【報　告】

土木計画における産業連関分析と Linear Programming の適用（追補）

鈴　木　雅　次*
川　北　米　良**

要　旨　土木学会誌第 44 巻 第 4 号に掲載の「土木計画における 産業連関分析と Linear Programming の適用」の中の一項目「Linear Programming の適用による立地産業の業種・規模の選定」に関する例題の算式 (36) ～(41) の解法は，紙面の都合で 割愛した。 しかるに，その後各方面からこれに関する照会をしばしば受けるので，ここにその解法を記し，前文の追補とする。

1. Linear Programming の適用による立地産業の業種・規模の選定に関する 例題の解法

本誌第 44 巻 第 4 号 13～14 ページに揚載の，臨海工業地帯の開発計画における適正立地産業の業種・規模の選定に関する例題は

（制約条件式）

$$
\left.\begin{aligned}
&(1-a_{11}^{RR})X_1^R-a_{11}^{RS}X_1^S-a_{13}^{RR}X_3^{R'}-a_{13}^{RS}X_3^S-a_{14}^{RR}X_4^{R'}-a_{14}^{RS}X_4^S\geqq V_1^R\\
&-a_{11}^{SR}X_1^R+(1-a_{11}^{SS})X_1^S-a_{13}^{SR}X_3^{R'}-a_{13}^{SS}X_3^S-a_{14}^{SR}X_4^{R'}-a_{14}^{SS}X_4^S\geqq V_1^S\\
&a_{21}^{RR}X_1^R+a_{21}^{RS}X_1^S+a_{23}^{RR}X_3^{R'}+a_{23}^{RS}X_3^S+a_{24}^{RR}X_4^{R'}+a_{24}^{RS}X_4^S\leqq V_2^R\\
&a_{21}^{SR}X_1^R+a_{21}^{SS}X_1^S+a_{23}^{SR}X_3^{R'}+a_{23}^{SS}X_3^S+a_{24}^{SR}X_4^{R'}+a_{24}^{SS}X_4^S\leqq V_2^S\\
&-a_{31}^{RR}X_1^R-a_{31}^{RS}X_1^S+(1-a_{33}^{RR})X_3^{R'}-a_{33}^{RS}X_3^S-a_{34}^{RR}X_4^{R'}-a_{34}^{RS}X_4^S\geqq V_3^R\\
&-a_{31}^{SR}X_1^R-a_{31}^{SS}X_1^S-a_{33}^{SR}X_3^{R'}+(1-a_{33}^{SS})X_3^S-a_{34}^{SR}X_4^{R'}-a_{34}^{SS}X_4^S\geqq V_3^S\\
&-a_{41}^{RR}X_1^R-a_{41}^{RS}X_1^S-a_{43}^{RR}X_3^{R'}-a_{43}^{RS}X_3^S+(1-a_{44}^{RR})X_4^{R'}-a_{44}^{RS}X_4^S\geqq V_4^R\\
&-a_{41}^{SR}X_1^R-a_{41}^{SS}X_1^S-a_{43}^{SR}X_3^{R'}-a_{43}^{SS}X_3^S-a_{44}^{SR}X_4^{R'}+(1-a_{44}^{SS})X_4^S\geqq V_4^S\\
&\qquad b_3X_3^{R'}-b_3X_3^R\geqq B_3\\
&\qquad b_3X_3^{R'}-b_3X_3^R\leqq pB_3\\
&\qquad b_4X_4^{R'}-b_4X_4^R\geqq B_4\\
&\qquad b_4X_4^{R'}-b_4X_4^R\leqq pB_4\\
&\quad b_3X_3^{R'}-b_3X_3^R+b_4X_4^{R'}-b_4X_4^R=B\\
&X_1^R\geqq 0,\quad X_3^{R'}\geqq 0,\quad X_4^{R'}\geqq 0,\quad X_j^R\geqq 0\quad (j=1,3,4)
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots[36]
$$

のもとで

（目的式）

$$
\begin{aligned}
Y=&c_1^RX_1^R+c_1^SX_1^S+c_3^RX_3^{R'}+c_3^SX_3^S+c_4^RX_4^{R'}\\
&+c_4^SX_4^S\cdots\cdots\cdots\cdots[37]
\end{aligned}
$$

を最大ならしめる，という linear programming の問題であつた。ただし

$$X_3^{R'}=X_3^R+\varDelta X_3^R,\quad X_4^{R'}=X_4^R+\varDelta X_4^R\ \cdots\cdots\cdots[38]$$

[36] の右辺定数項 V_1^R, V_1^S, V_3^S, V_4^S は

$$V_i^k=a_i^{kR}{}_2\max X_2^R+a_i^{kS}{}_2\max X_2^S+\sum_l\bar{F}_i^{kl}\ \cdots\cdots\cdots[39]$$

$$\begin{pmatrix}k=R\ \text{の場合}\quad i=1,\quad l=R,S\\ k=S\ \text{の場合}\quad i=1,3,4\end{pmatrix}$$

V_2^R, V_2^S は

$$V_2^k={}_{\max}X_2^k-a_{22}^{kR}{}_{\max}X_2^R-a_{22}^{kS}{}_{\max}X_2^S-\sum_l F_2^{kl}\ \cdots\cdots\cdots[40]$$

$$(k=R,S\quad l=R,S)$$

V_3^R, V_4^R は

$$V_i^R=a_i^{RR}{}_2\max X_2^R+a_i^{RS}{}_2\max X_2^S+\sum_l\bar{F}_l^{Rl}\quad (i=3,4)\ \cdots\cdots\cdots[41]$$

[ ] 内の数字は前記第 4 号に示した式の番号を示す。この問題を simplex 判定法で解く。

まず制約条件式 [36] の最初の 12 個の不等式の左辺に，それぞれ 調整変数（左辺と 右辺の差）$X_5, X_6, \cdots\cdots,$ X_{16} を付加して等式化すれば次式のようになる。

* 名誉員　工博　元土木学会会長　日本大学教授
** 正員　工修　日本大学理工学部土木工学科教室

（制約条件式）

$$\left.\begin{aligned}
&(1-a^{RR}_{11})X^R_1-a^{RS}_{11}X^S_1-a^{RR}_{13}X^{R'}_3-a^{RS}_{13}X^S_3-a^{RR}_{14}X^{R'}_4-a^{RS}_{14}X^S_4X_5=V^R_1\\
&-a^{SR}_{11}X^R_1+(1-a^{SS}_{11})X^S_1-a^{SR}_{13}X^{R'}_3-a^{SS}_{13}X^S_3-a^{SR}_{14}X^{R'}_4-a^{SS}_{14}X^S_4-X_6=V^S_1\\
&a^{RR}_{21}X^R_1+a^{RS}_{21}X^S_1+a^{RR}_{23}X^{R'}_3+a^{RS}_{23}X^S_3+a^{RR}_{24}X^{R'}_4+a^{RS}_{24}X^S_4+X_7=V^R_2\\
&a^{SR}_{21}X^R_1+a^{SS}_{21}X^S_1+a^{SR}_{23}X^{R'}_3+a^{SS}_{23}X^S_3+a^{SR}_{24}X^{R'}_4+a^{SS}_{24}X^S_4+X_8=V^S_2\\
&-a^{RR}_{31}X^R_1-a^{RS}_{31}X^S_1+(1-a^{RR}_{33})X^{R'}_3-a^{RS}_{33}X^S_3-a^{RR}_{34}X^{R'}_4-a^{RS}_{34}X^S_4-X_9=V^R_3\\
&-a^{SR}_{31}X^R_1-a^{SS}_{31}X^S_1-a^{SR}_{33}X^{R'}_3+(1-a^{SS}_{33})X^S_3-a^{SR}_{34}X^{R'}_4-a^{SS}_{34}X^S_4-X_{10}=V^S_3\\
&-a^{RR}_{41}X^R_1-a^{RS}_{41}X^S_1-a^{RR}_{43}X^{R'}_3-a^{RS}_{43}X^S_3+(1-a^{RR}_{44})X^{R'}_4-a^{RS}_{44}X^S_4-X_{11}=V^R_4\\
&-a^{SR}_{41}X^R_1-a^{SS}_{41}X^S_1-a^{SR}_{43}X^{R'}_3-a^{SS}_{43}X^S_3-a^{SR}_{44}X^{R'}_4+(1-a^{SS}_{44})X^S_4-X_{12}=V^S_4\\
&\qquad b_3X^{R'}_3-b_3X^R_3-X_{13}=B_3\\
&\qquad b_3X^{R'}_3-b_3X^R_3+X_{14}=pB_3\\
&\qquad b_4X^{R'}_4-b_4X^R_4-X_{15}=B_4\\
&\qquad b_4X^{R'}_4-b_4X^R_4+X_{16}=pB_4\\
&\qquad b_3X^{R'}_3-b_3X^R_3+b_4X^{R'}_4-b_4X^R_4=B
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

また，この際目的式 [37] を次のように考える。

（目的式）

$$Y=c^R_1X^R_1+c^S_1X^S_1+c^R_3X^{R'}_3+d^R_3X^R_3+c^S_3X^S_3+c^R_4X^{R'}_4+d^R_4X^R_4+c^S_4X^S_4+d_5X_5+d_6X_6+\cdots\cdots+d_{16}X_{16}\to\max \quad\cdots\cdots(2)$$

ここに*

$$A=\begin{bmatrix}
(1-a^{RR}_{11}) & -a^{RS}_{11} & -a^{RR}_{13} & 0 & -a^{RS}_{13} & -a^{RR}_{14} & 0 & -a^{RS}_{14} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-a^{SR}_{11} & (1-a^{SS}_{11}) & -a^{SR}_{13} & 0 & -a^{SS}_{13} & -a^{SR}_{14} & 0 & -a^{SS}_{14} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
a^{RR}_{21} & a^{RS}_{21} & a^{RR}_{23} & 0 & a^{RS}_{23} & a^{RR}_{24} & 0 & a^{RS}_{24} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
a^{SR}_{21} & a^{SS}_{21} & a^{SR}_{23} & 0 & a^{SS}_{23} & a^{SR}_{24} & 0 & a^{SS}_{24} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-a^{RR}_{31} & -a^{RS}_{31} & (1-a^{RR}_{31}) & 0 & -a^{RS}_{33} & -a^{RR}_{34} & 0 & -a^{RS}_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-a^{SR}_{31} & -a^{SS}_{31} & -a^{SR}_{33} & 0 & (1-a^{SS}_{33}) & -a^{SR}_{34} & 0 & -a^{SS}_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-a^{RR}_{41} & -a^{RS}_{41} & -a^{RR}_{43} & 0 & -a^{RS}_{43} & (1-a^{RR}_{44}) & 0 & -a^{RS}_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-a^{SR}_{41} & -a^{SS}_{41} & -a^{SR}_{43} & 0 & -a^{SS}_{43} & -a^{SR}_{44} & 0 & (1-a^{SS}_{44}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & b_3 & -b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & b_3 & -b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_4 & -b_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_4 & -b_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & b_3 & -b_3 & 0 & b_4 & -b_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}\cdots(3)$$

$$V=\{V^R_1,\ V^S_1,\ V^R_2,\ V^S_2,\ V^R_3,\ V^S_3,\ V^R_4,\ V^S_4,\ B_3,\ pB_3,\ B_4,\ pB_4,\ B\}\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

ここに { } は列 vector を意味する。

目的式 (2) の右辺の係数を成分とする列 vector を C とすれば

$$C=\{c^R_1,\ c^S_1,\ c^R_3,\ d^R_3,\ c^S_3,\ c^R_4,\ d^R_4,\ c^S_4,\ d_5,\ d_6,\ \cdots\cdots,\ d_{16}\}\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

また

$$X=\{X^R_1,\ X^S_1,\ X^{R'}_3,\ X^R_3,\ X^S_3,\ X^{R'}_4,\ X^R_4,\ X^S_4,\ X_5,\ X_6,\cdots\cdots,X_{16}\}\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

と置けば (1), (2) は (3)～(6) を用いて次のように matrix で表示される。

（制約条件式）

$$\left.\begin{aligned}AX&=V\\ X&\geqq 0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

（目的式）

$$Y=C'X\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

ただし C' は C の転置 vector である。

Matrix A から任意に 13 個の列 vector を選択し，これをAの最前部に移し，その部分の matrix (13 行，13 列の matrix) を A_1，その後部に残された 7 個の列 vector でできた matrix (13行，7列の matrix) を A_2

* $d^R_3=d^R_4=d_5=d_6=\cdots\cdots=d_{16}=0$

とする。

(1) の左辺各項の係数を元素とする matrix を A，右辺定数項を成分とする列 vector を V とすれば，A は 13 行，20 列の matrix となり (3) 式のとおりとなる。

とすれば

$$A=(A_1,\ A_2) \quad \cdots\cdots (9)$$

(9) に対応して成分の配置変えを施こした (4), (5), (6) の列 vector をそれぞれ

$$V=\begin{pmatrix}V_1\\V_2\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix} \quad \cdots\cdots (10)$$

ここに V_1, C_1, X_1 はいずれも A_1 に対応する 13 個の成分の列 vector であり，V_2, C_2, X_2 は A_2 に対応する 7 個の成分の列 vector である。

いま選択した 13 個の列 vector が制約条件式 (7) を満足し，目的式 (8) の値 Y を最大にする最適解であるための必要十分条件は

$$\left.\begin{array}{l} C_2'-C_1'A_1^{-1}A_2<0 \\ A_1^{-1}V>0 \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots (11)$$

で，そのときに求める最適解は

$$X_1=A_1^{-1}V \quad \cdots\cdots (12)$$

で与えられる。(11), (12) を simplex 判定法という。

ただし C_1', C_2' はそれぞれ C_1, C_2 の転置 vector，A_1^{-1} は A_1 の逆 matrix である。

もし選択した列 vector について (11) が成立しなければ，再び A_1, A_2 の列 vector の選択を変え，(11) が成立するまで同様の手法をくり返す。(11) が成立したとき，求める最適解 X_1 は (12) で得られる。こうして求められた最適解の $X_3^{R'}, X_3^R, X_4^{R'}, X_4^R$ を [38] に代入して，$\varDelta X_3^R$ および $\varDelta X_4^R$ を求めれば，これがわが国の輸出額を最大ならしめるための，当地域の開発における適正立地産業の生産規模である。また計算の結果，$\varDelta X_3^R$ または $\varDelta X_4^R$ のいずれかが 0 となることがある。この場合は 0 となつた業種は，当地域の開発計画によつて輸出を最大限に伸展させる目的からは，新しく立地させる産業として，あまり適正ではないことを示す。

なお (11), (12) の計算は簡単ではないが，G.B. Dantzig あるいは Charnes の simplex 表にしたがえば，一定方式の演算を機械的に有限回数くり返すことにより，最適解を求めることができる。

この例題について simplex 表による計算法を説明することは，いたずらに理解しにくいものとなるから，その説明は他の文献[1)2)3)]にゆずる。

2. 結　　言

以上のようにして，linear programming により得られた最適解は，開発計画の目的達成のための立地適正産業の業種・規模を与えると同時に，この開発計画が実現したときの，他の関連産業に対する波及効果が予測される。

本誌第 44 巻 第 4 号に掲載の「土木計画における産業連関分析と Linear Programming の適用」は本文による追補をもつて一応完結した。これらはいずれも土木計画に関する Operations Research の一部を構成するものである。

参 考 文 献

1) A. Charnes, W.W. Cooper and A. Henderson : An Introduction to Linear Programming. (1953)

2) 鈴木雅次・川北米良：産業連関論における Linear Programming の応用。港湾，1958. No.12, Vol.XXXV.

3) 鈴木雅次・川北米良：総合開発計画における Linear Programming の適用。港湾，1959. No.1, Vol.XXXVI.

本誌第 44 巻 第 4 号 登載の本報告の正誤表

ページ	行	誤	正
7	最下欄外	日本大学工学部……	日本大学理工学部……
9	右 1	$\longrightarrow\vert\leftarrow$ 外生部門 $\rightarrow\vert$ $\cdots, n, n+1$	$\longrightarrow\vert\leftarrow$ 外生部門 $\rightarrow\vert$ $\cdots, n,\ n+1$
11	左下より 5	$i=1,2,\cdots,g,r+1,\cdots,n.$	$i=1,2,\cdots,h,r+1,\cdots,n.$
12	左 12	$\sum_{i=1}^{n}P_j=$	$\sum_{i=1}^{n}P_i=$
13	左下より 3	(29)～(31) 式の右辺……	(29)～(31)は一次形式で式の右辺…
13	左下より 2	……コの X_j^l と……	……コの X_j^k と……
13	右 1	$X_j^l\geqq 0(l=\cdots\cdots$	$X_j^k\geqq 0(k=\cdots\cdots$
13	右下より 13	……で与えられた $\{g+h\cdots\cdots$	…で与えられた一次形式の $\{g+h\cdots$
14	13	$-a_{44}^{RS}X_4^{R'}+(1-a_{44}^{SS})X_4^S$	$-a_{44}^{SR}X_4^{R'}+(1-a_{44}^{SS})X_4^S$
14	左下より 12	$+\sum_l \bar{F}_i^{kl}$	$+\sum_l \bar{F}_i^{Rl}$
14	右下より 8	生産コストを構成因子	生産コストの構成因子