解　　説

行列による連立一次方程式の数値解法について

彦　坂　良　次*

1. まえがき

構造物の応力などを求めるには連立一次方程式を解く場合がすくなくない。これは式の数が増すにつれ計算労力が加速的にるい加される，わずらわしい仕事として知られている。しかし電子計算機が実用に供されるにおよびこの問題は一挙に解決された感がある。京都大学の成岡教授のいわれたとおりまさに計算革命の時代がきた[1]とはいえ，いまはなお電子計算機が自由に利用し得るとはいいがたい。それで連立方程式の計算方法について検討を試みるのも多少の意義があるかと考える。以下は行列の四則を用い連立一次方程式の数値計算を手まわし計算器により行なう場合を対象としたものである。

2. 方程式の解と行列の概念

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\cdots\cdots\cdots\cdots+a_{1n}x_n=c_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+a_{2n}x_n=c_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+a_{nn}x_n=c_n \end{array}\right\}\cdots\cdots(1)$$

(1) 式の連立一次方程式は行列表示によれば (2) 式となる。

$$AX=C\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ただし，A は未知量の係数 a_{ik} よりなる正方行列であり，X および C はそれぞれ未知量 x_i および常数項 C_i よりなる列行列である。ここでは行列式 $|A|$ の値が0でない場合だけを取り扱う。常数項 C の任意の値に対し X を求めるには周知のごとく逆行列 A^{-1} を求めればよい。すなわち，

$$X=A^{-1}\cdot C\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

結局，行列の表現にしたがえば連立一次方程式を解くことは，行列 A の逆行列を求める問題に帰する。

さて行列 $A=[a_{ik}]$ に対する逆行列を $A^{-1}=[\alpha_{ik}]$ であらわせば $\alpha_{ik}=A_{ki}/|A|$, A_{ki} は行列式 $|A|$ における a_{ki} の余因子である。行列 A が3次の場合 A_{ki} は2次の行列式となり，その値の計算は困難でない。それで行列が2次もしくは3次までは，逆行列の計算は上式により行列式の値を求めて行なうものとする。

例—1

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \text{ に対し，} \alpha_{11}=\frac{A_{11}}{|A|}=\frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}=\frac{-10}{|A|}$$

$$\alpha_{12}=\frac{A_{21}}{|A|}=\frac{(-1)^{1+2}}{|A|}\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}=\frac{-18}{|A|},$$

$$\alpha_{13}=\frac{(-1)^{1+3}}{|A|}\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=\frac{17}{|A|},\ \cdots\cdots\cdots\cdots|A|=-59$$

$$\therefore\ A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} -10 & -18 & 17 \\ -18 & 3 & 7 \\ 17 & 7 & -23 \end{bmatrix} =\begin{bmatrix} 0.1695 & 0.3051 & -0.2881 \\ 0.3051 & -0.0508 & -0.1186 \\ -0.2881 & -0.1186 & 0.3898 \end{bmatrix}$$

しかし，行列が4次以上となれば行列式の計算は困難になるので上の方法にはよらず，行列の間の加減乗の演算の組み合わせにより逆行列を求める方法を考える。

ここで，計算に使用する行列の理論は，加減乗除の定義以外特別な定理はあまり使用しない。これら行列の基礎事項については説明を略する[2]。

しかし，行列の形により計算に利用し得る性質の二，三をあげれば，

a) $a_{ik}=a_{ki}$ となる対称行列の逆行列は，また対称行列となる。両対角線に対称な行列の逆行列は，また両対角線に対称となる。

b) 三角行列の逆行列は元の行列と同じ側の三角行列となり，その対角線要素はたがいにほかの逆数となる。したがって，対角線要素が1なる三角行列では，その逆行列の対角線要素もすべて1となる。また三角行列の行列式の値は対角線要素の積に等しい。

c) 対角行列の逆行列は，対角線要素が逆数で与えられる対角行列である。対角行列の要素がすべて1となるものが単位行列で，これはクロネッカーの δ を要素とする行列ともいえる。すなわち，

$$E=[\delta_{ik}]\quad (\delta_{ik}=1,\ i=k \text{ のとき},\ \delta_{ik}=0,\ i\neq k \text{のとき})$$

なお，行列の要素が単なる数でなく要素自身が行列からなる場合にも，普通の行列と同じように行列演算が行ない得て，これを逆行列の計算に利用することができる。

3. 逆行列の計算方法

前述のとおり連立方程式を解くには係数行列の逆行列を求めればよいので，以下与えられた行列の逆行列を算出する方法を問題とする。さて逆行列は要素の配列が特殊の場合の方が扱いやすいこと，構造物の計算で取り扱う行列は特殊の形を採るものが多いこと，などを考慮し，簡単な形状の行列から順次考えることとする。しかして，もっとも簡単なものは前述のとおり対角行列で逆行列は対角要素の逆数である。つぎに三角行列の場合は

* 正員　宮崎大学助教授　工学部土木工学教室

その逆行列もまた同じ側の三角行列となり，かつ対角線要素は互いに逆数の関係にあることがわかっているので A^{-1} は端の要素より順に算出し得る。その方法は簡単であるし，紙面のつごうから説明を略し，もっとも簡単な場合の数値例をあげておく。

例—2

$$A=\begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ 2 & 1 &&&&& \\ 5 & 2 & 1 &&&& \\ 2 & 5 & 2 & 1 &&& \\ 1 & 2 & 5 & 2 & 1 && \\ & 1 & 2 & 5 & 2 & 1 & \\ && 1 & 2 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{なら}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ -2 & 1 &&&&& \\ -1 & -2 & 1 &&&& \\ 10 & -1 & -2 & 1 &&& \\ -12 & 10 & -1 & -2 & 1 && \\ -22 & -12 & 10 & -1 & -2 & 1 & \\ 85 & -22 & -12 & 10 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

かかる特殊な例では，逆行列の要素は第1列のみ求めれば，ほかの要素はただちに決まる。この場合もし要素がもう一方の対角線（副対角線と呼ぶことにする）の片側に配置された三角行列であれば，その逆行列はこれと反対側の三角行列になることは掛け算の定義より容易に類推し得よう。

つぎにここで三元行列と呼ぶ要素が**例—3**に示す配列をなす対称行列は，逆行列が右上端に位置する要素を基準として比較的容易に算出できることが示されている[3]。ただこの例では，行列が副対角線に対しては対称でないので，逆行列は最右側の列ならびに第1行の各要素を順次別々に算出しなければならないが，ほかの全要素はこれを基準として簡単に求められる。

例—3

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 4 &&& \\ 4 & 2 & 1 && \\ & 1 & 3 & 7 & \\ && 7 & 6 & 2 \\ &&& 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$A^{-1}=[\alpha_{ik}]$ とすれば

$A\cdot A^{-1}=A^{-1}A=E=[\delta_{ik}]$

の関係より

$\delta_{15}=5\times\alpha_{15}+4\times\alpha_{25}=0$

$\therefore\ \alpha_{25}=-5/4\times\alpha_{15}$

$\delta_{25}=4\times\alpha_{15}+2\times\alpha_{25}+1\times\alpha_{35}=0$

$\therefore\ \alpha_{35}=-3/2\times\alpha_{15}$

$\delta_{35},\delta_{45}=0$ の関係から α_{45},α_{55} を，同じ考えで $\delta_{15},\delta_{14},\cdots=0$ の関係から $\alpha_{14},\cdots\cdots,\alpha_{11}$ を α_{15} に対し定め得る。

$$A^{-1}=\alpha_{15}\begin{pmatrix} -11/7 & 43/14 & 1/7 & -1/2 & 1 \\ & -43/14\times5/4, & -1/7\times5/4, & 1/2\times5/4, & -5/4 \\ && -1/7\times3/2, & 1/2\times3/2, & -3/2 \\ &&& -1/2\times23/28, & 23/28 \\ &&&& 39/14 \end{pmatrix}$$

α_{15} を求めるには，たとえば $\delta_{11}=1$ であるから，

$$\delta_{11}=5\,\alpha_{11}+4\,\alpha_{21}=5\times(-11/7)\alpha_{15}+4\times(43/14)\alpha_{15}=1$$

$$\therefore\ \alpha_{15}=7/31=0.22581$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} -0.3548 & 0.6935 & 0.0323 & -0.1129 & 0.2258 \\ & -0.8669 & -0.0403 & 0.1411 & -0.2823 \\ && -0.0484 & 0.1694 & -0.3387 \\ \multicolumn{3}{l}{\left(\begin{matrix}\text{対称行列}\\ \text{左半記入略}\end{matrix}\right)} & -0.0927 & 0.1855 \\ &&&& 0.6290 \end{pmatrix}$$

つぎは行列計算の次数低下，そのほかの目的で与えられた行列を小行列を要素とする大行列とみなして，逆行列を算出する方法を簡単に説明し数値例を示すことにする。まず行列をたてよこの2線により4つの部分に区分し $A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ とあらわし，その逆行列も同じ区分の小行列にまとめ $A^{-1}=\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}$ とする。このとき A_{11}，A_{22} は正方行列になるよう区分する。しからば，$A\times A^{-1}=A^{-1}\times A=E$ の関係からつぎの諸式を得る。

$$A_{11}\alpha_{11}+A_{12}\alpha_{21}=E \quad\cdots\cdots(4)$$
$$A_{11}\alpha_{12}+A_{12}\alpha_{22}=0 \quad\cdots\cdots(5)$$
$$\alpha_{21}A_{11}+\alpha_{22}A_{21}=0 \quad\cdots\cdots(6)$$
$$A_{21}\alpha_{12}+A_{22}\alpha_{22}=E \quad\cdots\cdots(7)$$
$$\therefore\ \alpha_{11}=A_{11}^{-1}-A_{11}^{-1}A_{12}\alpha_{21} \quad\cdots\cdots(8)$$
$$\alpha_{12}=-A_{11}^{-1}A_{12}\alpha_{22} \quad\cdots\cdots(9)$$
$$\alpha_{21}=-\alpha_{22}A_{21}A_{11}^{-1} \quad\cdots\cdots(10)$$

(9)，(7) 式より

$$(-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}+A_{22})\alpha_{22}=E$$
$$\therefore\ \alpha_{22}=(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} \quad\cdots\cdots(11)$$

すなわち，まず小行列 A_{11} の逆行列を求め $A_{22}-A_{22}A_{11}^{-1}\ A_{12}$ なる行列演算を行なえば α_{22} の逆行列を得る。したがってこれの逆行列を求めれば α_{22} を得る。α_{22} が求まれば (9) 式より α_{12}，(10) 式より α_{21} が求まり，さらに (8) 式によって α_{11} が求まり，逆行列の全要素を求め得たことになる。もし対称行列であれば α_{12} と α_{21} とは転置行列の関係にあるので別々に算出する必要はない。

例—4

$$A=\left(\begin{array}{ccccc:ccc} 2 & 5 & 3 & 6 & & 4 && \\ 5 & 1 & 4 & 1 & 3 &&& \\ 3 & 4 & 6 & 2 & & 2 && \\ 6 & 1 & 2 & 4 & 6 & & 8 & \\ & 3 & & 6 & 5 &&& 4 \\ \hdashline 4 & & 2 &&& 3 && 3 \\ &&& 8 &&& 2 & 5 \\ &&&& 4 & 3 & 5 & 7 \end{array}\right)$$

行列 A を点線のように区分すれば A_{11} は 5 次の行列でただちに $A_{11}{}^{-1}$ を求めがたいので，まず A_{11} に上の方法を適用して $A_{11}{}^{-1}$ を求める。すなわち，

$$A_{11}=\left(\begin{array}{ccc:cc} 2 & 5 & 3 & 6 & \\ 5 & 1 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 6 & 2 & \\ \hdashline 6 & 1 & 2 & 4 & 6 \\ & 3 & & 6 & 5 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},\quad A_{11}{}^{-1}=\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix}$$

$B_{11}{}^{-1}$ は**例—1**ですでに求めてあるので，既知行列の加減乗の組み合わせとして $B_{22}-B_{21}B_{11}{}^{-1}B_{12}$ を計算すれば (11)式により

$$B_{22}-B_{21}B_{11}{}^{-1}B_{12}=\beta_{22}{}^{-1}=\begin{bmatrix} 0.1186 & 1.3729 \\ 1.3729 & 5.4576 \end{bmatrix}$$

これより β_{22} を求むれば，

$$\beta_{22}=\begin{bmatrix} -4.4110 & 1.1096 \\ 1.1096 & -0.0959 \end{bmatrix}$$

β_{22} が求まれば (9) 式，(8) 式により順次 $A_{11}{}^{-1}$ の全要素が算出できる。

$$A_{11}{}^{-1}=\begin{pmatrix} -0.8493 & -3.3151 & 1.8767 & 2.2740 & -0.7397 \\ -3.3151 & -11.0686 & 6.7124 & 6.9726 & -1.7260 \\ 1.8767 & 6.7124 & -3.8082 & -4.3151 & 1.1507 \\ 2.2740 & 6.9726 & -4.3151 & -4.4110 & 1.1096 \\ -0.7397 & -1.7260 & 1.1507 & 1.1096 & -0.0959 \end{pmatrix}$$

$A_{11}{}^{-1}$ が求まれば再び(11)式により $A_{22}-A_{21}A_{11}{}^{-1}A_{12}$ を計算し，その逆行列を求めれば α_{22} が得られる。これは 3 次行列であるから計算は困難でない。あとは既知行列

の加減乗の演算の組み合わせとして (9) 式，(8) 式により α_{12},α_{11} と順次全要素を求め得る。数値は略す。

つぎには行列の形に応じて小行列の区分を考えたり，異なったいくつかの解き方を比較説明する例として，ここで五元行列と呼ぶ行列の数値例をあげよう。

例—5

これが **例—4** と同様に扱い得ることはもちろんであるが，要素の配列が両対角線に対称であるほかきわめて特殊であるのでいろいろの方法が考えられる。

$$A=\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
5&2&1&&&&&&\\
2&5&2&1&&&&&\\
1&2&5&2&1&&&&\\
\hline
&1&2&5&2&1&&&\\
&&1&2&5&2&1&&\\
&&&1&2&5&2&1&\\
\hline
&&&&1&2&5&2&1\\
&&&&&1&2&5&2\\
&&&&&&1&2&5
\end{array}\right)$$

a) 対称性をさらに生かす方法　Aを3次の小行列群に区分し逆行列も対応して区分すれば，

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ & A_{32} & A_{33}\end{pmatrix},\qquad A^{-1}=\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}\\ \alpha_{21}&\alpha_{22}&\alpha_{23}\\ \alpha_{31}&\alpha_{32}&\alpha_{33}\end{pmatrix}$$

$$A\times A^{-1}=E$$

の関係から，前に (4) ないし (7) 式より (8) ないし(11) 式を得たと同様につぎの諸式を得る。

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_{11}&=A_{11}^{-1}-A_{11}^{-1}A_{12}\alpha_{21}\\
\alpha_{12}&=-A_{11}^{-1}A_{12}\alpha_{22}\\
\alpha_{13}&=-A_{11}^{-1}A_{12}\alpha_{23}\\
\alpha_{32}&=-A_{33}^{-1}A_{32}\alpha_{22}\\
\alpha_{33}&=A_{33}^{-1}-A_{33}^{-1}A_{32}\alpha_{23}\\
\alpha_{22}&=(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}-A_{23}A_{33}^{-1}A_{32})^{-1}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

いまは $A_{11}^{-1}=A_{33}^{-1}$ であり，3 次行列の逆行列であるから容易に求め得る。また (12) の最後の式よりまず α_{22}^{-1} を求め，その逆行列として α_{22} を算出するが，そのさい $A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$, $A_{23}A_{33}^{-1}A_{32}$ は互いに点対称の行列となるほか，α_{22}^{-1} は両対角線に対称な 3 次行列であるから逆行列の計算ならびに検算に便がある。

$$A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}=\frac{1}{88}\begin{pmatrix}76&34&0\\34&21&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$A_{23}A_{33}^{-1}A_{32}=\frac{1}{88}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&21&34\\0&34&76\end{pmatrix}$$

α_{22} が求まれば12式により α_{32} が計算でき，α_{23} がその転置行列としてただちに得られるから α_{13},α_{33} も順次求め得る。行列の対称性からほかの要素はすべて得られる。*

b) 三元行列に準ずる解法

$A^{-1}=[\alpha_{ik}]$ とすれば，$A\times A^{-1}=E=[\delta_{ik}]$,

より一般に

$$\delta_{ik}=1\,\alpha_{i-2,k}+2\,\alpha_{i-1,k}+5\,\alpha_{ik}+2\,\alpha_{i+1,k}+1\,\alpha_{i+2,k}\cdots\cdots(13)$$

δ_{ik} は $i=k$ のときは 1，$i\neq k$ のときは 0 である。

いま $\alpha_{ik}/\alpha_{1k}=\alpha_{ik}'$ であらわすことにし，$i<k$ の範囲の δ，すなわち $\delta_{ik}=0$ の関係式からつぎの諸式を得る。

$$\delta_{1k}=5\alpha_{1k}+2\,\alpha_{2k}+1\,\alpha_{3k}=0$$

これを α_{1k} で割り整理すれば

$$\alpha_{3k}'=-(5+2\,\alpha_{2k}')$$

$\delta_{2k}=2\,\alpha_{1k}+5\,\alpha_{2k}+2\,\alpha_{3k}+1\,\alpha_{4k}=0$ を α_{1k} で割り α_{3k}' に上の値を入れ整理すれば，$\alpha 4_k'=8-\alpha_{2k}'$

以下 $\delta_{3k},\cdots\cdots,\delta_{8k}=0$ より同様にして

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_{5k}'=8+10\,\alpha_{2k}',\ \alpha_{8k}'=124+85\,\alpha_{2k}',\\
&\alpha_{6k}'=-(46+12\,\alpha_{2k}'),\ \delta_{7k}=0\ \text{より},\\
&\alpha_{9k}'=-(369+46\,\alpha_{2k}'),\\
&\alpha_{7k}'=41-22\,\alpha_{2k}',\ \delta_{8k}=0\ \text{より},\\
&\alpha_{9k}'=-(328+184.5\,\alpha_{2k}')
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

$k=9$ の場合は (14) の最後の 2 式よりただちに

$$\alpha_{29}'=0.296029 \qquad \therefore\ \alpha_{29}=0.296029\,\alpha_{19}$$

この値を (14) 式に代入すれば，

$$\begin{aligned}
&\alpha_{39}=-5.59206\,\alpha_{19}, &&\alpha_{79}=34.4874\,\alpha_{19},\\
&\alpha_{49}=7.70397\alpha_{19}, &&\alpha_{89}=149.162\,\alpha_{19},\\
&\alpha_{59}=10.9603\,\alpha_{19}, &&\alpha_{99}=-382.617\,\alpha_{19}\\
&\alpha_{69}=-49.5523\,\alpha_{19},
\end{aligned}$$

$$\delta_{99}=1\,\alpha_{79}+2\,\alpha_{89}+5\,\alpha_{99}=1$$

に上の値を代入すれば，

$$\alpha_{19}=-1/1580.27=-0.0006328$$

これにより右端列の要素 $\alpha_{i9}(i=1\sim9)$ が算出される。

つぎに $k=8$ に対しては $\delta_{78}=0$ より (14) 式で

$$\alpha_{98}'=-(369+46\,\alpha_{28}')$$

あるいは，

$$\alpha_{98}=-369\,\alpha_{18}-46\,\alpha_{28}$$

を得るが，対性性から $\alpha_{98}=\alpha_{89}$, $\alpha_{18}=\alpha_{29}$ が既知であるので，

$$\alpha_{28}=0.00355$$

α_{18} および α_{28} の値を (14) 式に代入すれば $\alpha_{38}\sim\alpha_{88}$ の値が求められる。かくして 8 列および 9 列目の要素が求まれば対称の関係で第 1 行および第 2 行の要素が決まる。しからば各列において上から二つの各要素が求まれ

*

$$A^{-1}=\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
0.24212&-0.09439&-0.02182&0.03136&-0.00694&-0.00488&0.00354&-0.00019&-0.00063\\
-0.09439&0.27892&-0.08588&-0.03404&0.03405&-0.00505&-0.00617&0.00355&-0.00019\\
-0.02182&-0.08588&0.28088&-0.08871&-0.03342&0.03448&-0.00535&-0.00617&0.00354\\
\hline
0.03136&-0.03404&-0.08871&0.28489&-0.08953&-0.03395&0.03448&-0.00505&-0.00488\\
-0.00694&0.03405&-0.03342&-0.08953&0.28499&-0.08953&-0.03342&0.03405&-0.00694\\
-0.00488&-0.00505&0.03448&-0.03395&-0.08953&0.28489&-0.08871&-0.03404&0.03136\\
\hline
0.00354&-0.00617&-0.00535&0.03448&-0.03342&-0.08871&0.28088&-0.08588&-0.02182\\
-0.00019&0.00355&-0.00617&-0.00505&0.03405&-0.03404&-0.08588&0.27892&-0.09439\\
-0.00063&-0.00019&0.00354&-0.00488&-0.00694&0.03136&-0.02182&-0.09439&0.24212
\end{array}\right)$$

ば対角線までの各列の要素は(14)式により算出できる。

c) 三角行列を利用する方法 1. (8)ないし(11)式により逆行列を求めるには，A_{11} の逆行列を求めねばならない。いま A の左右の列を対称的に入れかえた A' なる行列をとり点線で示すごとく区分する。

$$A'=\left(\begin{array}{ccccccc:cc} & & & & & & 1 & 2 & 5 \\ & & & & & 1 & 2 & 5 & 2 \\ & & & & 1 & 2 & 5 & 2 & 1 \\ & & & 1 & 2 & 5 & 2 & 1 & \\ & & 1 & 2 & 5 & 2 & 1 & & \\ & 1 & 2 & 5 & 2 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 5 & 2 & 1 & & & & \\ \hdashline 2 & 5 & 2 & 1 & & & & & \\ 5 & 2 & 1 & & & & & & \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & \end{pmatrix}$$

A_{11} は **例—2** の行列 A の要素を左右対称的に入れかえたものであるから $A_{11}{}^{-1}$ は A^{-1} を上下対称的に入れかえたものとなることは，行列の掛け算の定義から明らかである。

$$A_{11}{}^{-1}=\begin{pmatrix} 85 & -22 & -12 & 10 & -1 & -2 & 1 \\ -22 & -12 & 10 & -1 & -2 & 1 & \\ -12 & 10 & -1 & -2 & 1 & & \\ 10 & -1 & -2 & 1 & & & \\ -1 & -2 & 1 & & & & \\ -2 & 1 & & & & & \\ 1 & & & & & & \end{pmatrix}$$

しからば(11)式により，$A_{22}-A_{21}A_{11}{}^{-1}A_{12}$（いまは $A_{22}=0$）を計算すれば，

$$\alpha_{22}{}^{-1}=-A_{21}A_{11}{}^{-1}A_{12}=\begin{bmatrix} 277 & -82 \\ -82 & -1\,556 \end{bmatrix}$$

これより，

$$\alpha_{22}=\begin{bmatrix} 0.0035547 & -0.0001873 \\ -0.0001873 & -0.0006328 \end{bmatrix}$$

α_{22} が求まれば (9)，(8) 式により $(A')^{-1}$ の全要素を算出できるが，いまの場合はむしろつぎのごとくした方がよい。それは上に求めた α_{22} は元の行列 A の逆行列としては上下入れかわって右上端に位置する4つの要素である。すなわち解法 **b)** における，

$$\begin{bmatrix} \alpha_{18} & \alpha_{19} \\ \alpha_{28} & \alpha_{29} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -0.0001873 & -0.0006328 \\ 0.0035547 & -0.0001873 \end{bmatrix}$$

に相当する。しからばこれらが求まれば(14)式により逆行列の全要素が算出し得ることは解法 **b)** に示した。

d) 三角行列を利用する方法 2. 逆行列の求めやすい三角行列を利用するため五元方程式の最初に $x_1=x_1$，$x_2=x_2$ なる式を書き加え，終りの2式に仮想的未知量 y_1，y_2（ともに0であるが）をそれぞれ付加して係数行列が三角行列(L と名づける)になるようにする。すなわち，

$$\left.\begin{array}{ll} x_1 & =x_1 \\ x_2 & =x_2 \\ 5\,x_1+2\,x_2+x_3 & =c_1 \\ 2\,x_1+5\,x_2+2\,x_3+x_4 & =c_2 \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \vdots \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ x_6+2\,x_7+5\,x_8+2\,x_9+y_2 & =c_8 \\ \qquad x_7+2\,x_8+x_9 \quad +y_2 & =c_9 \end{array}\right\}$$

ここで

$$X'=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_9 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix},\quad C'=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X_{1\sim2} \\ C \end{pmatrix}$$

であらわせば，前式は

$$LX'=C'$$
$$\therefore\ X'=L^{-1}C' \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (15)$$

L は端の列，行の配列だけがほかと異なる三角行列で，L^{-1} は容易に計算できる。これを次式のごとく小行列に区分する。

$$L^{-1}=\left(\begin{array}{cc:ccccccccc} 1 & & & & & & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & & & & & \\ \hdashline -5 & -2 & 1 & & & & & & & & \\ 8 & -1 & -2 & 1 & & & & & & & \\ 8 & 10 & -1 & -2 & 1 & & & & & & \\ -46 & -12 & 10 & -1 & -2 & 1 & & & & & \\ 41 & -22 & -12 & 10 & -1 & -2 & 1 & & & & \\ 124 & 85 & -22 & -12 & 10 & -1 & -2 & 1 & & & \\ -369 & -46 & 85 & -22 & -12 & 10 & -1 & -2 & 1 & & \\ \hdashline 82 & -277 & -46 & 85 & -22 & -12 & 10 & -1 & -2 & 1 & \\ 1\,559 & 82 & -369 & 124 & 41 & -46 & 8 & 8 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{pmatrix}$$

ここで $X_{1\sim2}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$，$X_{3\sim9}=\begin{pmatrix} x_3 \\ \vdots \\ x_9 \end{pmatrix}$ であらわし，$Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=0$ であることを考慮し(15)式を分解してあらわせば，

$$Y=\alpha_{31}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}+\alpha_{32}C=0$$

$$\therefore\ X_{1\sim2}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=-\alpha_{31}{}^{-1}\cdot\alpha_{32}C \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (16)$$

$$X_{3\sim9}=\alpha_{21}X_{1\sim2}+\alpha_{22}C=(-\alpha_{21}\cdot\alpha_{31}{}^{-1}\alpha_{32}+\alpha_{22})C \cdots\cdots (17)$$

すなわち (16)，(17) 両式により，逆行列の算出ができる。この場合は三角行列の逆行列と，2次の行列である α_{31} の逆行列を直接求めるほかは加減乗の演算の組み合わせとなる。数値計算は略するが α_{31} は解法 **c)** における $\alpha_{22}{}^{-1}$ に対応する。

つぎに実際の構造物に対する例として対称構造の一層5スパン ラーメンの節点および層方程式から **例—6** の行列を得たとする。この行列を点線のごとく区分すれば A_{11} は三元行列となり **例—3** の方法が適用できる。この場合 A_{11} は両対角線に対称であるからその逆行列 $[\beta_{ik}]$ は β_{16} を基準として右端列の要素 $\beta_{i6}(i=1,\cdots6)$ だけ求めればほかは機械的に計算できる。

例—6

$$A=\left(\begin{array}{cccccc:c} 4.2 & 0.9 & & & & & 1.2 \\ 0.9 & 5.6 & 0.8 & & & & 1.1 \\ & 0.8 & 5.0 & 0.7 & & & 1.0 \\ & & 0.7 & 5.0 & 0.8 & & 1.0 \\ & & & 0.8 & 5.6 & 0.9 & 1.1 \\ & & & & 0.9 & 4.2 & 1.2 \\ \hdashline 1.2 & 1.1 & 1.0 & 1.0 & 1.1 & 1.2 & 4.4 \end{array}\right)$$

$A_{11}{}^{-1}$ が求まれば(11)式により $\alpha_{22}{}^{-1}$ を求め，その逆行列として α_{22} を求めるのであるが，この場合 α_{22} は単なる数である。すなわち，

$$\alpha_{22}{}^{-1}=(A_{22}-A_{21}A_{11}{}^{-1}A_{12})=3.177$$
$$\therefore\ \alpha_{22}=1/3.177=0.3148$$

$$A_{11}^{-1}=-\frac{0.9^2\times0.8^2\times0.7}{12\,038}\begin{pmatrix} 8\,187 & 1\,347 & -220 & 31.5 & -4.67 & 1 \\ & -1\,347\times4.67 & 220\times4.67 & -31.5\times4.67 & 4.67\times4.67 & -4.67 \\ & & -220\times31.5 & 31.5\times31.5 & -4.67\times31.5 & 31.5 \\ & & & -31.5\times220 & 4.67\times220 & -220 \\ & & & & -4.67\times1\,347 & 1\,347 \\ \left(\begin{smallmatrix}\text{左半は}\\\text{記入省略}\end{smallmatrix}\right) & & & & & -8\,187 \end{pmatrix}$$

α_{22} が求まってから，逆行列のほかの要素の小行列を(9)式，(8)式により算出する計算はすでに説明したとおりであるから数値記載は省略する。

なおこの行列では，もし部材回転角の係数である右端の列を左端に移せば，**例—5** で示した解法 **d)** を適用することもできる。

つぎに四層二スパンラーメンの例として節点方程式の節点回転角の係数行列として**例—5**の行列を得たとする。

例—7

この行列を次式の点線で区分し，逆行列もこれに対応して区分する。すなわち

$$A=\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} 7 & 1 & & 1.2 & & & & & & & & \\ 1 & 9.4 & 1 & & 1.3 & & & & & & & \\ & 1 & 7 & & & 1.2 & & & & & & \\ \hline 1.2 & & & 6.6 & 1 & & 1.1 & & & & & \\ & 1.3 & & 1 & 9 & 1 & & 1.2 & & & & \\ & & 1.2 & & 1 & 6.6 & & & 1.1 & & & \\ \hline & & & 1.1 & & & 6 & 0.9 & & 1 & & \\ & & & & 1.2 & & 0.9 & 8.2 & 0.9 & & 1.1 & \\ & & & & & 1.1 & & 0.9 & 6 & & & 1 \\ \hline & & & & & & 1 & & & 3.6 & 0.8 & \\ & & & & & & & 1.1 & & 0.8 & 5.4 & 0.8 \\ & & & & & & & & 1 & & 0.8 & 3.6 \end{array}\right)$$

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & & \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \\ & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ & & A_{43} & A_{44} \end{pmatrix},\qquad A^{-1}=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix}$$

とすれば，これは三元行列の形であるから $\delta_{14},\delta_{24},\delta_{34}=0$ の関係から順次つぎの式を得る。

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_{24}=-A_{12}^{-1}A_{11}\alpha_{14}=C_{24}\alpha_{14} \\ C_{24}=-A_{12}^{-1}A_{11} \\ \alpha_{34}=C_{34}\alpha_{14} \\ C_{34}=-A_{23}^{-1}(A_{21}+A_{22}C_{24}) \\ \alpha_{44}=C_{44}\alpha_{14} \\ C_{44}=-A_{34}^{-1}(A_{32}C_{24}+A_{33}C_{34}) \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(18)$$

同様に $\delta_{14},\delta_{13},\delta_{12}=0$ の関係から

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_{13}=\alpha_{14}C_{13},\ C_{13}=-A_{44}A_{34}^{-1} \\ \alpha_{12}=\alpha_{14}C_{12},\ C_{12}=-(C_{13}A_{33}+A_{43})A_{23}^{-1} \\ \alpha_{11}=\alpha_{14}C_{11},\ C_{11}=-(C_{12}A_{22}+C_{13}A_{32})A_{12}^{-1} \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(19)$$

C_{i4} は(18)式により $i=2,3,4$ の順に，また C_{1i} は(19)式により $i=3,2,1$ の順に算出できる。C の計算で逆行列を直接求める必要のある $A_{ik}(i\fallingdotseq k)$ は，すべて対角行列であるから逆行列は対角要素の逆数として容易に求め得る。しからば三元行列の場合に準じ，

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \alpha_{14}C_{11} & \alpha_{14}C_{12} & \alpha_{14}C_{13} & \alpha_{14} \\ & C_{24}\alpha_{14}C_{12} & C_{24}\alpha_{14}C_{13} & C_{24}\alpha_{14} \\ & & C_{34}\alpha_{14}C_{13} & C_{34}\alpha_{14} \\ (\text{左半対称}) & & & C_{44}\alpha_{14} \end{pmatrix}$$

α_{14} の値は C の計算がすめば，たとえば $\delta_{44}=E$ より，

$$\delta_{44}=A_{43}\alpha_{34}+A_{44}\alpha_{44}=E$$

$$\therefore\ \alpha_{14}=(A_{43}C_{34}+A_{44}C_{44})^{-1}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(20)$$

以上は4次の場合であるが，n 次の対称行列の場合も

$$\left.\begin{array}{l} C_{in}=-A^{-1}{}_{i-1,i}(A_{i-1,i-2}C_{i-2,n}+A_{i-1,i-1}C_{i-1,n}) \\ C_{1i}=-(C_{1,i+2}A_{i+2,i+1}+C_{1,i+1}A_{i+1,i+1})A_{i,i+1}^{-1} \end{array}\right\}\cdots\cdots(21)$$

ただし，C_{in} は $i=2,3,\cdots\cdots,n$ の順に，

C_{1i} は $i=n-1,n-2,\cdots\cdots2,1$ の順に算出するもので $C_{1n}=E$ とし，式中にあらわれる行列 A,C は対応する要素なき場合はすべて0行列とする。また基準となる α_{1n} は，

$$\alpha_{1n}=(A_{n,n-1}C_{n-1,n}+A_{nn}C_{nn})^{-1}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(22)$$[4]

4. 常数項が数値で与えられる場合

常数項が数値で与えられる場合も逆行列を求めてもよいが，一般に逆行列の計算は面倒であるし，また強いて逆行列を求める必要もない。この場合の一解法を述べよう。それは方程式の常数項も左辺に移し，

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots\cdots\cdots+a_{1n}x_n+a_{10}=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots\cdots\cdots+a_{2n}x_n+a_{20}=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots\cdots\cdots\cdots+a_{nn}x_n+a_{n0}=0 \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots(23)$$

の形の式を次式の形に変形せんとするものである。

$$\left.\begin{array}{r} -x_1+A_{12}x_2+A_{13}x_3+\cdots\cdots+A_{1n}x_n+A_{10}=0 \\ -x_2+B_{23}x_3+\cdots\cdots+B_{2n}x_n+B_{20}=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -x_{n-1}+U_{n-1,n}x_n+U_{n0}=0 \\ -x_n+V_{n0}=0 \end{array}\right\}\cdots(24)$$

これは消去法の一種であるが，行列の表現によれば係数行列を対角線要素が1なる右三角行列 R に変形するものである。(24)式の係数値は次表により算出するが，いま五元方程式の場合について計算順序を説明しよう。

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	常数項
1	(a_{11}) a_{11}	(a_{12}) a_{12}	(a_{13}) a_{13}	(a_{14}) a_{14}	(a_{15}) a_{15}	(a_{10}) a_{10}
	-1	A_{12}	A_{13}	A_{14}	A_{15}	A_{10}
2	(a_{21}) a_{21}	(a_{22}) b_{22}	(a_{23}) b_{23}	(a_{24}) b_{24}	(a_{25}) b_{25}	(a_{20}) b_{20}
		-1	B_{23}	B_{24}	B_{25}	B_{20}
3	(a_{31}) a_{31}	(a_{32}) b_{32}	(a_{33}) c_{33}	(a_{34}) c_{34}	(a_{35}) c_{35}	(a_{30}) c_{30}
			-1	C_{34}	C_{35}	C_{30}
4	(a_{41}) a_{41}	(a_{42}) b_{42}	(a_{43}) c_{43}	(a_{44}) d_{44}	(a_{45}) d_{45}	(a_{40}) d_{40}
				-1	D_{45}	D_{40}
5	(a_{51}) a_{51}	(a_{52}) b_{52}	(a_{53}) c_{53}	(a_{54}) d_{54}	(a_{55}) e_{55}	(a_{50}) e_{50}
					-1	E_{50}

まず係数に応じて区画した表をつくり，さらに各行は

上下2段に区分し，はじめに(23)式の係数値 $a_{ik}(k=1, 2,\cdots\cdots n,0)$ をそれぞれ対応欄の上部に( )を付して記入しておく。つぎに表作成にかかり，まず第1列および第1行上段には各欄の( )内の数値 a_{ik} をそのまま記入する。第1行下段には各上段の数値を $-a_{11}$ で割った $A_{1k}=-a_{1k}/a_{11}$ を計算記入する。つぎは第2列には $b_{i2}=a_{i2}+a_{i1}A_{12}$ を，第2行には $b_{2k}=a_{2k}+a_{21}A_{1k}$ を計算し各上段に記入する。第2行下段には各上段の数値を $-b_{22}$ で割った $B_{2k}=-b_{2k}/b_{22}$ を記入する。以下対角線を境いに列行，列行の順に数値を計算記入してゆくもので，たとえば

$$e_{55}=a_{55}+a_{51}A_{15}+b_{52}B_{25}+c_{53}C_{35}+d_{54}D_{45}$$

のごとく，その欄の( )に示した a_{55} に，その行と列(いまは第5行と第5列)の数値を左端と上端より順次掛け合わせたものの代数和として，その数値を求め，各行下段の数値は上段の数値をその行の対角数値の負値で割ったものである。一般に第 ik 欄の数値 m_{ik} は,

$$m_{ik}=a_{ik}+a_{i1}A_{1k}+b_{i2}B_{2k}+c_{i3}C_{3k}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+l_{i,i-1}L_{i-1,k}(i<k)\cdots\cdots\cdots(25)$$

かくすれば対角線をふくみ，それより左側上段の各数値よりなる左三角行列を L, 対角線をふくみ右側下段の各数値よりなる右三角行列を $-R$ とすれば，係数行列 A に対し，

$$A=L\times R\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(26)$$

の関係が成立する。証明は略す[5]。この表により(24)式が得られればその最下式より $x_n=V_{n0}$ がただちに求まり，順次上の式に代入してゆけば，各式左端の未知量がその式の各項の数値の代数和として得られる。常数項を左辺に移したり(24)式を $-R$ の形にまとめたのはすべて計算実施上の便を考慮したものである。もし A が対称行列であれば $a_{i1}=a_{1i},\ b_{i2}=b_{2i},\cdots\cdots m_{ik}=m_{ki},\cdots\cdots$ となるので計算はそれだけ簡単となる。

なお前記の表計算により(26)式の L と R を求め，これを用いて A^{-1} を求めるのも逆行列を求める一方法であるから，ついでにふれておきたい。

それは $A=L\cdot R$ になる L,R を計算したとすると，

$$A^{-1}A=A^{-1}LR=E \text{ より } A^{-1}L=R^{-1}\cdots\cdots\cdots\cdots(27)$$

$$AA^{-1}=LRA^{-1}=E \text{ より } RA^{-1}=L^{-1}\cdots\cdots\cdots\cdots(28)$$

を得る。(27),(28)式において L,R は既知であるが，$L^{-1}R^{-1}$ は計算しなければ不明である。しかし L,R とそれぞれ同じ側の三角行列で片側の要素が0になること，R^{-1} の対角線要素が1なることはわかっている。それで右辺 R^{-1}, L^{-1} のこれら既知の要素に対応する左辺 $A^{-1}L$, RA^{-1} の要素の関係から A^{-1} の要素の値を順次計算することができる。もし A が対角行列なら(27)式のみから A^{-1} を求め得る[6]。

5. む す び

以上行列の形に応じ採り得る，逆行列の求め方のいくつかを筆者の知る範囲で述べたが，行列の取り扱いには特殊の定理の使用は前提としなかった[7]。また計算途中における検算もこの種計算における重要事項であるが紙数の関係からほとんどふれなかった。同様の理由から数値例も過半は記載を省略した。

なお計算に手まわし計算器を使用する場合は，加減乗除，くらい取りなどについて計算器使用の巧拙が計算能率に大きく影響する。これについては谷本博士の有益なる論文，著書がある[8]。

参 考 文 献

1) 成岡昌夫：構造解析における Digital Computer の応用，土木学会誌 43—12，1958
2) たとえば，遠山 哲：行列論，西垣久実：マトリックとその応用，などを参照
3) 平井 敦：鋼橋 III
4) 対称行列では一般の場合をふくめ，くわしくは大地羊三：Continuant Matrix の逆行列，土木技術 Vol.13, No.8, 昭和 33 年参照
5) 彦坂良次：連立方程式の一数値解法について，宮崎大学工学部研究報告，No. 3, 1957
6) くわしくは，柴垣和三雄：計算法 参照
7) さらに進んだ取り扱いとしては
四野宮哲郎・大地羊三：逆行列に関する二，三の公式，土木学会論文集第 24 号，昭和 30 年4月
島田静雄：マトリックスの Affin 標示およびその理論，土木学会論文集第 44 号，昭和 32 年4月，などがある。
8) 谷本勉之助：計算器の能率的な使い方，土木学会誌 42—8，1957

(原稿受付：1960.9.5)