

変形法による滑節構造物の解法

成 岡 昌 夫*
山 本 知 弘**

1. 総 論

滑節構造物の解法は、剛節構造物の解法とともに、構造力学でよく扱われる問題であるが、剛節構造物の解法の研究にくらべて、研究としては、ほとんどとりあげられていない。剛節不静定構造物の解法には、四連モーメント法（応力法）とたわみ角法、固定法（変形法）とが主として用いられているのに反し、滑節構造物の解法には、弾性方程式による方法（応力法）しか、一般に用いられていない。故三瀬博士は、早くからこの点に注目して、1922年に平面トラスの変形法による解法¹⁾を提案され、静定トラスと内的一次不静定トラスについて、この方法を説明された。この方法は、故小野博士が“複式汎論”²⁾において少しふれており、また、小西博士もその研究³⁾において用いられたが、たわみ角法のごとく一般的に注目されるにはいたっていない。最近、アメリカにおいても、Horn 教授が滑節構造物に変形法⁴⁾を用いているが、三瀬博士の研究の域を出ない。

著者は、滑節不静定構造物の解法に、変形法がひろく用いられるべきであるが、これが一般化しない理由は、次の点にあると思う。すなわち、たわみ角法による矩形ラーメンの解法の場合、未知数は節点の数と層の数との和になる。しかし、平面滑節構造物では、変形法によれば、節点の数を n とすれば未知数は $2n$ となる。従って未知数がいちじるしく多くなって、連立方程式の解法が、手動計算機では、ほとんど不可能となるからである。

最近では、電子計算機が発達して、連立一次方程式の解法、逆マトリックスの解法はもはや問題ではなくなった。たとえば、ILLIAC (Univ. of Illinois Electronic Automatic Computer) では、連立方程式は 143 元（所要時間 90 分）まで、逆マトリックスは 82 元まで計算が可能である。ただし、計算時間は n^3 (n : 元数) に比例するが、手動計算機でやる場合は、問題が根本的に別である。このような電子計算機が発達したともない、構造物の解析—特に不静定構造物の解法—は、電子計算機の利用の点から、もう一度みなおされるべきであると思う。

この観点から、滑節不静定構造物では、節点の変位を未知数とする変形法によって、節点釣合方程式を機械的作表法によりつくり、これを電子計算機で解いて変位を

求め、ついで部材応力を求めるのが得策であると思う。著者は、簡単な法則の機械的作表法を見出したので、これを述べたいと思う。

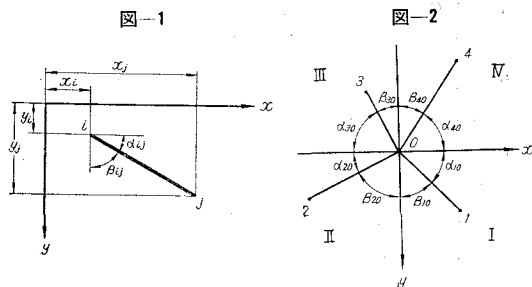
2. 平面滑節構造物の解法—節点荷重の場合—

(1) 部材応力の変位による表示 (図—1)

平面滑節構造物のうちの一つの部材を考えるものとする。両節点を (i, j) 、座標の値を $(x_i, y_i), (x_j, y_j)$ 、部材長さを l_{ij} 、断面積を A_{ij} とする。部材が外力のもとに Δl_{ij} だけ変形をして、両節点が $(u_i, v_i), (u_j, v_j)$ の変位をしたものとすれば、部材応力 S_{ij} は、次のように表わされる。

$$S_{ij} = \sigma_{ij} A_{ij} = E \epsilon_{ij} A_{ij} = (EA_{ij}/l_{ij}) \Delta l_{ij} \\ = \frac{EA_{ij}}{l_{ij}} \left\{ \frac{(u_j - u_i)(x_j - x_i)}{l_{ij}} + \frac{(v_j - v_i)(y_j - y_i)}{l_{ij}} \right\} \dots\dots\dots(1)$$

いま、部材の x 軸、 y 軸となす角を α_{ij}, β_{ij} とすれば、 $S_{ij} = (EA_{ij}/l_{ij}) \{ (u_j - u_i) \cos \alpha_{ij} + (v_j - v_i) \cos \beta_{ij} \}$ さらに、 $(EA_{ij}/l_{ij}) / (EA/l)_c = k_{ij}$ とし、 u, v の $(EA/l)_c$ 倍を変位（実際は力の単位）と考えると、 $S_{ij} = k_{ij} \{ (u_j - u_i) \cos \alpha_{ij} + (v_j - v_i) \cos \beta_{ij} \} \dots(2)$ となる。



(2) 節点における釣合方程式 (図—2)

いま、任意の節点 0 にあつまる部材 01, 02, 03, 04 を考えるものとする。節点 0 を座標原点にもってきて、部材 01—04 が、それぞれ、

- 1) $x > 0, y > 0$ ($xy > 0$ 平面 I)
- 2) $x < 0, y > 0$ ($xy < 0$ 平面 II)
- 3) $x < 0, y < 0$ ($xy > 0$ 平面 III)
- 4) $x > 0, y < 0$ ($xy < 0$ 平面 IV)

にあるものとする。また、節点 0 に作用する外力の x, y 方向の分力を P_0, Q_0 とする。

* 正員 工博 京都大学教授, 工学部土木工学教室
** 正員 工修 京都大学助手, 工学部土木工学教室

部材応力は、式(2)より、次のように表わされる。

$$S_{10} = k_{10} \{ (u_1 - u_0) \cos \alpha_{10} + (v_1 - v_0) \cos \beta_{10} \} \dots (3)_1$$

$$S_{20} = k_{20} \{ - (u_2 - u_0) \cos \alpha_{20} + (v_2 - v_0) \cos \beta_{20} \} \dots (3)_2$$

$$S_{30} = k_{30} \{ - (u_3 - u_0) \cos \alpha_{30} - (v_3 - v_0) \cos \beta_{30} \} \dots (3)_3$$

$$S_{40} = k_{40} \{ (u_4 - u_0) \cos \alpha_{40} - (v_4 - v_0) \cos \beta_{40} \} \dots (3)_4$$

節点0の釣合条件式

$$\Sigma F_x = 0 : S_{10} \cos \alpha_{10} - S_{20} \cos \alpha_{20} - S_{30} \cos \alpha_{30} + S_{40} \cos \alpha_{40} + P_0 = 0 \dots (4)_1$$

$$\Sigma F_y = 0 : S_{10} \cos \beta_{10} + S_{20} \cos \beta_{20} - S_{30} \cos \beta_{30} - S_{40} \cos \beta_{40} + Q_0 = 0 \dots (4)_2$$

は、式(3)₁~(3)₄を用いて、次のように表わされる。

$$\begin{aligned} & [(k_{10} \cos^2 \alpha_{10} + k_{20} \cos^2 \alpha_{20} + k_{30} \cos^2 \alpha_{30} + k_{40} \cos^2 \alpha_{40}) u_0 \\ & - (k_{10} \cos^2 \alpha_{10}) (u_1) - (k_{20} \cos^2 \alpha_{20}) (u_2) \\ & - (k_{30} \cos^2 \alpha_{30}) (u_3) - (k_{40} \cos^2 \alpha_{40}) (u_4)] \\ & + [(k_{10} \cos \alpha_{10} \cos \beta_{10} - k_{20} \cos \alpha_{20} \cos \beta_{20} \\ & + k_{30} \cos \alpha_{30} \cos \beta_{30} - k_{40} \cos \alpha_{40} \cos \beta_{40}) (v_0) \\ & - (k_{10} \cos \alpha_{10} \cos \beta_{10}) (v_1) + (k_{20} \cos \alpha_{20} \cos \beta_{20}) (v_2) \\ & - (k_{30} \cos \alpha_{30} \cos \beta_{30}) (v_3) + (k_{40} \cos \alpha_{40} \cos \beta_{40}) (v_4)] \\ & = P_0 \dots (5)_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [(k_{10} \cos \alpha_{10} \cos \beta_{10} - k_{20} \cos \alpha_{20} \cos \beta_{20} \\ & + k_{30} \cos \alpha_{30} \cos \beta_{30} - k_{40} \cos \alpha_{40} \cos \beta_{40}) (u_0) \\ & - (k_{10} \cos \alpha_{10} \cos \beta_{10}) (u_1) + (k_{20} \cos \alpha_{20} \cos \beta_{20}) (u_2) \\ & - (k_{30} \cos \alpha_{30} \cos \beta_{30}) (u_3) + (k_{40} \cos \alpha_{40} \cos \beta_{40}) (u_4)] \\ & + [(k_{10} \cos^2 \beta_{10} + k_{20} \cos^2 \beta_{20} + k_{30} \cos^2 \beta_{30} \\ & + k_{40} \cos^2 \beta_{40}) (v_0) - (k_{10} \cos^2 \beta_{10}) (v_1) \\ & - (k_{20} \cos^2 \beta_{20}) (v_2) - (k_{30} \cos^2 \beta_{30}) (v_3) \\ & - (k_{40} \cos^2 \beta_{40}) (v_4)] = Q_0 \dots (5)_2 \end{aligned}$$

この2つの釣合方程式をみて、次のことに気づくであろう。

a) $\Sigma F_x = 0$ の u の項、 $\Sigma F_y = 0$ の v の項の係数は同一の形式であり、相違は $\cos^2 \alpha$ と $\cos^2 \beta$ だけである。

b) $\Sigma F_x = 0$ の v の項の係数、 $\Sigma F_y = 0$ の u の項の係数は全く同一である。

c) $\Sigma F_x = 0$ の u の項の構成は次のようである。

まわりの節点 i の未知数 u_i の係数は、部材 io の剛比の $\cos^2 \alpha_{io}$ 倍に負符号をつけたものである。中央の節点0の未知数 u_0 の係数は、 $\Sigma k_{io} \cos^2 \alpha_{io}$ となっている。従って、 u の各項の係数の和は0となる。

d) $\Sigma F_x = 0$ の v の項 ($\Sigma F_y = 0$ の u の項) の構成は、次のようである。

まわりの節点 i の未知数 $v_i (u_i)$ の係数は、部材 io の剛比 k_{io} の $\cos \alpha_{io} \cos \beta_{io}$ 倍である。このときの符号は、部材 10, 30 のように $xy > 0$ の平面にあるものは負符号、部材 20, 40 のように $xy < 0$ の平面にあるものは正符号をつける。ついで、 $v_0 (u_0)$ の項の係数は、これらの正負の符号を考慮した $k_{io} \cos \alpha_{io} \cos \beta_{io}$ の和の符号を変じたもの、すなわち、次式のようになる。

$$- \left[\sum_{xy < 0} (+k_{io} \cos \alpha_{io} \cos \beta_{io}) + \sum_{xy > 0} (-k_{io} \cos \alpha_{io} \cos \beta_{io}) \right]$$

$$= \sum_{xy > 0} (k_{io} \cos \alpha_{io} \cos \beta_{io}) - \sum_{xy < 0} (k_{io} \cos \alpha_{io} \cos \beta_{io})$$

従って、 $v (u)$ の各項の係数の和は、また、0となる。

(3) 節点釣合方程式の機械的作表法

以上のことから、次のようにして、節点釣合方程式を機械的に作表することができる。

a) 多スパン高層矩形ラーメンの機械的作表法のときのように、方程式をかきこむわくをつくり、横に未知数 $u_i (i=1, 2, \dots), v_i (i=1, 2, \dots)$ を、縦に、まず、釣合方程式 $\Sigma F_x = 0$ をたてる節点の位置 $i=1, 2, \dots$ を、次いで、 $\Sigma F_y = 0$ をたてる節点の位置 $i=1, 2, \dots$ をかきこむ。

b) 部材断面の性質 E, A, I より、 EA/I を計算し、標準の $(EA/I)_c$ を定めて、各部材の剛比 k を求める。

c) 各部材の x, y 軸 (x 軸は水平にとるのが普通である) とす角を求め、

$$k_{\alpha\alpha} = k \cos^2 \alpha, \quad k_{\alpha\beta} = k \cos \alpha \cos \beta, \quad k_{\beta\beta} = k \cos^2 \beta$$

を計算し、これらの $k_{\alpha\alpha}$ -図、 $k_{\alpha\beta}$ -図、 $k_{\beta\beta}$ -図をつくる。この際、各節点について、 $\Sigma k_{\alpha\alpha}$ 、 $(\sum_{xy > 0} k_{\alpha\beta} - \sum_{xy < 0} k_{\alpha\beta})$ 、 $\Sigma k_{\beta\beta}$ を計算して、節点にかきこんでおく。 $\Sigma k_{\alpha\beta}$ を計算するさいには、その節点に座標原点をもってゆき、 $xy > 0$ 、 $xy < 0$ の部材を区別する。

d) $k_{\alpha\alpha}$ -図をみて、 $\Sigma F_x = 0$ の u の項の係数を、 $k_{\alpha\beta}$ -図をみて、 $\Sigma F_x = 0$ の v の項の係数をかきこむ。

e) $k_{\alpha\beta}$ -図 ($k_{\beta\beta}$ -図) をみて、 $F_y = 0$ の $u (v)$ の項の係数をかきこむ。

f) これらの係数をかきこむさいの正負の符号は、作表法-1 のようにする。

作表法-1 u, v の係数の求め方			
	まわりの節点	注目する節点	係数の和
$\Sigma F_x = 0$ の u	$-k_{\alpha\alpha}$	$\Sigma k_{\alpha\alpha}$	0
$\Sigma F_x = 0$ の v	$xy > 0$ の平面の部材 $-k_{\alpha\beta}$	$\Sigma k_{\alpha\beta} - \Sigma k_{\alpha\beta}$	0
$\Sigma F_y = 0$ の u	$xy < 0$ の平面の部材 $+k_{\alpha\beta}$		
$\Sigma F_y = 0$ の v	$-k_{\beta\beta}$	$\Sigma k_{\beta\beta}$	0

従って、注目する節点、まわりの節点に k -図をみて記入し終ったときに、すなわち、連立方程式を書きあげたとき、各係数の和が0となるかどうかを検算する。

g) 右辺には、 P_i, Q_i をかきこむ。

以上では、支点条件に少しもふれなかったが、一応、支点条件を考えずに、すべての節点について、上の機械的作表法によってかきこみ、あとから支点条件を代入すればよい。すなわち、もし x, y 方向のいずれにも移動しない回転支点であれば、 $u=0, v=0$ とし、水平にのみ移動しうる移動支点であれば、 $v=0$ とすればよい。条件はこの2つのみである。

4. 計算例

図-3 に示すような上弦水平、左右対称の spandrel

braced arch を変形法で解いてみよう。これは、J.I. Parcel, R.B.B. Moorman; Analysis of Statically Indeterminate Structure, 1957, p. 501 より引用したものである。部材の断面, 寸法は表-1 に示すとおりである。この表をもとにして, 図-4 の部材に沿うて, k_{aa} , $k_{\alpha\beta}$, $k_{\beta\beta}$ を記入し, $\sum_{xy>0} k_{aa}$, $(\sum_{xy>0} k_{\alpha\beta} - \sum_{xy<0} k_{\alpha\beta})$, $\sum k_{\beta\beta}$ を計算して, 節点に記入する。

さきに述べた機械的作法法によって, 釣合方程式を書くとき, 表-2 のようになる。検算の便宜上, 一応 u_1, v_1, u_1', v_1' の係数も記入しておく方が便利である。係数の和の関係および係数が主対角線に関して対称であるかどうかを検算する。

表-1 部材の性質

部材	A(in ²)	l(in)	(A/l) × 10 ³	k	k cos α	k cos β	k cos ² α	k cos α · cos β	k ² cos ² β
上弦材	24	16.80	360	4.66667	0.38251	0	0.38251	0	0
弦材	46	19.07	360	5.29722	0.43420	0	0.43420	0	0
鉛直材	12	21.70	552	3.93116	0	0.32223	0	0	0.32223
材	34	18.78	312	6.01923	0	0.49338	0	0	0.49338
	56	17.58	166	10.98750	0	0.90061	0	0	0.90061
	78	14.64	120	12.20000	0	1.00000	0	0	1.00000
下弦材	13	58.14	432.7	13.43656	1.10136	0.61088	0.76236	0.50824	0.33682
	35	51.40	387.7	13.25767	1.08669	0.40362	0.93695	0.37478	0.14991
	57	43.80	363.2	12.05947	0.98848	0.13077	0.97114	0.12948	0.01726
斜材	23	12.06	476.4	2.53149	0.20750	0.13589	0.11849	0.10269	0.08900
	45	12.06	397.3	3.03549	0.24881	0.10521	0.20429	0.09533	0.04449
	67	17.58	379.5	4.68800	0.38361	0.12130	0.34520	0.11507	0.03886

以上のようにして, 結局, 24 元の連立一次方程式をうるが, この方程式は, 機械的に一定の法則に従って係数を記入できるから, 簡単にかける。

次いで, 電子計算機によって, 方形マトリックス (stiffness matrix) の, 逆マトリックスを求めるか, あるいは, 幾組かの連立一次方程式を解くのである。たとえば, ILLIAC では 24 元の逆マトリックスの計算は output の印刷をふくんで, 約5分である。

ここで, いわゆる影響線の計算に必要な $u_2 \sim u_8, v_2 \sim v_8$ の $Q_2, Q_4, Q_6, Q_8, Q_6', Q_4', Q_2'$ に関する項のみを抜き出すと, 表-3 のようである。この表をもとにして, 次のように部材応力を計算する。

$$(1) S_{31} = k_{31} \cos \alpha_1 (u_3) - k_{31} \cos \beta_1 (v_3) \\ = 0.61088 u_3 - 0.91632 v_3$$

これを計算すれば, 表-4, (1) のようである。

(1)' 水平反力を H とすれば, $H + S_{31} \cos \alpha_1 = 0$ であるから, $H = -S_{31} \cos \alpha_1$ となる。表-4, (1) の値に $-\cos \alpha_1$ を乗じて, H の影響線の縦距を得る。

$$(2) S_{12} = k_{12} (-v_2) = -0.32223 v_2$$

から, 表-4, (2) の値を与える。

$$(3) S_{32} = k_{32} \cos \alpha_2 (u_3 - u_2) + k_{32} \cos \beta_2 (v_3 - v_2) \\ = 0.15680 (u_3 - u_2) + 0.13589 (v_3 - v_2)$$

から, 表-4, (3) の値を与える。

$$(4) S_{42} = k_{42} (u_4 - u_2) = 0.38251 (u_4 - u_2)$$

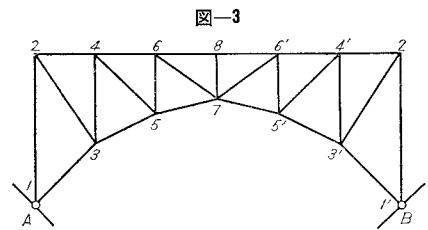


図-3

うかの検算をおわれば, $u_1 = v_1 = 0, u_1' = v_1' = 0$ として, これをまっ消して, 不静定アーチとしての性質を与える。ここで, 再び, 主対角線に関して対称であるかどうかを検算する。

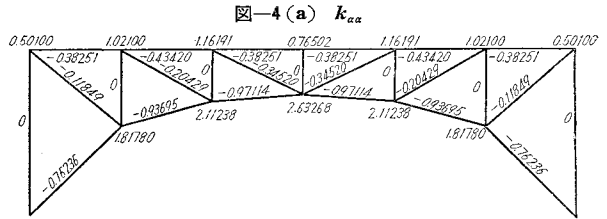


図-4(a) k_{aa}

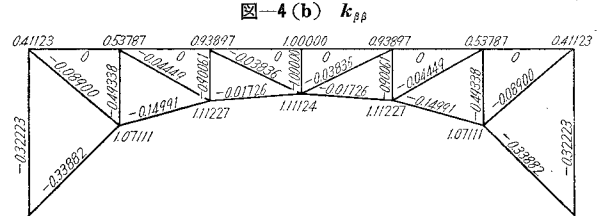


図-4(b) $k_{\beta\beta}$

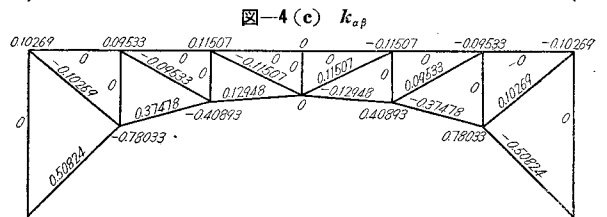


図-4(c) $k_{\alpha\beta}$

から, 表-4, (4) の値を得る。

$$(5) S_{43} = -k_{43} (v_4 - v_3) = 0.49338 (v_3 - v_4)$$

から, 表-4, (5) の値を与える。

$$(6) S_{53} = k_{53} \cos \alpha_3 (u_5 - u_3) - k_{53} \cos \beta_3 (v_5 - v_3) \\ = 1.00905 (u_5 - u_3) - 0.40362 (v_5 - v_3)$$

表-2 Spandrel Braced

節点	u													
	1	2	3	4	5	6	7	8	6'	5'	4'	3'	2'	1'
$\Sigma F_x = 0$	2	0	0.50100	-0.11849	-0.38251									
	3	-0.76236	-0.11849	1.81780	0	-0.93695								
	4		-0.38251	0	1.02100	-0.20429	-0.43420							
	5			-0.93695	-0.20429	2.11238	0	-0.97114				$k_{\alpha\alpha}$		
	6				-0.43420	0	1.16191	-0.34520	-0.38251					
	7					-0.97114	-0.34520	2.63268	0	-0.34520	-0.97114			
	8						-0.38251	0	0.76502	-0.38251	0			
	6'							-0.34520	-0.38251	1.16191	0	-0.43420		
$\Sigma F_y = 0$	2	0	0.10269	-0.10269	0									
	3	0.50824	-0.10269	-0.78033	0	0.37478								
	4		0	0	0.09533	-0.09533	0							
	5			0.37478	-0.09533	-0.40893	0	0.12948				$k_{\alpha\beta}$		
	6				0	0	0.11507	-0.11507	0					
	7				0.12948	-0.11507	0	0	0	0.11507	-0.12948			
	8					0	0	0	0					
	6'						0.11507	0	-0.11507	0	0			
5'							-0.12948		0	0.40893	0.09533	-0.37478		
4'								0	0.09533	-0.09533	0	0		
3'									-0.37478	0	0.78033	0.10269	-0.50824	
2'										0	0.10269	-0.10269	0	

備考 抹消

抹消

表-3

	Q_2	Q_4	Q_6	Q_8	Q_6'	Q_4'	Q_2'
u_2	0.04329	5.71197	6.59276	0.97543	-4.88688	-4.03118	-0.43964
u_3	1.13664	5.14941	2.97199	-1.35987	-3.82050	-2.68919	-0.24276
u_4	0.06715	4.04861	6.20063	1.54394	-4.27340	-3.68341	-0.41575
u_5	0.58658	4.77118	6.22139	-0.73845	-5.06270	-3.76157	-0.37906
u_6	0.12965	2.98468	3.85822	2.04515	-3.32557	-3.10214	-0.35321
u_7	0.41385	3.87148	5.01822	0	-5.01822	-3.87148	-0.41385
u_8	0.24143	3.04341	3.59190	0	-3.59190	-3.04341	-0.24143
v_2	3.07881	1.71130	0.40347	-0.58487	-0.63117	-0.35780	-0.02459
v_3	1.72834	8.55625	6.04196	-0.00790	-4.14677	-3.20166	-0.34076
v_4	1.71130	10.41820	6.86215	-0.00801	-4.31408	-3.31456	-0.35780
v_5	0.40925	7.04147	15.91327	4.88136	-4.47813	-4.39919	-0.62539
v_6	0.40347	6.86215	16.68485	5.25149	-4.28807	-4.31408	-0.63117
v_7	-0.58487	-0.00801	5.25149	20.07638	5.25149	-0.00801	-0.58487
v_8	-0.58487	-0.00801	5.25149	21.07638	5.25149	-0.00801	-0.58487

表-4 2,3の部材応力の影響線の値

		Q_2	Q_4	Q_6	Q_8	Q_6'	Q_4'	Q_2'
(1)	S_{21}	-0.0143	-0.5083	-0.9676	-1.2413	-0.9676	-0.5083	-0.0143
(2)	S_{12}	-0.9921	-0.5514	-0.1300	0.1885	0.2034	0.1153	0.0079
(3)	S_{32}	-0.0121	0.8420	0.1985	-0.2878	-0.3105	-0.1760	-0.0121
(4)	S_{32}	0.0092	-0.6363	-0.1500	0.2175	0.2347	0.1330	0.0092
(5)	S_{13}	0.0084	-0.9187	-0.4047	0	0.0826	0.0557	0.0084
(6)	S_{33}	-0.0226	0.2298	-0.7055	-1.3464	-1.1197	-0.5988	-0.0226
(1')	H	0.0119	0.4229	0.8051	1.0327	0.8051	0.4229	0.0119

から、表-4、(6)の値を得る。

(1) 基本公式および節点釣合方程式

さきに示した部材応力の変位による表示においては、温度変化による部材の伸縮を考慮してなかったので、これを考慮すると、次のようになる。

3. 平面滑節構造物の解法—様な温度変化を受ける場合—

v													右 辺	
1	2	3	4	5	6	7	8	6'	5'	4'	3'	2'	1'	
0	0.10269	-0.10269												P_2
0.50824	-0.10269	-0.78033	0	0.37478										P_3
	0	0	0.09533	-0.09533	0									P_4
		0.37478	-0.09533	-0.40893	0	0.12948					$k_{\alpha\beta}$			P_5
			0	0	0.11507	-0.11507	0							P_6
				0.12948	-0.11507	0	0	0.11507	-0.12948					P_7
					0	0	0	0	0					P_8
						0.11507	0	-0.11507	0	0				P_6'
							-0.12948	0	0.40893	0.09533	-0.37478			P_5'
									0.09533	-0.09533	0	0		P_4'
									-0.37478	0	0.78033	0.10269	-0.50824	P_3'
										0	0.10269	-0.10269	0	P_2'
-0.32223	0.41123	-0.08900												Q_2
-0.33882	-0.08900	1.07111	-0.49338	-0.14991										Q_3
	0	-0.49338	0.53787	-0.04449	0									Q_4
		-0.14991	-0.04449	1.11227	-0.90061	-0.01726					$k_{\beta\beta}$			Q_5
			0	-0.90061	0.93897	-0.03836	0							Q_6
				-0.01726	-0.03836	1.11124	-1.00000	-0.03836	-0.01726					Q_7
					0	-1.00000	1.00000	0						Q_8
						-0.03836	0	0.93897	-0.90061					Q_6'
						-0.01726		-0.90061	1.11227	-0.04449	-0.14991			Q_5'
								0	-0.04449	0.53787	-0.49338	0		Q_4'
									-0.14991	-0.49338	1.07111	-0.08900	-0.33882	Q_3'
										0	-0.08900	0.41123	-0.32223	Q_2'

抹消 | 抹消

温度上昇を $+t^\circ\text{C}$ とすれば,

$$S_{ij} = \frac{EA_{ij}}{l_{ij}} \left\{ \frac{(x_j - x_i)(u_j - u_i)}{l_{ij}} + \frac{(y_j - y_i)(v_j - v_i)}{l_{ij}} - \epsilon t l_{ij} \right\} = k_{ij} \{ (u_j - u_i) \cos \alpha_{ij} + (v_j - v_i) \cos \beta_{ij} \} - k_{ij} l_{ij} K_c \epsilon t \dots (6)$$

図-2 において, 釣合条件 $\Sigma F_x = 0$ は,

$$S_{10} \cos \alpha_{10} - S_{20} \cos \alpha_{20} - S_{30} \cos \alpha_{30} + S_{40} \cos \alpha_{40} + P_0 = 0$$

である。式(6)を代入して,

$$[]u + []v = P_0 - K_c \epsilon t \left(\sum_{i=1,4} k_{i0,a} l_{i0} - \sum_{i=2,3} k_{i0,a} l_{i0} \right) \dots (7)_1$$

となる。同様にして, 釣合条件 $\Sigma F_y = 0$ から,

$$[]u + []v = Q_0 - K_c \epsilon t \left(\sum_{i=1,2} k_{i0,\beta} l_{i0} - \sum_{i=3,4} k_{i0,\beta} l_{i0} \right) \dots (7)_2$$

となる。[]u, []v は連立一次方程式の左辺の項を意味し, さきに述べたようにして求められる。ここに, $k_{i0,a}$, $k_{i0,\beta}$ は $k_{i0} \cos \alpha_{i0}$, $k_{i0} \cos \beta_{i0}$ をそれぞれ意味するものである。 $\sum_{i=1,4} (\sum_{i=2,3})$ は, 注目する節点に座標原点をもってくるとき, $x > 0$ ($x < 0$) の平面にある部材についての加算を, $\sum_{i=1,2} (\sum_{i=3,4})$ は $y > 0$ ($y < 0$) の平面にある部材についての加算を意味する。従って, さきに述べた P_i, Q_i による変位を計算するための連立一次方程式の右辺を, 温度変化に対しては, 次のようにすればよい。

$$\begin{aligned} \Sigma F_x = 0 \text{ に対して, } & -K_c \epsilon t \left(\sum_{x>0} k_{i0,a} l_{i0} - \sum_{x<0} k_{i0,a} l_{i0} \right) \\ \Sigma F_y = 0 \text{ に対して, } & -K_c \epsilon t \left(\sum_{y>0} k_{i0,\beta} l_{i0} - \sum_{y<0} k_{i0,\beta} l_{i0} \right) \end{aligned}$$

$k_{i0} l_{i0}$ の単位は長さであり, $K_c \epsilon t = (EA/l)_c \epsilon t$ は(力/

長さ)であるから, $K_c \epsilon t k_{i0} l_{i0}$ は力の単位であり, 元は一致する。

(2) 計算例

さきに示した spandrel braced arch について, 温度応力を計算してみよう。計算に必要な数値は, 表-5 のようである。この表-5 をもとにして $l k_{i0,a}$, $l k_{i0,\beta}$ を部材に沿って図示すれば, 図-5(a), (b) のようになる。ただし, 単位は 10^2 in である。各部材の $l \cdot k_{i0,a}$ ($l \cdot k_{i0,\beta}$) の値をもとにして $(\sum_{x>0} k_{i0,a} \cdot l_{i0} - \sum_{x<0} k_{i0,a} \cdot l_{i0})$, $(\sum_{y>0} k_{i0,\beta} \cdot l_{i0} - \sum_{y<0} k_{i0,\beta} \cdot l_{i0})$ を計算して節点にかきこむ。従って, 連立一次方程式の右辺は, 表-6 (便宜上 2 行にかいてあるが, 本来は 1 行にかいて, 表-2 の右辺のところにもってくるべきである) のようになり, これを解くと, 表-7 のようになる。ただし, 単位は $-K_c \epsilon t \cdot (10^2 \text{ in})$ である。

部材応力 $S_{31}, S_{42}, S_{12}, S_{32}, S_{13}, S_{53}$ は, 式(6)によって計算できる。ここで, それぞれの部材応力の式(6)の第 1 項の値は, 表-8(a) 欄のようであり, 第 2 項の値は, 表-8(b) 欄のようになる。従って, 温度変化による部材応力は (a) と (b) の合計として求めることができる。ここで, $K_c = (EA/l)_c = 12.2 \times 10^{-2} E \text{ in}$ であるから, 表-8 の部材応力の単位は $-12.2 E \epsilon t$ (E の単位 lb/in^2) である。たとえば, 温度上昇の場合には $t > 0$, 従って, $S_{31} < 0$, すなわち, 圧縮力となる。

4. 立体滑節構造物の解法

表-5

部材	材	k	l	kl	$k \cos \alpha$	$k \cos \beta$	$lk \cos \alpha$	$lk \cos \beta$
上弦材	24	0.38251	360	1.37704×10^2	0.38251	0	1.37704×10^2	0
	46	0.43420	360	1.56312	0.43420	0	1.56312	0
	68	0.38251	360	1.37704	0.38251	0	1.37704	0
垂直材	12	0.32223	552	1.77871	0	0.32223	0	1.77871×10^2
	34	0.49338	312	1.53935	0	0.49338	0	1.53935
	56	0.90061	168	1.51302	0	0.90061	0	1.51302
	78	1.00000	120	1.20000	0	1.00000	0	1.20000
下材弦	13	1.10136	432.7	4.76558	0.91632	0.61088	3.96492	2.64328
	35	1.08669	387.7	4.21310	1.00905	0.40362	3.91209	1.56483
	57	0.98848	363.2	3.59016	0.98977	0.13077	3.56216	0.47496
斜材	23	0.20750	476.4	0.98853	0.15680	0.13589	0.74770	0.64738
	45	0.24881	397.3	0.98852	0.22545	0.10521	0.89571	0.41800
	67	0.38361	379.5	1.45580	0.36390	0.12130	1.38100	0.46033

図-5(a) $Ik_{i\alpha}$

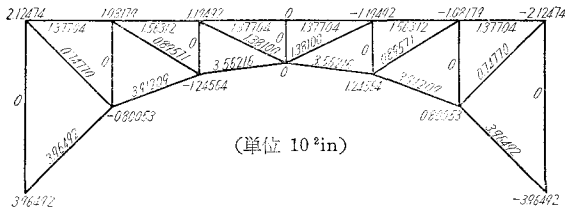


図-5(b) $Ik_{i\beta}$

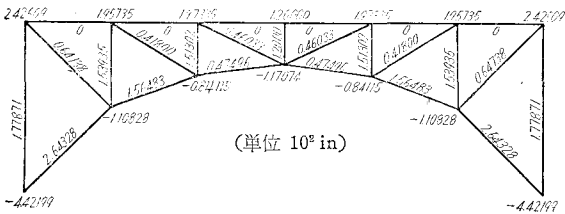


表-6

節点	右辺の値 (係数 $-K_c \epsilon t$)	
	$\Sigma F_x = 0$	$\Sigma F_y = 0$
2	2.12474	2.42609
3	-0.80053	-1.10828
4	1.08179	1.95735
5	-1.24564	-0.84115
6	1.19492	1.97335
7	0	-1.17074
8	0	1.20000
6'	-1.19492	1.97335
5'	1.24564	-0.84115
4'	-1.08179	1.95735
3'	0.80053	-1.10828
2'	-2.12474	2.42609

表-7

節点	u	v
2	12.87448	5.77613
3	2.53463	11.35986
4	9.02370	14.65794
5	2.51942	21.17423
6	4.76945	22.91464
7	0	26.63985
8	0	27.83985
6'	-4.76945	22.91464
5'	-2.51942	21.17423
4'	-9.02370	14.65794
3'	-2.53463	11.35986
2'	-12.87448	5.77613

表-8

部材	部材応力		
	(a)	(b)	計
31	-4.6170	4.7656	0.1486
42	-1.4730	1.3770	-0.0960
12	1.8612	1.7787	3.6399
32	-0.8625	0.9885	0.1260
43	-1.6338	1.5394	-0.0944
53	-3.9766	4.2131	0.2365

$$S_{ij} = \frac{EA_{ij}}{l_{ij}} \left\{ \frac{(u_j - u_i)(x_j - x_i)}{l_{ij}} + \frac{(v_j - v_i)(y_j - y_i)}{l_{ij}} + \frac{(w_j - w_i)(z_j - z_i)}{l_{ij}} \right\} = k_{ij} \{ (u_j - u_i) \cos \alpha_{ij} + (v_j - v_i) \cos \beta_{ij} + (w_j - w_i) \cos r_{ij} \} \dots (8)$$

ここに、 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos r$ は部材 ij の方向余弦の値である。もし、温度上昇 $t^\circ C$ による項を加えるならば、式(8)の右辺に $-k_{ij} l_{ij} K_c \epsilon t$ を加える。

(2) 立体滑節構造の節点釣合方程式の機械的作法

さきに誘導した平面滑節構造の節点釣合方程式の場合と同様、この場合についても、次の機械的作法が誘導される。

- a) 与えられた構造物の $(EA/l)/(EA/l)_c = k$ を計算する。
- b) 各部材の方向余弦を求めて、 $k \cos^2 \alpha = k_{\alpha\alpha}$, $k \cos^2 \beta =$

(1) 部材応力の変位による表示

任意に定めた直角座標軸 $o-x, y, z$ に対して、滑節部材 ij の座標を $(x_i, y_i, z_i), (x_j, y_j, z_j)$; 断面積を A_{ij} , 部材長を l_{ij} とする。部材力 S_{ij} のもとに、部材 ij の両節点 i が $(u_i, v_i, w_i), (u_j, v_j, w_j)$ の変位を生ずるものとすれば、部材応力 S_{ij} は次のようになる。

$=k_{\beta\beta}, k \cos^2 r = k_{\gamma\gamma}, k \cos \alpha \cos \beta = k_{\alpha\beta}, k \cos \alpha \cos r = k_{\alpha\gamma}, k \cos \beta \cos r = k_{\beta\gamma}$ を計算して、 k -図を作製する。

c) 注目する節点 0 について釣合方程式をたてるには、まず、その点に直角座標の原点をもってきて、考えるものとする。

d) $\Sigma F_x=0$ ($\Sigma F_y=0, \Sigma F_z=0$) の $u(v, w)$ の項の係数は次のようにする。

節点 0 にあつまる部材 io の $k_{\alpha\alpha}(k_{\beta\beta}, k_{\gamma\gamma})$ にすべて負符号をつけて、すなわち、 $-k_{\alpha\alpha}(-k_{\beta\beta}, -k_{\gamma\gamma})$ として、その部材の他の側の節点 i の $u_i(v_i, w_i)$ の係数とする。注目する節点の $u_0(v_0, w_0)$ の係数は、これらの部材の符号を考慮した $k_{\alpha\alpha}(k_{\beta\beta}, k_{\gamma\gamma})$ の和の符号を変えたものである。すなわち、 $+\Sigma k$ となる。従って、 $\Sigma F_x=0$ ($\Sigma F_y=0, \Sigma F_z=0$) の $u(v, w)$ の各項の係数の和は 0 である。

e) $\Sigma F_x=0$ の v の項の係数は $k_{\alpha\beta}$ であるが、次のようにする。

節点 0 に座標原点をもってきたとき、 $xy>0$ となる平面にある部材の $k_{\alpha\beta}$ を負符号、他の $xy<0$ となる平面にある部材の $k_{\alpha\beta}$ を正符号と定める。そして、これらを節点 0 と反対側の節点の v_i の係数とする。注目する節点 0 の v_0 の係数は、これらの符号を考えた $k_{\alpha\beta}$ の和の異符号のものとする。従って v の係数の和は 0 である。

f) $\Sigma F_x=0$ の w の項の係数は、 $k_{\alpha\gamma}$ であるが、これについては次のようにする。 $xz>0$ の平面にある部材の $k_{\alpha\gamma}$ を負符号、 $xz<0$ の平面の部材の $k_{\alpha\gamma}$ を正符号として、これらを各節点 i の w_i の係数とする。これらの符号を考えた $k_{\alpha\gamma}$ の和の異符号のものを w_0 の係数に用いる。

g) $\Sigma F_y=0$ の u の項の係数については、 $\Sigma F_x=0$ の v の項の係数と同じとする。

h) $\Sigma F_y=0$ の w の項の係数は $k_{\beta\gamma}$ であって、次のようにする。すなわち、 $yz>0$ の平面の部材の $k_{\beta\gamma}$ を負

符号、 $yz<0$ の平面の $k_{\beta\gamma}$ を正符号とし、これらを各節点の w_i の係数とする。これらの符号を考えた $k_{\beta\gamma}$ の和の異符号を w_0 の係数とする。

i) $\Sigma F_z=0$ の u, v の係数は、 $\Sigma F_x=0$ の $w, \Sigma F_y=0$ の w の係数と同様にする。

j) 以上のようにして、釣合方程式の係数が定められるが、これらはそれぞれの小区分においても対角線と対称であり、全体として、対角線に対称である。

以上を表示すると、**作表法-2** のようになる。

k) 右辺の値としては、節点荷重の x, y, z 方向の分力 P_i, Q_i, R_i とおく。もし、一樣な温度変化 ($t>0$) を考慮する場合には、右辺の値を次のようにおく。

$\Sigma F_x=0$ に対して、 $-K_c \varepsilon t \left(\sum_{x>0} k_{i\alpha, \alpha} \cdot l_{i\alpha} - \sum_{x<0} k_{i\alpha, \alpha} \cdot l_{i\alpha} \right)$
$\Sigma F_y=0$ に対して、 $-K_c \varepsilon t \left(\sum_{y>0} k_{i\alpha, \beta} \cdot l_{i\alpha} - \sum_{y<0} k_{i\alpha, \beta} \cdot l_{i\alpha} \right)$
$\Sigma F_z=0$ に対して、 $-K_c \varepsilon t \left(\sum_{z>0} k_{i\alpha, \gamma} \cdot l_{i\alpha} - \sum_{z<0} k_{i\alpha, \gamma} \cdot l_{i\alpha} \right)$

以上のようにして、機械的に釣合方程式をかき下ろすことができる。

(3) 計算例

図-6 の立体トラスを解いてみよう。この構造物は三次内の不静定である。便宜上、 $k=1$ とする。すなわち、対角線部材のみ断面積、長さが $\sqrt{2}A, \sqrt{2}l$ 、他の部材は A, l とする。座標軸は、図-7 のように選ぶものとする。すべての部材は xy, yz, xz 平面内にあるから、方向余弦は、 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos r=1, 1/\sqrt{2}, 0$ のいずれかであり、従って $k_{\alpha\alpha}, k_{\beta\beta}, k_{\gamma\gamma}, k_{\alpha\beta}, k_{\beta\gamma}, k_{\gamma\alpha}$ は、 $1, 0.5, 0$ のいずれかとなる。これらの値は図-7 のようになり、これにもとづき、機械的作表法をすれば、表-9 のようになる。この 36 元の連立一次方程式を電子計算機で解くと、表-10 のようになる。

従って、たとえば、部材応力 $S_{13}, S_{37}, S_{9,11}$ は表-10 の値によって、次のように計算される。

$$S_{13} = (u_3 - u_1) \cos \alpha_{13} + (v_3 - v_1) \sin \alpha_{13}$$

$$= (u_3 - u_1 + v_3 - v_1) / \sqrt{2} = -0.2327 \sqrt{2} (t)$$

$$S_{37} = (u_7 - u_5 + v_7 - v_5) / \sqrt{2} = -0.0215 \sqrt{2} (t)$$

$$S_{9,11} = (u_{11} - u_9 + v_{11} - v_9) / \sqrt{2} = -0.0341 \sqrt{2} (t)$$

その他の部材応力も、同じようにして計算できる。

この問題は、S. Timoshenko: Theory of Structures に、弾性方程式法によって解かれているものであって、結果は同一である。

5. むすび

著者は、電子計算機の利用一連立多元一次方程式および逆マトリックスの計算機による解法一の観点から、滑節構造物の解法には変形法が好ましいと考え、この見地にたつて、いかにして迅速に、かつ、誤りなく、連立一次方程式をつくるか、あるいは、stiffness matrix を求

行	釣合方程式	未知数	未知数に乗せらるべき係数	
			注目する節点	まわりの節点
1	$\Sigma F_x=0$	u	$\Sigma k_{\alpha\alpha}$	すべての部材に対し $-k_{\alpha\alpha}$
2		v	$\sum_{xy>0} k_{\alpha\beta} - \sum_{xy<0} k_{\alpha\beta}$	$xy>0$ の部材に対し $-k_{\alpha\beta}$ $xy<0$ の部材に対し $k_{\alpha\beta}$
3		w	$\sum_{xz>0} k_{\alpha\gamma} - \sum_{xz<0} k_{\alpha\gamma}$	$xz>0$ の部材に対し $-k_{\alpha\gamma}$ $xz<0$ の部材に対し $k_{\alpha\gamma}$
4	$\Sigma F_y=0$	u	第 2 列に同じ	
5		v	$\Sigma k_{\beta\beta}$	すべての部材に対し $-k_{\beta\beta}$
6		w	$\sum_{yz>0} k_{\beta\gamma} - \sum_{yz<0} k_{\beta\gamma}$	$yz>0$ の部材に対し $-k_{\beta\gamma}$ $yz<0$ の部材に対し $k_{\beta\gamma}$
7	$\Sigma F_z=0$	u	第 3 行に同じ	
8		v	第 6 行に同じ	
9		w	$\Sigma k_{\gamma\gamma}$	すべての部材に対し $-k_{\gamma\gamma}$

表-9 不静定立体トラス

節 点	未知数	u												v							
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6		
$\Sigma F_x=0$	1	1.5	-1.0	-0.5										0.5		-0.5					
	2	-1.0	1.5		-0.5											1.0	-1.0				
	3	-0.5		1.5	-1.0							$k_{\alpha\alpha}$			-0.5		0.5			-0.5	
	4			-1.0	1.5			-0.5													
	5			-0.5		2.0	-1.0	-0.5													0.5
	6					-10.	1.5			-0.5											
	7				-0.5	-0.5		2.0	-1.0												-0.5
	8							-1.0	1.5				-0.5								
	9						-0.5		2.0	-1.0	-0.5										
	10									-1.0	1.5										
	11								-0.5	-0.5		2.0	-1.0								
	12											-1.0	1.5								
$\Sigma F_y=0$	1	0.5		-0.5										2.0		-0.5	-1.0				
	2															1.0	-1.0				
	3	-0.5		0.5								$k_{\alpha\beta}$			-0.5	-1.0	2.0			-0.5	
	4														-1.0			1.0			
	5					0.5		-0.5													2.0
	6																-0.5				1.5
	7					-0.5		0.5													-0.5
	8														-0.5						-1.0
	9									0.5		-0.5									
	10																				
	11									-0.5		0.5									
	12																				-0.5
$\Sigma F_z=0$	1													0.5							
	2		-0.5			0.5															
	3															-0.5				0.5	
	4				0.5			-0.5													
	5		0.5			-0.5														0.5	
	6						-0.5			0.5							0.5				-0.5
	7				-0.5			0.5													
	8								0.5			-0.5			-0.5						
	9						0.5			-0.5											
	10										-0.5										
	11									-0.5		0.5									
	12												0.5								-0.5

図-6

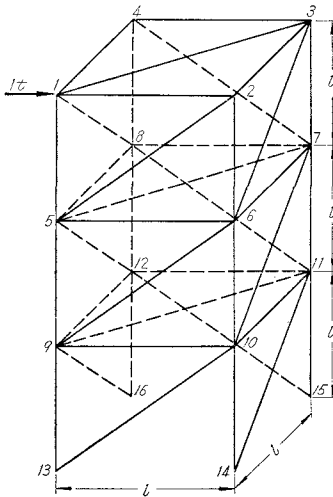


図-7

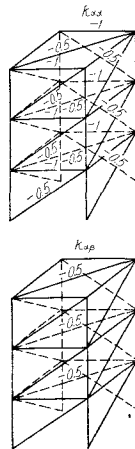
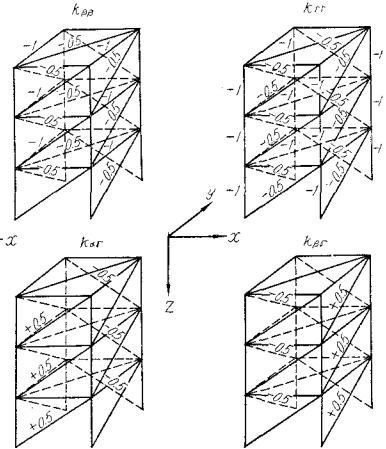


図-8



めるかの問題に対して、滑節構造の節点方程式の機械的作表法を提案した。次いで、計算例として、spandrel braced arch が、a) 単位の鉛直節点荷重を受ける場合

の部材応力の影響線、b) この arch の部材が一樣な温度変化をうける場合、c) 立体滑節トラスが節点水平荷重を受ける場合の計算をあげた。

の節点釣合方程式

												w												右 辺	
7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12								
$k_{\alpha\beta}$						$k_{\alpha\gamma}$						0													
-0.5						-0.5				0.5								0	1						
											0.5							0	0						
													-0.5					0	0						
																		0	0						
																		0	0						
																		0	0						
																		0	0						
																		0	0						
																		0	0						
																		0	0						
																		0	0						
																		0	0						
																		0	0						
																		0	0						
																		0	0						
																		0	0						
																		0	0						
																		0	0						
																		0	0						
																		0	0						
																		0	0						
																		0	0						
																		0	0						
																		0	0						
																		0	0						
																		0	0						
																		0	0						
																		0	0						
																		0	0						
																		0	0						
																		0	0						
																		0	0						
																		0	0						
																		0	0						
																		0	0						
																		0	0						
																		0	0						
																		0	0						
																		0	0						
																		0	0						
																		0	0						
																		0	0						
																		0	0						
																		0	0						
																		0	0						
																		0	0						
																		0	0						
																		0	0						
																		0	0						
																		0	0						
																		0	0						
																		0	0						
																		0	0						
																		0	0						
																		0	0						

表-10 36元一次連立方程式の解

	u	v	w
1	16.9722	-2.7395	-0.7855
2	16.2049	2.7395	3.7855
3	11.0278	2.7395	2.2145
4	10.7951	-2.7395	-2.2145
5	9.8666	-0.8451	-1.0183
6	9.1207	3.0778	3.0183
7	6.1334	2.8451	1.9817
8	5.8793	-1.0778	-1.9817
9	3.8729	0.1612	-0.7379
10	3.1612	2.0929	1.7379
11	2.1271	1.8388	1.2621
12	-1.8388	-0.0929	-1.2621

滑節構造物の解法には Flexibility Coefficient Method (応力法) と Stiffness Coefficient Method (変形法) とが考えられる。わが国では、高層多スパン ラーメンを解く場合、たわみ角法による節点および層釣合方程式の作成において、機械的作表法に習熟しているので、諸外国とは事情を若干異にしており、滑節構造物の解法に対しても、変形法と機械的作表法が適当と思われる。

変形法による場合には、電子計算機の発達した現在では、いかに節点釣合方程式を、迅速に、かつ誤りなく書くかの点に重点をおくべきであると思う。この点において、著者の機械的作表法は役立つところが少なくないと思う。この方法は、Structural analysis by matrix algebra (matrix structural analysis) でなく、連立一次方程式を機械的作表法によってつくり、計算機にける方法である。従って、大記憶容量の計算機を必要としない。

参 考 文 献

- 1) Mise, K.; Memoirs of Faculty of Engineering, Kyushu Univ., 2.4 (1922), p. 175.
- 2) 小野 薫: 高等建築学第4巻, 複式汎論, 常盤書房, 昭9. 倉西正嗣: 一般構造力学, 応用力学講座3 (共立出版, 1960) にも変形法に関する記述がある。また、いろいろな構造力学の参考書にも簡単にふれられているが、原理を示したにとどまっている。
- 3) 小西一郎: 土木学会論文集, 第9号 (昭25)
- 4) Harold C. Martin; Journal of Engineering Mechanics Division, Proc. of A.S.C.E., 82 (1956), paper 1070. (原稿受付: 1960.10.13)