

変形法による連続リブ アーチの解法

児 嶋 弘 行*
成 岡 昌 夫**

要 旨 従来の連続リブ アーチのおもな解法について検討し、“釣合方程式である連立一次方程式を、電子計算機を用いて解き、構造解析を行なう”という観点から、著者らのさきに報告した“変形法によるリブ アーチ構造の解法”¹⁾における、釣合方程式の機械的作表法がそのまま適用できることを述べた。ついで、節点釣合方程式、これの機械的作表法、および節点における断面力と変形量の関係式を提示した。

計算例として、2スパン連続リブ アーチについて断面力の影響線を作成し、固定アーチのそれと比較した。

1. ま え が き

従来の連続リブ アーチの計算においては、その構造が連続しているにかかわらず、起拱点における橋脚の弾性変形を無視し、各スパンを単一の独立した無ヒンジ リブ アーチと考慮して解き、なお橋脚に生じる応力や橋脚の安定度の計算においても、アーチから橋脚に伝達される反力を外力と考慮して取り扱い、橋脚自身の変形によるアーチ反力の大きさの変化を無視したものが多かった。

この不合理性をなくし、連続リブ アーチを、あくまで一つの弾性体として解析するために、三瀬、小野両博士は後述のような連続リブ アーチの解法を提唱した。

しかしながら、これらの方法は、いずれも、アーチを単一の部材として取り扱っているため、未知量を決定する連立一次方程式の元数はすくなくすむが、アーチ部分の計算に仕事式を用いる結果、積分計算を必要とし、このため、連立一次方程式にもってゆくまでに相当複雑な計算が必要である。従来は、多元連立一次方程式の計算や、逆マトリックスなどの計算自体に非常に労力を要したため、このような解法が用いられてきたのは当然である。しかし、現在、電子計算機の利用によって、多元連立一次方程式の計算、あるいは逆マトリックスの計算が簡単に、しかも、短時間にできるようになったので、連立一次方程式の元数を低下させて解析することよりも、むしろ、釣合条件式である連立一次方程式を機械的に求めて、これを電子計算機で解き、構造物の解析を

行なう方が望ましい。

著者らは、さきに変断面リブ アーチ 構造を適当なパネル数に分割し、各分割点間においては断面が一定である直線部材からなる多角形状剛節組構造とみなして、これに変形法の基本式を適用して、節点(分割点)における釣合方程式を誘導し、この節点釣合方程式の機械的作表法を提示し、さらに、これを固定リブ アーチに適用した場合、比較的よい結果が得られたことを報告した¹⁾。

ここでは、上述の観点から、この方法を連続リブ アーチに適用し、その計算例として、2スパン連続リブ アーチについて節点釣合方程式を作表し、KDC-1 を利用して、これの逆マトリックスを計算し、若干の影響線を求め、さきの固定リブ アーチのそれと比較して、橋脚の影響が相当にあることを認めた。

2. 従来の連続リブ アーチの解法

従来の連続リブ アーチのおもな解法には、三瀬博士の提唱された、九変位の定理、または、六変位の定理を用いる解法²⁾と、小野博士の提唱された、階差方程式を用いる方法³⁾がある。

前者は連続リブ アーチを、各橋脚頭(格点と称す)において切断し、各アーチと各橋脚とを、別々になるように切りはなしたものを考え、これら各アーチ、橋脚部分を、それぞれ、重心法を用いて解いて、弾性重心に作用させた不静定力(x, y 方向の各分力とモーメント)と格点の変形量との関係を求めておいて、九変位の定理(近似的には六変位の定理)を適用する方法である。九変位(六変位)の定理とは、著者らの誘導した、節点釣合方程式と類似のものであって、格点の変形量を求めるために、各格点における力の釣合条件を適用して、連続した三つの格点の弾性的な変形量の関係をあらわす一般式を求めたものであって、三つの格点の各分変位、すなわち、一つの格点について、 x, y 方向の変位および回転(六変位の定理では、橋脚頭の y 方向の変位を無視する)の都合9個(6個)の変形量の関係を、その間における荷重、温度変化、および、基礎移動などの値をもって表わした式である。この定理を各格点に応用すれば、未知の格点の変形量の数だけの式が得られ、これを連立一次方程式として解いて、格点の変形量を算定し、これを用いて、各不静定力を計算して、アーチおよび橋脚の

* 学生員 京都大学大学院工学研究科修士課程学生 土木工学専攻

** 正員 工博 名古屋大学・京都大学教授(併任) 工学部土木工学教室

任意の断面における断面力を算定する方法である。

後者は、前者と同じく、アーチと橋脚を分離して考え、各スパンのアーチに生じる曲げモーメント、反力、および変形を階差方程式を用いて解く方法で、この方法によれば、連続アーチのスパン数に関係なく2または、4元の連立一次方程式を解くだけで、各スパンのアーチおよび橋脚に生じる断面力、および、変形を計算することができる。しかし、この方法の適用範囲は、連続リブアーチにおいて、形状、材質のすべて等しい左右対称なアーチが、形状および材質の全く等しい多数の橋脚上に連続して架設された場合に限り、また、解法の仮定において、軸方向力による橋脚の軸方向の変位を無視している（これは、三瀬博士の六変位の定理の場合に相当する）ため、橋脚断面が相当大きな場合以外にこの方法を適用することは妥当でない。

3. 変形法による連続リブアーチの解法

連続リブアーチを、著者らがさきに発表した節点釣合方程式を用いて解く場合、アーチ部分については、さきの論文で採用した仮定と同一の仮定を採用する。すなわち、アーチ部分を適当に分割した場合、

- a) 分割点間の断面の諸性質は、変断面の場合の両端における値の中間値を用いる。
- b) したがって、断面の諸性質は、分割点間で一定であり、これらは分割点において階段的に変化する。
- c) アーチ軸線は分割点間で直線である。

とする。さらに、橋脚部に対しては、橋脚が短い場合でも、その上下両端における断面が相当異なっている場合には、これを分割してアーチ部分と同様に扱う。橋脚が相当に長くても、上下端での断面に大差のない場合には、一本の部材として扱う。

以上のようにすれば、連続リブアーチも、また、多角形状連続骨組構造として取り扱うことができるから、さきに述べた論文において固定リブアーチに適用した節点釣合方程式の機械的作表法がそのまま適用できる。ここに、その節点釣合方程式、釣合方程式の機械的作表法、および、節点における断面力と変形量の関係式を列記すれば、次のようである。

a) 節点釣合方程式

$$\left. \begin{aligned} & [\{\Sigma(a_{0i})\}u_0 - \Sigma(a_{0i})(u_i)] + \left[\left\{ -\Sigma(b_{0i}) + \Sigma(b_{0i}) \right\} v_0 \right. \\ & \left. + \Sigma(b_{0i})(v_i) - \Sigma(b_{0i})(v_i) \right] + \left[\left\{ -\Sigma(c_{0i}) + \Sigma(c_{0i}) \right\} \theta_0 \right. \\ & \left. - \Sigma(c_{0i})(\theta_i) + \Sigma(c_{0i})(\theta_i) \right] = P_{x0} \\ & \left[\left\{ -\Sigma(b_{0i}) + \Sigma(b_{0i}) \right\} u_0 + \Sigma(b_{0i})(u_i) - \Sigma(b_{0i})(u_i) \right] \\ & + [\{\Sigma(\bar{a}_{0i})\}v_0 - \Sigma(\bar{a}_{0i})(v_i)] + \left[\left\{ \Sigma(\bar{c}_{0i}) - \Sigma(\bar{c}_{0i}) \right\} \theta_0 \right. \\ & \left. + \Sigma(\bar{c}_{0i})(\theta_i) - \Sigma(\bar{c}_{0i})(\theta_i) \right] = P_{y0} \\ & \left[\left\{ -\Sigma(c_{0i}) + \Sigma(c_{0i}) \right\} u_0 + \Sigma(c_{0i})(u_i) - \Sigma(c_{0i})(u_i) \right] \end{aligned} \right\} (1)$$

$$\left. \begin{aligned} & + [\{\Sigma(\bar{c}_{0i}) - \Sigma(\bar{c}_{0i})\}v_0 - \Sigma(\bar{c}_{0i})(v_i) + \Sigma(\bar{c}_{0i})(v_i)] \\ & + [\{\Sigma(2d_{0i})\}\theta_0 + \Sigma(d_{0i})(\theta_i)] = M_{z0} \end{aligned} \right\}$$

上式中、

$$\left. \begin{aligned} a_{0i} &= \frac{12EI_{0i}}{l_{0i}^3} \sin^2 \phi_{0i} + \frac{EA_{0i}}{l_{0i}} \cos^2 \phi_{0i}, \\ \bar{a}_{0i} &= \frac{12EI_{0i}}{l_{0i}^3} \cos^2 \phi_{0i} + \frac{EA_{0i}}{l_{0i}} \sin^2 \phi_{0i}, \\ b_{0i} &= \left(\frac{12EI_{0i}}{l_{0i}^3} - \frac{EA_{0i}}{l_{0i}} \right) \sin \phi_{0i} \cos \phi_{0i}, \\ c_{0i} &= \frac{6EI_{0i}}{l_{0i}^2} \sin \phi_{0i}, \quad \bar{c}_{0i} = \frac{6EI_{0i}}{l_{0i}^2} \cos \phi_{0i}, \\ d_{0i} &= \frac{2EI_{0i}}{l_{0i}}, \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

である。なお、式(1)において Σ のもつ意味については、さきの論文を参照されたい。

b) 釣合方程式の機械的作表法

作表法—1 未知数 u, v, θ の係数に関する法則

行	釣合方程式	未知数	未知数に乘せられるべき係数		右辺
			左 辺		
			注目する節点	まわりの節点	
1	$\Sigma P_x + P_x = 0$	u	Σa	すべての部材に対し $-a$	P_x
2		v	$-\left(\Sigma b - \Sigma \bar{b}\right)$ $xy > 0$ の部材に対し b $xy < 0$ の部材に対し $-b$		
3		θ	$-\left(\Sigma c - \Sigma \bar{c}\right)$ $y > 0$ の部材に対し $-c$ $y < 0$ の部材に対し c		
4	$\Sigma P_y + P_y = 0$	u	第2行と同じ		P_y
5		v	$\Sigma \bar{a}$	すべての部材に対し $-\bar{a}$	
6		θ	$\left(\Sigma \bar{c} - \Sigma c\right)$ $x > 0$ の部材に対し \bar{c} $x < 0$ の部材に対し $-\bar{c}$		
7	$\Sigma M_x + M_x = 0$	u	第3行と同じ	第3行と符号を逆にする	M_x
8		v	第6行と同じ	第6行と符号を逆にする	
9		θ	$\Sigma 2d$	すべての部材に対し d	

c) 節点における断面力と変形量の関係

$$\left. \begin{aligned} \left[\begin{array}{c} P_{x0} \\ P_{y0} \\ (\Sigma M_{z0} + d_{01}\theta_0) \end{array} \right]_{01} &= - \left[\begin{array}{ccc} a_{01} - b_{01} - c_{01} \\ -b_{01} & \bar{a}_{01} & \bar{c}_{01} \\ -c_{01} & \bar{c}_{01} & d_{01} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} (u_0 - u_1) \\ (v_0 - v_1) \\ (\theta_0 + \theta_1) \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{c} P_{x0} \\ P_{y0} \\ (\Sigma M_{z0} + d_{02}\theta_0) \end{array} \right]_{02} &= - \left[\begin{array}{ccc} a_{02} & b_{02} - c_{02} \\ b_{02} & \bar{a}_{02} - \bar{c}_{02} \\ -c_{02} & \bar{c}_{02} & d_{02} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} (u_0 - u_2) \\ (v_0 - v_2) \\ (\theta_0 + \theta_2) \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{c} P_{x0} \\ P_{y0} \\ (\Sigma M_{z0} + d_{03}\theta_0) \end{array} \right]_{03} &= - \left[\begin{array}{ccc} a_{03} - b_{03} & c_{03} \\ -b_{03} & \bar{a}_{03} - \bar{c}_{03} \\ c_{03} - \bar{c}_{03} & d_{03} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} (u_0 - u_3) \\ (v_0 - v_3) \\ (\theta_0 + \theta_3) \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{c} P_{x0} \\ P_{y0} \\ (\Sigma M_{z0} + d_{04}\theta_0) \end{array} \right]_{04} &= - \left[\begin{array}{ccc} a_{04} & b_{04} & c_{04} \\ b_{04} & \bar{a}_{04} & \bar{c}_{04} \\ c_{04} & \bar{c}_{04} & d_{04} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} (u_0 - u_4) \\ (v_0 - v_4) \\ (\theta_0 + \theta_4) \end{array} \right] \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

4. 計 算 例

計算例として、図—1 に示すような鉄筋コンクリート2スパン連続アーチを例にとる。これは、上下端において、それぞれ、断面積、 $A_{12} = 1.3462 \text{ m}^2$, $A_{12}' = 1.5862 \text{ m}^2$, 断面二次モーメント $I_{12} = 0.1934 \text{ m}^4$, $I_{12}' = 0.3207 \text{ m}^4$ をもつ、高さ 15 m の橋脚上に、さきの論文において計

算例として用いた鉄筋コンクリート固定アーチ⁵⁾と全く同一のものを、二つ連続して架設したものである。固定アーチの計算例と比較するために、これのアーチ部分をそれぞれ、さきの例と同様に 12 個のパネルに分割する。橋脚は、上下断面における断面の諸性質に大差がないので、1本の部材として取り扱う。各部材の断面の諸元、および、式(2)の諸定数を計算すると、表-1 のようである。

表-1 各部材の諸性質

部材 諸元	0~1	1~2	2~3	3~4	4~5	5~6	12~12'
l (m)	3.3849	3.2135	3.1100	3.0493	3.0163	3.0017	15.0000
A (m ²)	1.2145	1.0479	0.9145	0.8145	0.7479	0.7145	1.4662
I (10 ⁻⁴ m ⁴)	1.4300	0.8986	0.5811	0.3979	0.2992	0.2563	2.5705
$\sin \phi$	0.46315	0.35841	0.26356	0.17914	0.10370	0.03393	1.00000
$\cos \phi$	0.88628	0.93357	0.96464	0.98382	0.99461	0.99942	0
a (10 ⁻¹ ·E·m)	2.91325	2.88369	2.75242	2.59076	2.45416	2.37777	0.00914
\bar{a} (10 ⁻¹ ·E·m)	1.11721	0.70207	0.42000	0.24873	0.15610	0.11634	0.97746
b (10 ⁻¹ ·E·m)	-1.29118	-0.98233	-0.68868	-0.44107	-0.24223	-0.07686	0
c (10 ⁻¹ ·E·m ²)	0.34683	0.18714	0.09501	0.04600	0.02046	0.00579	0.06855
\bar{c} (10 ⁻¹ ·E·m ²)	0.66368	0.48745	0.34775	0.25263	0.19627	0.17059	0
d (10 ⁻¹ ·E·m ³)	0.84492	0.55929	0.37371	0.26100	0.19840	0.17079	0.34273

表-1 をみて、 a -図、 \bar{a} -図、 b -図、 c -図、 \bar{c} -図、 d -図を作成すると、図-2 のようである。図-2 は、連続アーチの左半分についてのみの値を示しているが、右半分については、これと全く対称である。

a -図~ d -図をみて、作表法-1 の機械的作表法にしたがって、節点釣合方程式の係数行列を作表すれば、69 元の方角マトリックスとなる。しかしながら、KDC-1 では、方角マトリックスの逆マトリックスの計算能力は、約 60 元程度であるため、これをそのまま KDC-1 にかけて、逆マトリックスの計算をすることはできない。そこで、構造が対称であることに注目して、外荷重として対称荷重が作用した場合、逆対称荷重が作用した場合とに分けて取り扱うことにすれば、69 元の方角マトリックスは、それぞれ、対称(逆対称)荷重の作用した場合に対して 34 (35) 元の方角マトリックスに分けることができる。これを、表-2、表-3 に示す。

表-2、3 を、電子計算機で解けば、節点荷重による節点の変形量が求められる。KDC-1 を用いて、表-2、3 の逆マトリックスを計算するのに要する時間は、output の印刷をふくめて、一つについて約 70 分である。

以上で得られたそれぞれの逆マトリックスの値を加減して、単一節点荷重が作用した場合に対する節点の変形量が計算できるから、これらの値を、式(3)に用いて節点における断面力の影響線を算出することができる。例題について、起拱点、および、拱頂点における曲げモーメント、軸方向力、および、せん断力の影響線を計算し、さきの論文における固定アーチの計算結果と比較して描いたものが、図-3~図-11 である。図中、破線で描いたものが固定アーチのそれである。図-3,4,5 は、

それぞれ、単位鉛直荷重が移動する場合、起拱点(支点 0、および、節点 12)、および、拱頂点(節点 6)の影響線であり、図-6,7,8 は、単位水平荷重が、図-9,10,11 は、単位モーメントが、それぞれ、移動する場合についての影響線である。図-5,8,11 において、 M_{12-l} 、 N_{12-l} 、 Q_{12-l} とあるのは、節点 12 において、部材 11~12 の一端 12 の断面に対する曲げモーメント、軸方向力、および、せん断力をそれぞれ意味している。なお、

固定アーチの影響線の縦距の記入は混乱をさけるため省略したので、さきの論文を参照されたい。

5. むすび

以上、“変形法によって求めた釣合方程式を、電子計算機を利用して解き、構造物の解析を行な

図-1

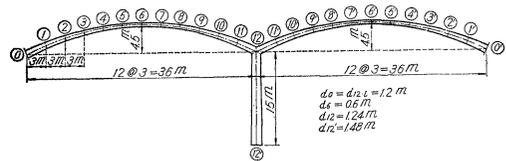
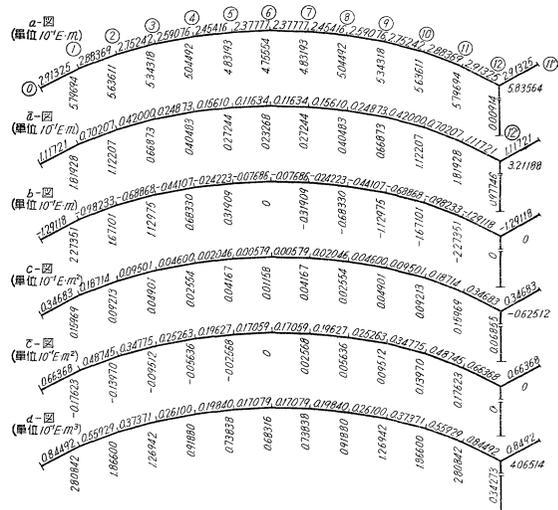


図-2



う”という観点から、変形法による連続リブアーチの解法について説明した。ついで、計算例として、2スパン連続リブアーチが、a) 単位鉛直節点荷重を受ける場合、b) 単位水平節点荷重を受ける場合、c) 単位節点モーメントを受ける場合の、節点における断面力の影響線

の計算をあげた。このうち、b) および、c) については、ほかの文献にはその例がみられない。

図-1 のような連続アーチの断面力の影響線と、固定アーチのそれを比較した場合、橋脚の影響は、橋脚自身の断面の諸性質、橋脚高などによって、その程度が異なってくることはいうまでもないが、荷重の種類、断面の位置などによっても、その傾向、程度が異なり、総合的な結論は下しにくい。しかし、本計算例から推定されることは、大略次のようである。

すなわち、2 スパン連続アーチにおいては、

a) 拱頂点におけるせん断力の値は、荷重のいかんにかかわらず、ほとんど橋脚の影響を受けない。

b) 水平荷重を受ける場合の連続アーチの影響線は、注目している節点の属しているスパンにおいては、節点12(橋脚頭)における縦距を計算して図上にしるし、この点と、節点0(端支点)の0の点を結んだ直線を基線として、この上に、固定アーチのそれを描けば、ほぼ近似したものが得られる。隣接スパンについては、上述のことは適用されない。

図-3 $P_y=1$ による端支点の影響線

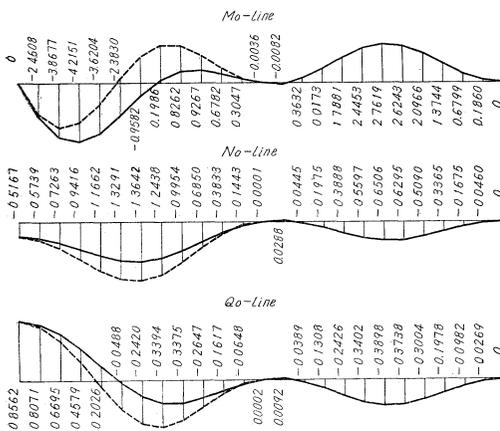


図-4 $P_y=1$ による拱頂点の影響線

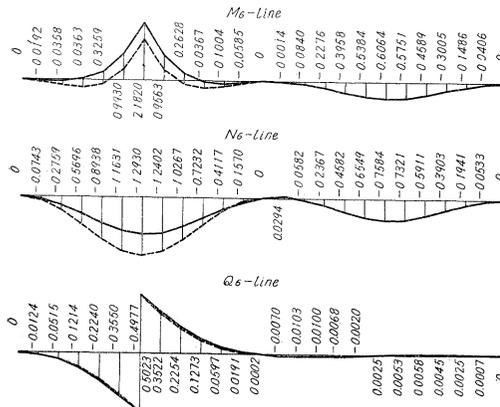


図-5 $P_y=1$ による橋脚上部の影響線

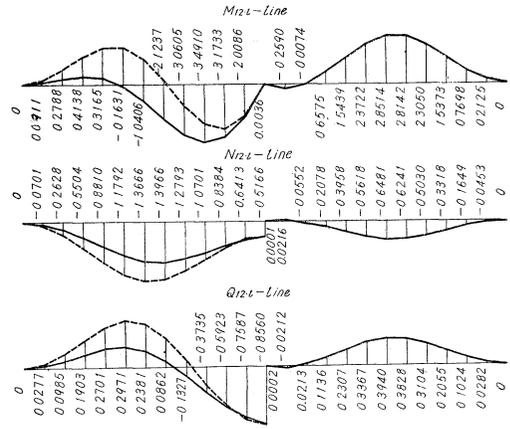


図-6 $P_x=1$ による端支点の影響線

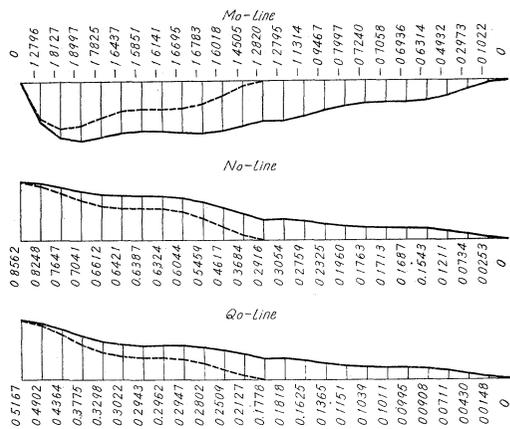
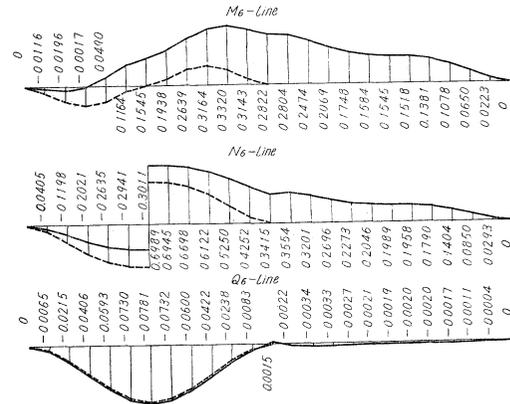


図-7 $P_x=1$ による拱頂点の影響線



c) 水平荷重を受ける場合の起拱点0における断面力は、固定アーチに比較して、その絶対値が増大しているのに対し、起拱点(橋脚頭)においては減少している。

d) 総じて、水平荷重を受ける場合の橋脚の影響は、ほかに比較して大きい。

なお、KDC-1 では、その記憶容量の関係から、方形

図-8 $P_x=1$ による橋脚上部の影響線

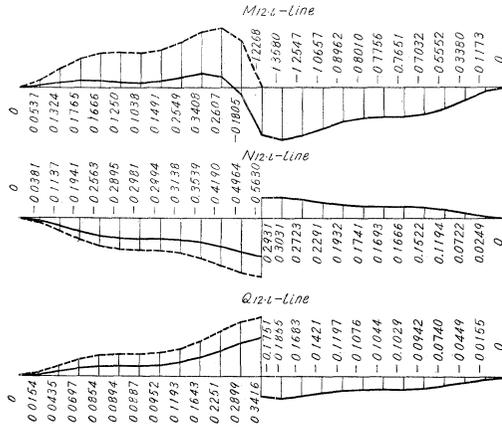


図-9 $M_x=1$ による端支点の影響線

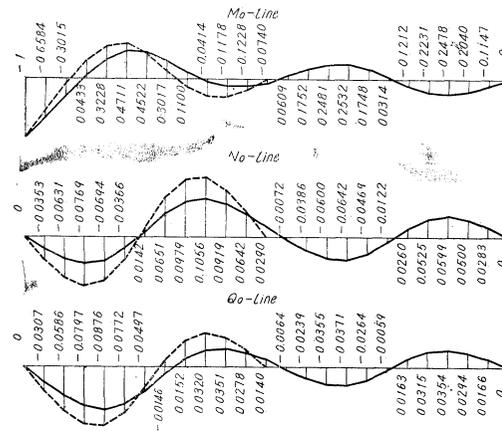


図-10 $M_x=1$ による拱頂点の影響線

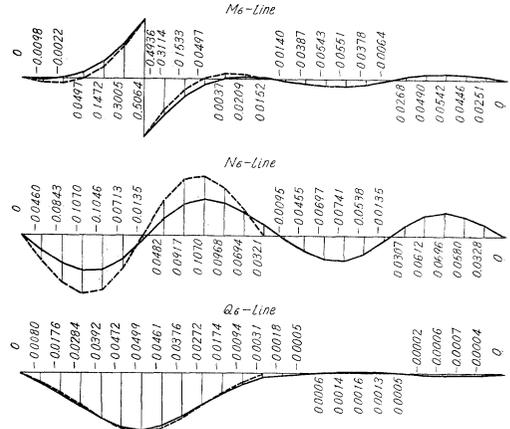
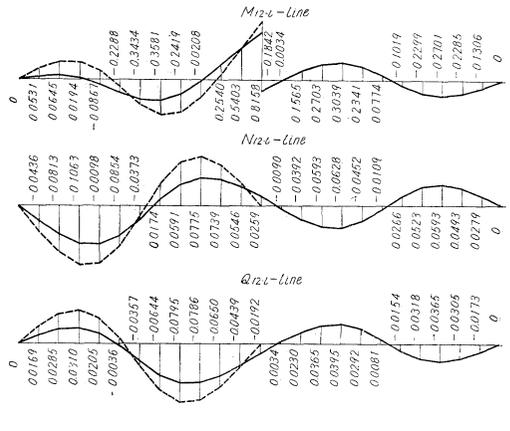


図-11 $M_x=1$ による橋脚上部の影響線



マトリックスの逆マトリックスの計算は、約 60 元程度であることを述べたが、分割法⁵⁾による逆マトリックスの計算のプログラムを作成すれば、120 元(二分割)、もしくは、180 元(三分割)程度まで計算可能である。したがって、アーチを、本計算で行なった程度に分割して取り扱うならば、5 スパン(対称構造ならば 10 スパン)連続アーチまでは計算することができる。

参考文献

- 1) 児嶋・山本・成岡：土木学会誌，46. 10 (昭 36.10) pp. 19~24
- 2) 三瀬幸三郎：土木学会誌，22.11 (昭 11.11) pp. 1045~1081.
- 3) 小野一良：土木学会誌，27.4 (昭 16.4), pp. 338~365.
- 4) 上記の他に、三連、四連モーメントを用いる方法として、近藤繁人：山梨大学工学部研究報告，3 (昭 27.3), pp. 42~47.
- 5) 成瀬勝武：“弾性橋梁”，p. 429.
- 6) 二分割の場合については、成岡昌夫：土木学会関西支部，昭和 35 年度講習会テキスト，高速度計算機の土木工学への応用 (昭 36.2)，p. 73. 古屋 茂：“行列と行列式”，pp. 62~63.

三分割の場合については次のようにする。すなわち、元行列を分割して、

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \quad B = A^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix}$$

とし、これの逆行列を B とすれば、 B の各要素は以下のようにして計算できる。

$$\begin{aligned} B_{11} &= (M_{11.2} - M_{13.2} \cdot M_{33.2}^{-1} \cdot M_{31.2})^{-1} \\ B_{12} &= -A_{11}^{-1} (A_{12} \cdot B_{22} + A_{13} \cdot B_{32}), \quad B_{13} = -M_{11.2}^{-1} \cdot M_{13.2} \cdot B_{33} \\ B_{21} &= -A_{22}^{-1} (A_{21} \cdot B_{11} + A_{23} \cdot B_{31}), \\ B_{22} &= (M_{22.1} - M_{23.1} \cdot M_{33.1}^{-1} \cdot M_{32.1})^{-1} \\ B_{23} &= -A_{22}^{-1} (A_{21} \cdot B_{13} + A_{23} \cdot B_{33}), \quad B_{31} = -M_{33.2}^{-1} \cdot M_{31.2} \cdot B_{11} \\ B_{32} &= -M_{33.1}^{-1} \cdot M_{32.1} \cdot B_{22} \\ B_{33} &= (M_{33.2} - M_{31.2} \cdot M_{11.2}^{-1} \cdot M_{13.2})^{-1} \end{aligned}$$

上式中、

$$\begin{aligned} M_{11.2} &= A_{11} - A_{12} \cdot A_{22}^{-1} \cdot A_{21}, \quad M_{22.1} = A_{22} - A_{21} \cdot A_{11}^{-1} \cdot A_{12} \\ M_{13.2} &= A_{13} - A_{12} \cdot A_{22}^{-1} \cdot A_{23}, \quad M_{23.1} = A_{23} - A_{21} \cdot A_{11}^{-1} \cdot A_{13} \\ M_{31.2} &= A_{31} - A_{32} \cdot A_{22}^{-1} \cdot A_{21}, \quad M_{33.1} = A_{32} - A_{31} \cdot A_{11}^{-1} \cdot A_{12} \\ M_{33.2} &= A_{33} - A_{32} \cdot A_{22}^{-1} \cdot A_{23}, \quad M_{33.1} = A_{33} - A_{31} \cdot A_{11}^{-1} \cdot A_{13} \end{aligned}$$

として計算される。著者らは、すでに、これらの分割法による逆マトリックスの計算のプログラムを作成して利用している。

(原稿受付：1961. 7. 11)