。すると

$$N_n A_n = [1 + K_{2n} \gamma_n \{\alpha_n d(1-\nu) + \alpha_n r(1+\nu)\}] \sinh \alpha_n d + [\alpha_n d + K_{2n} \gamma_n \{2 - \alpha_n d \alpha_n r(1-\nu)\}] \cosh \alpha_n d \dots (8)$$

$$B_n = 0 \dots (9)$$

$$N_n C_n = -\{1 - K_{2n} \gamma_n \alpha_n r(1-\nu)\} \sinh \alpha_n d - K_{2n} \gamma_n (1-\nu) \cosh \alpha_n d \dots (10)$$

$$D_n = 0 \dots (11)$$

$$N_n S_n = 2K_{2n} \gamma_n \alpha_n^2 r^2 \sinh^2 \alpha_n d + 2K_{2n} \gamma_n \cosh^2 \alpha_n d + \{1 - 2K_{2n} \gamma_n \alpha_n r(1-\nu)\} \alpha_n d + \{1 + 2K_{2n} \gamma_n \alpha_n r(1+\nu)\} \sinh \alpha_n d \cosh \alpha_n d \dots (12)$$

$$N_n R_n = K_{2n} \gamma_n \alpha_n \{2 \alpha_n r \sinh^2 \alpha_n d + (1+\nu) \sinh \alpha_n d \cosh \alpha_n d - (1-\nu) \alpha_n d\} \dots (13)$$

$$L_n = -\frac{1}{EI_l \alpha_n^4} \cdot \frac{2}{l} \sum_{j=1}^s \bar{X}_j \sin \alpha_n x_j \quad (n=1, 2, 3, \dots) \dots (14)$$

以上から第 j 番目の中間支点のところのたわみおよびねじれ角は

$$(\delta_j^{\bar{X}j})_{y=d+r} = (\delta_j^{\bar{X}j})_{y=-(d+r)} = \sum_n L_n \bar{X}_j S_n \bar{X}_j \sin \alpha_n x_j \dots (15)$$

$$(\theta_{y_j}^{\bar{X}j})_{y=d+r} = -(\theta_{y_j}^{\bar{X}j})_{y=-(d+r)} = \sum_n L_n \bar{X}_j R_n \bar{X}_j \sin \alpha_n x_j \dots (16)$$

として表示される。

以上一連の式は中間支点について設立されたのであるが、 x_j の代りに中間支点でない任意の位置に対する x

の値を入れれば、その点に対する各量を求めることができることはいうまでもない（以下各場合についても同様である）。

b) 不静定量 \bar{X}_j による中間支点の変形量 境界条件

は **a)** の場合と同じであるが、 ϕ および δ に対する関係式は

$$-EC_w \frac{d^4 \phi}{dx^4} + GJ \frac{d^2 \phi}{dx^2} = D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=d} + D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right]_{y=d} \cdot r - \sum_{j=1}^s \bar{X}_j U_l(x-x_j) \dots (17)$$

$$EI_l \frac{d^4 \delta}{dx^4} = D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right]_{y=d} \dots (18)$$

となり、また

$$\phi = \sum_n L_n R_n \sin \alpha_n x \dots (4)$$

$$\delta = \sum_n L_n S_n \sin \alpha_n x \dots (5)$$

$$\sum_{j=1}^s \bar{X}_j \cdot U_l(x-x_j) = \sum_n \frac{2}{l} \sum_{j=1}^s \bar{X}_j \sin \alpha_n x_j \cdot \sin \alpha_n x \dots (19)$$

と Fourier 級数展開されるものとする、結果は次のようになる。

$$N_n A_n = \{\alpha_n(d+r) - K_{1n}(1+\nu)\} \sinh \alpha_n d + \{\alpha_n d \alpha_n r + K_{1n} \alpha_n d(1-\nu)\} \cosh \alpha_n d \dots (20)$$

$$B_n = 0 \dots (21)$$

$$N_n C_n = -\{\alpha_n r + K_{1n}(1-\nu)\} \sinh \alpha_n d - \cosh \alpha_n d \dots (22)$$

$$D_n = 0 \dots (23)$$

$$N_n S_n = K_{1n} \{\alpha_n d(1-\nu) - (1+\nu) \sinh \alpha_n d \cosh \alpha_n d - 2 \alpha_n r \sinh^2 \alpha_n d\} \dots (24)$$

$$N_n R_n = -\alpha_n \{\alpha_n d + \sinh \alpha_n d \cosh \alpha_n d + 2K_{1n} \sinh^2 \alpha_n d\} \dots (25)$$

$$L_n = -\frac{\bar{r}_n}{GJ \alpha_n^4} \cdot \frac{2}{l} \cdot \sum_{j=1}^s \bar{X}_j \cdot \sin \alpha_n x_j \quad (n=1, 2, 3, \dots) \dots (26)$$

以上から第 j 番目の中間支点のところの変形量は次のようになる。

$$(\delta_j^{\bar{X}j})_{y=d+r} = (\delta_j^{\bar{X}j})_{y=-(d+r)} = \sum_n L_n \bar{X}_j S_n \bar{X}_j \sin \alpha_n x_j \dots (27)$$

$$(\theta_{y_j}^{\bar{X}j})_{y=d+r} = -(\theta_{y_j}^{\bar{X}j})_{y=-(d+r)} = \sum_n L_n \bar{X}_j R_n \bar{X}_j \sin \alpha_n x_j \dots (28)$$

c) 外力による中間支点のところの変形量 単純支持

の場合と全く同じであるから省略する。

d) 釣合条件式 以上 **a)** **b)** **c)** の各場合における

中間支点のところの変形量を加え合わせたものが 0 である条件によって、第 j 番目の中間支点に対して次式を得る。

$$\frac{2}{EI_l l} \sum_{j=1}^s \bar{X}_j \sin \alpha_n x_j \sum_n \frac{S_n \bar{X}_j}{\alpha_n^4} \sin \alpha_n x_j + \frac{2}{GJ l} \sum_{j=1}^s \bar{X}_j \sin \alpha_n x_j \sum_n \frac{\bar{r}_n S_n \bar{X}_j}{\alpha_n^3} \sin \alpha_n x_j = \sum_n (L_n S_n)^L \sin \alpha_n x_j \quad (n=1, 2, 3, \dots) \dots (29)$$

$$\frac{2}{EI_l l} \sum_{j=1}^s \bar{X}_j \sin \alpha_n x_j \sum_n \frac{R_n \bar{X}_j}{\alpha_n^4} \sin \alpha_n x_j + \frac{2}{GJ l}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^s \bar{X}_j \sin \alpha_n x_j \sum_n \frac{\gamma_n R_n \bar{X}_j}{\alpha_n^3} \sin \alpha_n x_j \\ & = \sum_n (L_n R_n)^L \sin \alpha_n x_j \quad (n=1, 2, 3, \dots) \dots\dots (30) \end{aligned}$$

これらの2式は各中間支点において求められ、総計2s個得られる。この2s元連立方程式を解くことによって、2s個の不静定反力 \bar{X}_j , \bar{X}'_j を決定することができる。上式中 S_n , R_n の右肩添字はそれぞれの場合に相当するところの S_n , R_n の価を用いることを意味する。

\bar{X}_j , \bar{X}'_j が求まれば、a), b) のそれぞれの場合の各式に \bar{X}_j , \bar{X}'_j の価を入れ、c) の各式に実荷重を入れて、たわみを求めんとする点の x の価を式(1)に適用すればよい。なお \bar{X}_j , \bar{X}'_j と実荷重とは L_n 内のみふくまれている。

いま $s=1$, $x_1 = \frac{l}{2}$ の場合について上式を具体的に示すと次のようになる。

$$\sum_n \frac{2 S_n \bar{X}_1}{E I_1 \alpha_n^4 l} \bar{X}_1 + \sum_n \frac{2 \gamma_n S_n \bar{X}_1}{G J \alpha_n^3 l} \bar{X}_1 = \sum_n (L_n S_n)^L (-1)^{n-1/2} \dots\dots (31)$$

$$\sum_n \frac{2 R_n \bar{X}_1}{E I_1 \alpha_n^4 l} \bar{X}_1 + \sum_n \frac{2 \gamma_n R_n \bar{X}_1}{G J \alpha_n^3 l} \bar{X}_1 = \sum_n (L_n R_n)^L (-1)^{n-1/2} \dots\dots (32)$$

以上を解けば

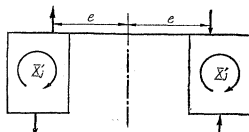
$$\begin{aligned} \bar{X}_1 = & \frac{\sum_n (L_n S_n)^L (-1)^{n-1/2} \sum_n \frac{\gamma_n R_n \bar{X}_1}{\alpha_n^3} - \sum_n (L_n R_n)^L (-1)^{n-1/2} \sum_n \frac{\gamma_n S_n \bar{X}_1}{\alpha_n^3}}{\frac{2}{E I_1 l} \left\{ \sum_n \frac{S_n \bar{X}_1}{\alpha_n^4} \sum_n \frac{\gamma_n R_n \bar{X}_1}{\alpha_n^3} - \sum_n \frac{R_n \bar{X}_1}{\alpha_n^4} \sum_n \frac{\gamma_n S_n \bar{X}_1}{\alpha_n^3} \right\}} \\ & (n=1, 3, 5, \dots) \dots\dots (33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{X}_1 = & \frac{\sum_n (L_n R_n)^L (-1)^{n-1/2} \sum_n \frac{S_n \bar{X}_1}{\alpha_n^4} - \sum_n (L_n S_n)^L (-1)^{n-1/2} \sum_n \frac{R_n \bar{X}_1}{\alpha_n^4}}{\frac{2}{G J l} \left\{ \sum_n \frac{S_n \bar{X}_1}{\alpha_n^4} \sum_n \frac{\gamma_n R_n \bar{X}_1}{\alpha_n^3} - \sum_n \frac{R_n \bar{X}_1}{\alpha_n^4} \sum_n \frac{\gamma_n S_n \bar{X}_1}{\alpha_n^3} \right\}} \\ & (n=1, 3, 5, \dots) \dots\dots (34) \end{aligned}$$

(2) 逆対称荷重

逆対称荷重の場合は中間支点のところに作用する不静定量 \bar{X}'_j , \bar{X}_j は逆対称となり、その絶対値は等しい。それらの正方向は図-3のとおりである。

図-3



a) 不静定量 \bar{X}'_j による中間支点の変形量 板の方程式について、その境界条件は表-2のとおりであり、

表-2

| | | |
|---|-------|---|
| 1 | $y=0$ | $w=0$ |
| 2 | $y=0$ | $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$ |
| 3 | $y=d$ | $w = -\phi \cdot r + \delta$ |
| 4 | $y=d$ | $\frac{\partial w}{\partial y} = \phi$ |

ϕ および δ に対する関係式は

$$\begin{aligned} -EC_w \frac{d^4 \phi}{dx^4} + GJ \frac{d^2 \phi}{dx^2} = D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=d} \\ + D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right]_{y=d} \cdot r \dots\dots (35) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EI_1 \frac{d^4 \delta}{dx^4} = D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right]_{y=d} \\ - \sum_{j=1}^s \bar{X}'_j U_I(x-x_j) \dots\dots (36) \end{aligned}$$

であって、また従前のように

$$\phi = \sum_n L_n R_n \sin \alpha_n x \dots\dots (4)$$

$$\delta = \sum_n L_n S_n \sin \alpha_n x \dots\dots (5)$$

$$\sum_{j=1}^s \bar{X}'_j U_I(x-x_j) = \sum_n \frac{2}{l} \sum_{j=1}^s \bar{X}'_j \sin \alpha_n x_j \cdot \sin \alpha_n x \quad (37)$$

と Fourier 級数展開されるものとして、以上から板の方程式の未定係数を求めると次のようになる。ただし

$$\begin{aligned} N_n' = & 2(K_{1n} + K_{2n} \gamma_n \alpha_n^2 r^2) \cosh^2 \alpha_n d + 2K_{2n} \gamma_n \sinh^2 \alpha_n d \\ & - \{1 - K_{1n} K_{2n} \gamma_n (1-\nu) - 2K_{2n} \gamma_n \alpha_n r (1-\nu)\} \alpha_n d \\ & + \{1 + K_{1n} K_{2n} \gamma_n (1-\nu) (3+\nu) + 2K_{2n} \gamma_n \alpha_n r (1+\nu)\} \\ & \sinh \alpha_n d \cosh \alpha_n d \dots\dots (38) \end{aligned}$$

とする。すると

$$A_n = 0 \dots\dots (39)$$

$$\begin{aligned} N_n' B_n = & [1 + K_{2n} \gamma_n \{\alpha_n d (1-\nu) + \alpha_n r (1+\nu)\}] \cosh \alpha_n d \\ & + [\alpha_n d + K_{2n} \gamma_n \{2 - \alpha_n d \alpha_n r (1-\nu)\}] \sinh \alpha_n d \\ & \dots\dots (40) \end{aligned}$$

$$C_n = 0 \dots\dots (41)$$

$$\begin{aligned} N_n' D_n = & -\{1 - K_{2n} \gamma_n \alpha_n r (1-\nu)\} \cosh \alpha_n d - K_{2n} \gamma_n \\ & (1-\nu) \sinh \alpha_n d \dots\dots (42) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_n' S_n = & 2K_{2n} \gamma_n \alpha_n^2 r^2 \cosh^2 \alpha_n d + 2K_{2n} \gamma_n \sinh^2 \alpha_n d \\ & - \{1 - 2K_{2n} \gamma_n \alpha_n r (1-\nu)\} \alpha_n d + \{1 + 2K_{2n} \gamma_n \alpha_n r \\ & (1+\nu)\} \sinh \alpha_n d \cosh \alpha_n d \dots\dots (43) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_n' R_n = & K_{2n} \gamma_n \alpha_n [2 \alpha_n r \cosh^2 \alpha_n d + (1+\nu) \sinh \alpha_n d \\ & \cosh \alpha_n d + (1-\nu) \alpha_n d] \dots\dots (44) \end{aligned}$$

$$L_n = -\frac{1}{E I_1 \alpha_n^4} \cdot \frac{2}{l} \cdot \sum_{j=1}^s \bar{X}'_j \sin \alpha_n x_j \quad (n=1, 2, 3, \dots) \dots\dots (45)$$

以上から第j番目の中間支点のところに変形量を次のように求めることができる。

$$\begin{aligned} (\delta_j \bar{X}'_j)_{y=d+r} = & -(\delta_j \bar{X}'_j)_{y=-(d+r)} = \sum_n L_n \bar{X}'_j S_n \bar{X}'_j \sin \alpha_n x_j \\ & \dots\dots (46) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\theta_{\frac{\partial \bar{X}'_j}{\partial y}})_{y=d+r} = & (\theta_{\frac{\partial \bar{X}'_j}{\partial y}})_{y=-(d+r)} + \sum_n L_n \bar{X}'_j R_n \bar{X}'_j \sin \alpha_n x_j \\ & \dots\dots (47) \end{aligned}$$

b) 不静定量 \bar{X}_j による中間支点の変形量 境界条件は a) の場合と同じであるが、 ϕ および δ に対する関係式は

$$\begin{aligned} -EC_w \frac{d^4 \phi}{dx^4} + GJ \frac{d^2 \phi}{dx^2} = D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=d} \\ + D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right]_{y=d} \\ \cdot r - \sum_{j=1}^s \bar{X}_j U_I(x-x_j) \dots\dots (48) \end{aligned}$$

$$EI_1 \frac{d^4 \delta}{dx^4} = D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right]_{y=d} \dots\dots (49)$$

となり、また

$$\phi = \sum_n L_n R_n \sin \alpha_n x \dots\dots\dots(4)$$

$$\delta = \sum_n L_n S_n \sin \alpha_n x \dots\dots\dots(5)$$

$$\sum_{j=1}^s \bar{X}_j' \cdot U_j(x-x_j) = \sum_n \frac{2}{l} \sum_{j=1}^s \bar{X}_j' \sin \alpha_n x_j \cdot \sin \alpha_n x \dots\dots\dots(50)$$

と Fourier 級数展開されるものとする、未定係数は次のように決定される。

$$A_n = 0 \dots\dots\dots(51)$$

$$N_n' B_n = \{\alpha_n(d+r) - K_{1n}(1+\nu)\} \cosh \alpha_n d + \{\alpha_n d \alpha_n r + K_{1n} \alpha_n d(1-\nu)\} \sinh \alpha_n d \dots\dots\dots(52)$$

$$C_n = 0 \dots\dots\dots(53)$$

$$N_n' D_n = -\{\alpha_n r + K_{1n}(1-\nu)\} \cosh \alpha_n d - \sinh \alpha_n d \dots\dots\dots(54)$$

$$N_n' S_n = -K_{1n} \{\alpha_n d(1-\nu) + (1+\nu) \sin \alpha_n d \cosh \alpha_n d + 2 \alpha_n r \cosh^2 \alpha_n d\} \dots\dots\dots(55)$$

$$N_n' R_n = \alpha_n \{\alpha_n d - \sinh \alpha_n d \cosh \alpha_n d - 2 K_{1n} \cosh^2 \alpha_n d\} \dots\dots\dots(56)$$

$$L_n = -\frac{\gamma_n}{GJ \alpha_n^3} \cdot \frac{2}{l} \sum_{j=1}^s \bar{X}_j' \sin \alpha_n x_j \quad (n=1, 2, 3, \dots) \dots\dots\dots(57)$$

以上から第 j 番目の中間支点のところの変形量は次のとおりである。

$$(\delta_j \bar{X}_j')_{y=d+r} = -(\delta_j \bar{X}_j')_{y=-(d+r)} = \sum_n L_n \bar{X}_j' S_n \bar{X}_j' \sin \alpha_n x_j \dots\dots\dots(58)$$

$$(\theta_{x_j}^{\bar{X}_j'})_{y=d+r} = (\theta_{x_j}^{\bar{X}_j'})_{y=-(d+r)} = \sum_n L_n \bar{X}_j' R_n \bar{X}_j' \sin \alpha_n x_j \dots\dots\dots(59)$$

c) 外力による中間支点のところの変形量 対称荷重の場合と同様である。

d) 釣合条件式 対称荷重の場合と同様にして、第 j 番目の中間支点に対して次の2式を得る。

$$\frac{2}{EI_1 l} \sum_{j=1}^s \bar{X}_j' \sin \alpha_n x_j \cdot \sum_n \frac{S_n \bar{X}_j'}{\alpha_n^4} \sin \alpha_n x_j + \frac{2}{GJ} \sum_{j=1}^s \bar{X}_j' \sin \alpha_n x_j \cdot \sum_n \frac{\gamma_n S_n \bar{X}_j'}{\alpha_n^3} \sin \alpha_n x_j = \sum_n (L_n S_n)^L \sin \alpha_n x_j \quad (n=1, 2, 3, \dots) \dots\dots\dots(60)$$

$$\frac{2}{EI_1 l} \sum_{j=1}^s \bar{X}_j' \sin \alpha_n x_j \cdot \sum_n \frac{R_n \bar{X}_j'}{\alpha_n^4} \sin \alpha_n x_j + \frac{2}{GJ} \sum_{j=1}^s \bar{X}_j' \sin \alpha_n x_j \cdot \sum_n \frac{\gamma_n R_n \bar{X}_j'}{\alpha_n^3} \sin \alpha_n x_j = \sum_n (L_n R_n)^L \sin \alpha_n x_j \quad (n=1, 2, 3, \dots) \dots\dots\dots(61)$$

以上から未知量 \bar{X}_j' , \bar{X}_j' を決定することができる。記号については対称荷重の場合と同様である。未知量が求まれば対称荷重の場合のようにして、所要の解を得る。

いま $s=1$, $x_1=l/2$ の場合について、上式を具体的に示すと次のとおりである。

$$\sum_n \frac{2 S_n \bar{X}_1'}{EI_1 \alpha_n^4 l} \bar{X}_1' + \sum_n \frac{2 \gamma_n S_n \bar{X}_1'}{GJ \alpha_n^3 l} \bar{X}_1' = \sum_n (L_n S_n)^L (-1)^{n-1/2} \quad (n=1, 3, 5, \dots) \dots\dots\dots(62)$$

$$\sum_n \frac{2 R_n \bar{X}_1'}{EI_1 \alpha_n^4 l} \bar{X}_1' + \sum_n \frac{2 \gamma_n R_n \bar{X}_1'}{GJ \alpha_n^3 l} \bar{X}_1' = \sum_n (L_n R_n)^L (-1)^{n-1/2} \quad (n=1, 3, 5, \dots) \dots\dots\dots(63)$$

これを解けば

$$\bar{X}_1' = \frac{\sum_n (L_n S_n)^L (-1)^{n-1/2} \sum_n \frac{\gamma_n R_n \bar{X}_1'}{\alpha_n^3} - \sum_n (L_n R_n)^L (-1)^{n-1/2} \sum_n \frac{\gamma_n S_n \bar{X}_1'}{\alpha_n^3}}{\frac{2}{EI_1 l} \left\{ \sum_n \frac{S_n \bar{X}_1'}{\alpha_n^4} \sum_n \frac{\gamma_n R_n \bar{X}_1'}{\alpha_n^3} - \sum_n \frac{R_n \bar{X}_1'}{\alpha_n^4} \sum_n \frac{\gamma_n S_n \bar{X}_1'}{\alpha_n^3} \right\}} \quad (n=1, 3, 5, \dots) \dots\dots\dots(64)$$

$$\bar{X}_1' = \frac{\sum_n (L_n R_n)^L (-1)^{n-1/2} \sum_n \frac{S_n \bar{X}_1'}{\alpha_n^4} - \sum_n (L_n S_n)^L (-1)^{n-1/2} \sum_n \frac{R_n \bar{X}_1'}{\alpha_n^4}}{\frac{2}{GJ l} \left\{ \sum_n \frac{S_n \bar{X}_1'}{\alpha_n^4} \sum_n \frac{\gamma_n R_n \bar{X}_1'}{\alpha_n^3} - \sum_n \frac{R_n \bar{X}_1'}{\alpha_n^4} \sum_n \frac{\gamma_n S_n \bar{X}_1'}{\alpha_n^3} \right\}} \quad (n=1, 3, 5, \dots) \dots\dots\dots(65)$$

3. 横桁を有する場合 (原構造系)

単純支持の場合と同様に、横桁切断面のところに不静定量が作用したときの変形量を基本系における横桁切断面のところにおいて求め、その連結の条件から不静定量を決定する。

(1) 対称荷重

横桁切断面において不静定量 $X_i=0$ となるから、 \bar{X}_i のみとなる。いま \bar{X}_i および荷重による基本系の $x=x_i$ の点の箱桁のせん断中心のねじれ角がそれぞれ

$$(\theta_{x_i})_{y=d+r}^{\bar{X}_i} = \sum_n (L_n R_n)^{\bar{X}_i} \sin \alpha_n x_i \dots\dots\dots(66)$$

$$(\theta_{x_i})_{y=d+r}^L = \sum_n (L_n R_n)^L \sin \alpha_n x_i \dots\dots\dots(67)$$

と表わされるものとする、第 i 番目の横桁に対して、釣合条件式は

$$\sum_n (L_n R_n)^{\bar{X}_i} \sin \alpha_n x_i + \frac{l_2}{2 EI_2} \bar{X}_i = -\sum_n (L_n R_n)^L \sin \alpha_n x_i \quad (n=1, 2, 3, \dots) \dots\dots\dots(68)$$

となる。

(2) 逆対称荷重

この場合は不静定量 $\bar{X}_i=0$ となって、 X_i のみとなる。いま X_i および実荷重による基本系の $x=x_i$ の点の箱桁のせん断中心のねじれ角をそれぞれ

$$(\theta_{x_i})_{y=d+r}^{X_i} = \sum_n (L_n R_n)^{X_i} \sin \alpha_n x_i \dots\dots\dots(69)$$

$$(\theta_{x_i})_{y=d+r}^L = \sum_n (L_n R_n)^L \sin \alpha_n x_i \dots\dots\dots(70)$$

とし、たわみをそれぞれ

$$(\delta_i)_{y=d+r}^{X_i} = \sum_n (L_n S_n)^{X_i} \sin \alpha_n x_i \dots\dots\dots(71)$$

$$(\delta_i)_{y=d+r}^L = \sum_n (L_n S_n)^L \sin \alpha_n x_i \dots\dots\dots(72)$$

とすると、釣合条件式は第 i 番目の横桁に対して

$$\sum_n L_n X_i \{S_n - R_n(d+r)\} \sin \alpha_n x_i - \frac{l_2^3}{24 EI_2} X_i = -\sum_n L_n^L \{S_n - R_n(d+r)\} \sin \alpha_n x_i \quad (n=1, 2, 3, \dots) \dots\dots\dots(73)$$

となる。

以上の釣合条件式は横桁ごとにも得られるから、それらによる連立方程式を解くことによって、不静定量 X_i , \bar{X}_i を決定することができる。

(3) 記号の説明およびその求め方

以上において、 L_n , R_n , S_n などはそれぞれ右肩の添字で表わされている量が荷重として基本系に作用した場合、前節において導いた解式を使用して計算される量である。例えば荷重項としての $(L_n R_n)^L$, $(L_n S_n)^L$ などは

$$\textcircled{1} \text{ 対称荷重}$$

$$\sum_n (L_n R_n)^L \sin \alpha_n x_i = \sum_n (L_n R_n)^{x_j} + (L_n R_n)^{x_j'} + (L_n R_n)^L \sin \alpha_n x_i \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (74)$$

$$\textcircled{2} \text{ 逆対称荷重}$$

$$\sum_n L_n^L \{S_n - R_n(d+r)\}^L \sin \alpha_n x_i = \sum_n \{(L_n S_n)^{x_j'} + (L_n S_n)^{x_j} + (L_n S_n)^L \sin \alpha_n x_i - \sum_n (d+r) \{(L_n R_n)^{x_j'} + (L_n R_n)^{x_j} + (L_n R_n)^L \sin \alpha_n x_i \} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (75)$$

のようにして計算できる。ほかの $(L_n R_n)^{x_i}$, $(L_n S_n)^{x_i}$, $(L_n R_n)^{x_j}$ などについても同様であって例えば $(L_n R_n)^{x_i}$ ならば、対称荷重の式についていえば、右辺の $(L_n R_n)^{x_i}$ などは実荷重でなくて X_i による価である。すなわち、この場合の右肩添字の X_j は原因が実荷重でなく、 X_i によるところの X_j である。

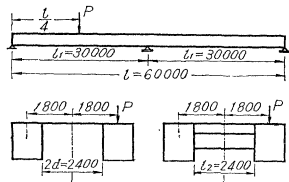
以上のように X_i , \bar{X}_i が決定すれば、それ以後の手順は単純支持の場合と同様に、基本系に X_i , \bar{X}_i を荷重として作用させて、必要な諸量を決定することができる。

(4) 計算方法について

以上単純箱桁橋の解を利用するため、第1次および第2次基本系を別々に考慮したが、実際計算の際には、全部の不静定量、すなわち X , \bar{X} , X' , \bar{X}' を同時に作用させて、横桁切断面の連続条件および中間支点における変位および回転が0である条件を適用して、一挙に解決するのが簡明であるように思われる。

4. 計算例

図-4 に示すような寸法であって、各支間中央に1横桁を有する2径間連続箱桁橋の基本系および



原構造系について、一方の支間中央において、いずれかの1主桁中央上に集中荷重 P kg が作用する場合は

たわみを計算する。ただし、橋軸方向における主桁のたわみは箱桁部分のせん断中心について求め、横断面におけるたわみはそれぞれの支間の中央断面 ($x=l/4$ および $x=$

$3l/4$) における床版の変形変位状態を示す。なお、横桁はそれぞれの位置における連結部材としてそのまま取り扱うのであって、このことは1支間に2横桁以上存在する場合も同様である。

計算に必要な各剛性諸元は次のようである。

$$\begin{aligned} \text{主桁の曲げ剛性} & EI_1 = 4.347 \times 10^{12} \text{ kg/cm}^2 \\ \text{主桁の単純ねじり剛性} & GJ = 1.803 \times 10^{12} \text{ kg/cm}^2 \\ \text{主桁の曲げねじり剛性} & EC_w = 6.937 \times 10^{14} \text{ kg/cm}^4 \\ \text{横桁の曲げ剛性} & EI_2 = \frac{1}{120} EI_1 = 3.623 \times 10^{10} \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

$$\text{板の曲げ剛度} \quad D = \frac{Et^3}{12(1-\nu)} = 3.482 \times 10^9 \text{ kg/cm}$$

計算手順およびその結果は次のとおりである。

(1) 未定係数の算定

板のたわみの方程式 (式(1)) における未定係数 A_n , B_n , C_n , D_n および R_n , S_n は荷重状態が与えられれば決定されるが、前に述べたところから明らかであるように、次のような場合が取り扱われることになる。

表-3

| (a) 対 称 荷 重 | (b) 逆 対 称 荷 重 |
|-----------------------------------|-----------------------------|
| i) 不 静 定 反 力 X | i) 不 静 定 反 力 X |
| ii) 不 静 定 反 力 X' | ii) 不 静 定 反 力 X' |
| iii) 実 荷 重 P | iii) 実 荷 重 P |
| iv) 横 桁 切 断 面 の 不 静 定 量 \bar{X} | iv) 横 桁 切 断 面 の 不 静 定 量 X |

以上の各場合について、それぞれ未定係数を決定するため、対称荷重については i) の場合には式 (7)~(14), ii) の場合には式 (20)~(26), また逆対称荷重については i) の場合には式 (38)~(45), ii) の場合には式 (51)~(57), 以上一連の式に上記諸元から算出される各量を入れて計算する。なお iii), iv) の場合については単純支持の場合に示したとおりである⁹⁾。その結果を以上8通りの場合について $n=1$ の場合のみを示すと表-4 のようになる。以下 $n=2, 3, \dots$ について同様に計算する。計算結果の精度をよくするためには、Fourier 級数の項数 n を増せばよいことはいままでもない。本計算例では $n=15$ に止めたが、その収斂性から見て相当な精度が得られたものと思われる。

次に各状態に応じての L_n を計算すれば、必要な数値資料がそろふことになる。

(2) 基本系

基本系の場合には上記 i), ii), iii) の組合わせであって、式 (60), (61) および (64), (65) により不静定反力が求められ、その結果は次のようになる。

$$\begin{aligned} \text{(a) 対称荷重の場合} & X = 0.6875 P \text{ (kg)} \\ & \bar{X} = 0.002474 P \text{ (kg/cm)} \\ \text{(b) 逆対称荷重の場合} & X' = 0.4619 P \text{ (kg)} \\ & \bar{X}' = -31.015 P \text{ (kg/cm)} \end{aligned}$$

次に (a) i), ii), iii) および (b) i), ii), iii) のそれぞれの場合について、以上求められた数値を式 (1) に適用して、それぞれの場合に対するたわみを求め、それ

表-4

| 荷重状態 | 係数 | | | | | | | | |
|------|-------|--------|----------|---------|-------|---------|--------|--------------------------|--------------------------|
| | N_1 | N_1' | A_1 | B_1 | C_1 | D_1 | R_1 | S_1 | |
| (a) | i) | 0.1328 | | 0.9998 | 0 | -0.4912 | 0 | 0.5529×10^{-6} | 0.9999 |
| | ii) | " | | 0.05897 | 0 | -7.558 | 0 | -0.4944×10^{-3} | -0.4380×10^{-3} |
| | iii) | " | | 0.9998 | 0 | -0.4912 | 0 | 0.5529×10^{-6} | 0.9999 |
| | iv) | " | | 0.05897 | 0 | -7.566* | 0 | -0.4944×10^{-3} | -0.4380×10^{-3} |
| (b) | i) | | 0.003302 | 0 | 304.8 | 0 | -303.4 | 0.1105×10^{-3} | 0.06949 |
| | ii) | " | " | 0 | 28.03 | 0 | -28.90 | -0.5130×10^{-3} | -0.08754 |
| | iii) | " | " | 0 | 304.8 | 0 | -303.4 | 0.1105×10^{-3} | 0.06949 |
| | iv) | " | " | 0 | 311.2 | 0 | -310.0 | -0.6066×10^{-5} | 0.04960 |

らを重ね合わせれば板の部分のたわみが求められる。また箱桁の部分のたわみおよびねじれ角は同様に式(4),(5)によって求めることができる。

その結果は図-5に示されるとおりである。ただし断面1-1は $x=l/4$ における横断面、断面2-2は $x=3l/4$ における横断面である。

(3) 原構造系

原構造系の場合(i),ii),iii),iv)の全部を組合わせて、釣合条件式から不静定量を求めればよい。その結果は次のようになる。ただし、 X_1, X_2 などの添字はそれぞれ断面1-1の位置、断面2-2の位置における不静定量であることを示す。

- | | |
|----------------------------------|-------------------------------|
| (a) 対称荷重の場合 | (b) 逆対称荷重の場合 |
| $\bar{X} = 0.6875 P$ (kg) | $\bar{X}' = 0.2146 P$ (kg) |
| $\bar{X} = 0.007396 P$ (kg/cm) | $\bar{X}' = -63.64 P$ (kg/cm) |
| $\bar{X}_1 = -0.01538 P$ (kg/cm) | $X_1 = 0.6604 P$ (kg) |
| $\bar{X}_2 = 0.005627 P$ (kg/cm) | $X_2 = -0.05987 P$ (kg) |

たわみ計算に必要な諸数値は Case i), ii), iii) に対しては基本系の場合と同じであって、これに Case iv) の諸数値を加味して重ね合わせればよい。その結果は

図-6

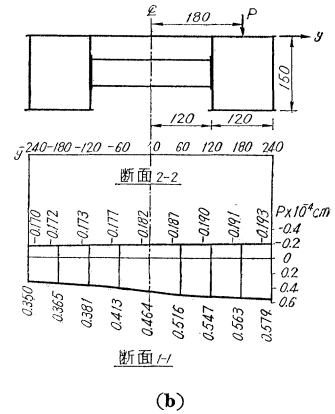


図-6に示すようになる。

(注) 以上の数値計算において、有効数字は9桁とって計算したのであるが、5桁以下は省略した。

5. むすび

以上により、連続箱桁橋に対する比較的簡明にして信頼し得る近似解法を提示することができた。応力に関しては、単純箱桁橋に関する前論文における仮定を準用して求めることができる。

なお計算結果から、横桁による荷重配分作用が大であることが明らかになったとともに、単純箱桁橋と連続箱桁橋との間の相関性は単純ばかりと連続ばかりとの相関性に類似であることが認められ、特に荷重配分その他の定性的性質に関して、単純格子桁と連続格子桁との相関関係とはほぼ同様であることが認められた。

参考文献

- 1) 星 治雄：箱桁橋の一解法について；土木学会第15回年次学術講演会および単純箱桁橋の近似解析法；土木学会論文集 第74号
- 2), 3), 4), 6) 上記文献参照
- 5) 曲げねじり剛性 EC_w の算出については下記文献に詳細述べられている。
小西一郎・小松定夫・大橋昭光：合成箱桁橋の応力解析と設計計算法；土木学会論文集 第25号および小西一郎：新しい道路橋；土木学会昭和33年度夏期講習会パンフレット，新しい建設工法

(原稿受付：1961. 8. 7)