

中谷橋の応力計算について

—Kaniの方法による合成トラス上弦材の簡易解法—

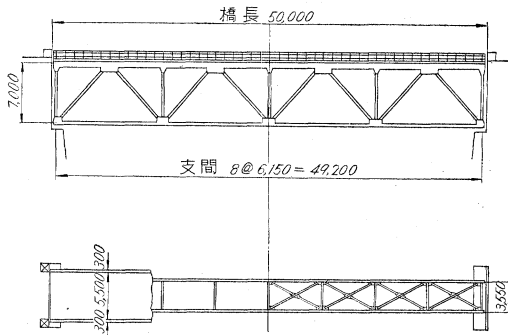
関 利 雄*
佐々木道夫**

1. ま え が き

合成トラスは、すでにわが国でも実現をみ、その計算並びに、応力測定などについて報告がなされているが、これの厳密な応力解析をするには、相当の労力となるようである¹⁾。そこで、できるだけ実際の構造にそくした、簡単な計算法として G. Kani による固定モーメント法²⁾を用いると、収れんがはやくて便利であるので、2級国道高知木頭徳島線に架設した、中谷橋の計算を例にとつて紹介することにする。特にトラスの上弦材に着目して、その曲げモーメントを求める手段を中心に、論を進める。

要するに、トラス自身のタワミが、連続合成桁である上弦材の曲げモーメントにおよぼす影響を、簡単に求めるのが、この計算法の特長といえる。

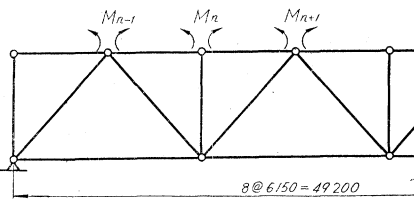
図-1 中谷橋一般図



2. 静定基本系および不静定量

上弦材は、直接これに加わる荷重による曲げモーメント

図-2 静定基本系



* 正員 徳島県土木部道路計画課橋梁係長

** 正員 汽車製造KK橋梁技術部設計課

トと、トラスとしての部材応力を受ける。曲げモーメントに対しては、8 径間連続桁として取扱い、部材応力に対しては、普通のように各格点はヒンジとみなした。

連続桁である上弦材の不静定量として、各支点上の曲げモーメントをとることとした。

3. コンクリート スラブの有効幅

コンクリート スラブの有効幅について、くわしく解析すると、橋軸上の各場所においてそれぞれ異なつた値となつて、非常に問題が複雑となる。しかし、コンクリートの有効幅のいくぶんかの誤差が、応力度におよぼす影響は、比較的少ないので、従来の設計示方書に従つて算出した。

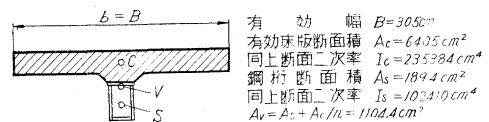
(1) トラスの部材応力に対する有効幅

この場合、トラスは通常の静定合成桁と同様に考えてよく、従つて、わが国合成桁示方書によつて、トラスの支間と、コンクリート スラブ幅との比から求める。

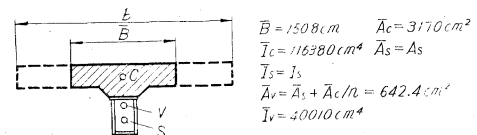
(2) 弦材の曲げモーメントに対する有効幅

トラス格間距離を支間とし、DIN 1078 によつて求めた(わが国示方書案には、不静定合成桁の有効幅に対する指示がないためである)。

図-3 上弦材断面諸元



(a) 弦材応力に抵抗する断面



(b) 曲げモーメントに抵抗する断面

4. 死荷重による上弦材の曲げモーメント

上弦材は、8 径間連続桁とみなすが、さらに各支点はトラスのタワミによる変位をするので、この影響を考慮に入れた。この場合、通常用いられる弾性方程式群によ

る演算は、非常に複雑となるため、固定モーメント法を応用した。計算順序は次のごとく3段階に分けられる。

第1段：トラス上弦の各格点を固定端と考え、直接に弦材に加わる死荷重による固定端モーメントを計算する。

第2段：トラスの各格点のタワミを、弾性荷重を用いて求め、相隣格点のタワミの差から生ずる固定端モーメントを計算する。

第3段：第1段および第2段で算出されたモーメントを加算し、さらに格点の回転により生ずる固定端モーメントを算出し、各格点の左右に同じ曲げモーメントが働らくように分配する。

(1) 各部材の断面積比

ここに計算の便宜上、標準断面二次率 I_0 と標準断面積 A_0 をそれぞれ次のごとく選ぶ。

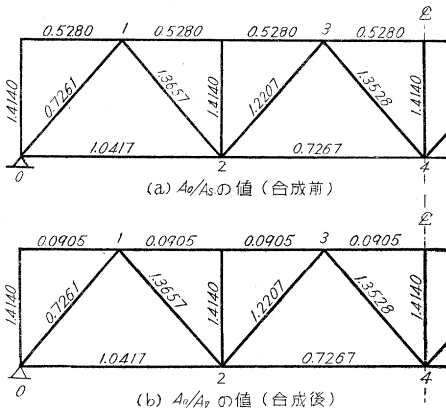
$$I_0 = \bar{I}_s = 102\,410 \text{ cm}^4$$

$$A_0 = 100 \text{ cm}^2$$

$$I_0/A_0 = 102\,410/100 = 1\,024.1 \text{ cm}^2 = 0.102\,41 \text{ m}^2$$

また、各部材において A_0/A_s および A_0/A_V を計算すると 図-4 のようになる。

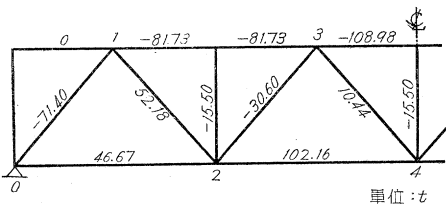
図-4 断面積比



(2) トラスの死荷重応力

死荷重による各部材応力を 図-5 に示す。

図-5 死荷重応力 (S_i^d) の値



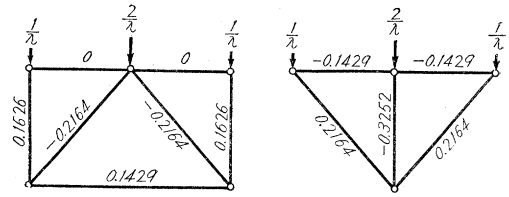
(3) 格点に $1/\lambda$ なる荷重を加えたときの部材応力

$$1/\lambda = 0.1626, \quad 2/\lambda = 0.3252$$

(4) 死荷重による上弦材の固定端モーメント

弦材に加わる死荷重強度を w_d とし、 i 点における k 点側の固定端モーメントを $\bar{M}_{i,k,B}$ とすると、各格点で

図-6 S_i^λ の値



の値は次のようになる。

$$\bar{M}_{1,0,B} = -\frac{w_d}{8}\lambda^2 = -0.125 \cdot 2.19 \cdot 6.15^2 = -10.35 \text{ tm}$$

$$\bar{M}_{i,k,B} = \frac{w_d}{12}\lambda^2 = \frac{2.19 \cdot 6.15^2}{12} = 6.90 \text{ tm}$$

$$\bar{M}_{k,i,B} = -\frac{w_d}{12}\lambda^2 = -6.90 \text{ tm}$$

(5) トラスのタワミ

このさいも計算の便宜上、死荷重によるトラスのタワミそのもの \bar{w}_0 ではなく、 $EI_0\bar{w}_0$ なる値として求める。従つて弾性荷重 W_i も、はじめから EI_0 を乗じて取扱う。

i 点の弾性荷重は、部材長を s とすると、次式で表わされる。

$$EI_0 W_i = \frac{I_0}{A_0} \sum S_i^\lambda S_i^d \frac{A_0}{A_s} s$$

そこで各点の弾性荷重は、

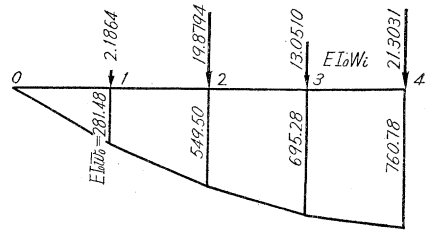
$$EI_0 W_1 = 0.102\,41 \{ (-0.2164)(-71.40) + 0.7261 \cdot 9.318 + (-0.2164) \cdot 52.18 + 1.3657 \cdot 9.318 + 0.1626 (-15.50) \cdot 1.414 \cdot 7 + 0.1429 \cdot 46.67 \cdot 1.0417 \cdot 12.3 \} = 2.1864$$

$$EI_0 W_2: \text{以下計算式省略} = 19.8794$$

$$EI_0 W_3: 13.0510$$

$$EI_0 W_4: 21.3031$$

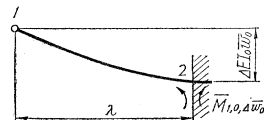
図-7 死荷重によるトラスのタワミ



(6) トラスのタワミによる固定端モーメント

a) 端格間における固定端モーメント

図-8

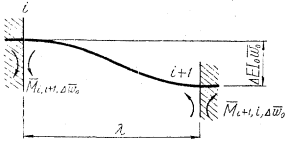


$$\bar{M}_{1,0,4\bar{w}_0} = \frac{3EI_s}{\lambda^2} \Delta \bar{w}_0 = \frac{3}{\lambda^2} \frac{I_0}{I_s} EI_0 \Delta \bar{w}_0$$

$$= \frac{3}{6.15^2} \times 281.48 = 22.33 \text{ tm}$$

b) 中間格間における固定端モーメント

図-9



$$\bar{M}_{i,k,4\bar{w}_0} = \frac{6EI_s}{\lambda^2} \Delta \bar{w}_0 = \frac{6}{\lambda^2} \frac{I_0}{I_s} EI_0 \Delta \bar{w}_0$$

そこで

$$\bar{M}_{1,2,4\bar{w}_0} = \frac{6}{\lambda^2} \frac{I_0}{I_s} EI_0 \Delta \bar{w}_0 = \frac{6}{6.15^2} \cdot (549.50 - 281.48)$$

$$= 42.52 \text{ tm}$$

$$\bar{M}_{2,1,4\bar{w}_0} = \bar{M}_{1,2,4\bar{w}_0}$$

$$\bar{M}_{2,3,4\bar{w}_0} = \frac{6}{6.15^2} \cdot (695.28 - 549.50) = 23.13 \text{ tm}$$

$$\bar{M}_{3,2,4\bar{w}_0} = \bar{M}_{2,3,4\bar{w}_0}$$

$$\bar{M}_{3,4,4\bar{w}_0} = \frac{6}{6.15^2} \cdot (760.78 - 695.28) = 10.39 \text{ tm}$$

$$\bar{M}_{4,3,4\bar{w}_0} = \bar{M}_{3,4,4\bar{w}_0}$$

(7) 固定端モーメントの合計

$$\bar{M}_{1,0} = \bar{M}_{1,0,B} + \bar{M}_{1,0,4\bar{w}_0} = -10.35 + 22.33 = 11.98 \text{ tm}$$

$$\bar{M}_{1,2} = \bar{M}_{i,k,B} + \bar{M}_{1,2,4\bar{w}_0} = 6.90 + 42.52 = 49.42 \text{ tm}$$

$$\bar{M}_{2,1} = \bar{M}_{k,i,B} + \bar{M}_{2,1,4\bar{w}_0} = -6.90 + 42.52 = 35.62 \text{ tm}$$

$$\bar{M}_{2,3} = \bar{M}_{i,k,B} + \bar{M}_{2,3,4\bar{w}_0} = 6.90 + 23.13 = 30.03 \text{ tm}$$

$$\bar{M}_{3,2} = \bar{M}_{k,i,B} + \bar{M}_{3,2,4\bar{w}_0} = -6.90 + 23.13 = 16.23 \text{ tm}$$

$$\bar{M}_{3,4} = \bar{M}_{i,k,B} + \bar{M}_{3,4,4\bar{w}_0} = 6.90 + 10.39 = 17.29 \text{ tm}$$

$$\bar{M}_{4,3} = \bar{M}_{k,i,B} + \bar{M}_{4,3,4\bar{w}_0} = -6.90 + 10.39 = 3.49 \text{ tm}$$

(8) モーメントの分配

モーメントの分配に関しては、すべて G. Kani の方法に従って行う。

a) 格点の回転によつて生ずる固定端モーメント G.

Kani の公式によると格点の回転によつて生ずる固定端モーメント $M_{i,k}'$ についての関係式は次のようになる。

$$M'_{i,k} = \mu_{i,k} (\bar{M}_i + M'_{k,i} + M'_{i-1,i})$$

$$\text{ただし } \bar{M}_i = \bar{M}_{i,k} + \bar{M}_{i,i-1}$$

$$\mu_{i,k} = -\frac{1}{2} \frac{m_{i,k}}{m_{i,k} + m_{i,i-1}}$$

$m_{i,k}$; 一方の桁端がヒンジの場合は……0.75

両方の桁端が固定の場合は……1.00

まず $\mu_{i,k}$ を計算すると次のようになる。

$$\mu_{1,0} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{0.75}{0.75 + 1.00} = -0.214$$

$$\mu_{1,2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1.00}{0.75 + 1.00} = -0.286$$

$$\mu_{2,1} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1.00}{1.00 + 1.00} = -0.250$$

$$\mu_{2,3} = \mu_{2,1} = -0.250$$

$$\mu_{3,2} = \mu_{3,4} = -0.250$$

また \bar{M}_i は

$$\bar{M}_1 = \bar{M}_{1,2} + \bar{M}_{1,0} = 49.42 + 11.98 = 61.40 \text{ tm}$$

$$\bar{M}_2 = \bar{M}_{2,3} + \bar{M}_{2,1} = 30.03 + 35.62 = 65.65 \text{ tm}$$

$$\bar{M}_3 = \bar{M}_{3,4} + \bar{M}_{3,2} = 17.29 + 16.23 = 33.52 \text{ tm}$$

この $\mu_{i,k}$ と \bar{M}_i を用いて $M_{i,k}'$ を計算すると次の値をうる。

$$M_{1,0}' = -10.69 \text{ tm}$$

$$M_{1,2}' = -14.28 \text{ tm}$$

$$M_{2,1}' = -11.46 \text{ tm}$$

$$M_{2,3}' = M_{2,1}'$$

$$M_{3,2}' = -5.52 \text{ tm}$$

$$M_{3,4}' = M_{3,2}'$$

(b) モーメントの分配 図-11 のように、まず円の中の各支点上に \bar{M}_i の値を、またその左右に $\mu_{i,k}$ の値を入れる。また円の下には、それぞれ、左端に示す $\bar{M}_{i,k}$, $M_{i,k}'$, ($M_{i,k}' + M_{k,i}'$) の値を計算して記入し、その各欄を縦に加算したものが支点モーメントである。支点モーメントが出れば、その他の点のモーメントは簡単に算出される。

図-11 支点曲げモーメントの精算

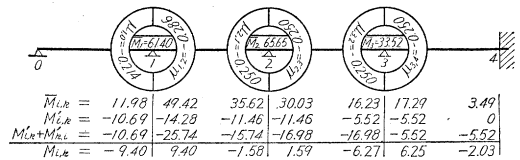
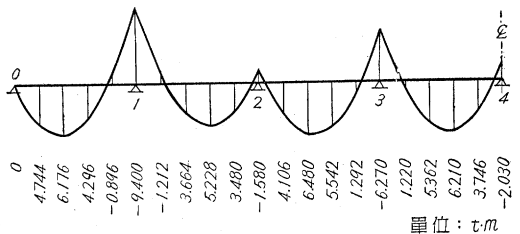


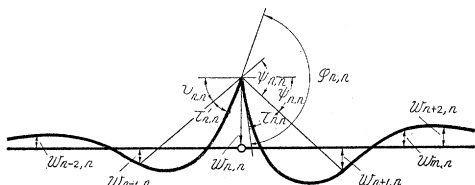
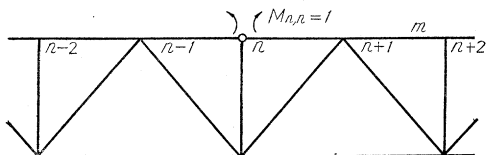
図-12 死荷重による上弦材の曲げモーメント



5. 上弦材格点の曲げモーメントの影響線

いま、影響線を求めようとする上弦材の格点 n に、図-13 のように、ヒンジを挿入し、そこに $M_{n,n} = 1$ なる単位曲げモーメントを加える。このときの n 点のタワミ角を $\varphi_{n,n}$ とし、上弦材上の任意点 m のタワミを $w_{m,n}$ とする。次に、 m 点に単位荷重 $P_m = 1$ を加えたときの n

図-13



点のタワミ角を $\varphi_{n,m}$ とし、 n 点に生ずる曲げモーメントを $M_{n,m}$ とすると、

$$M_{n,m} \varphi_{n,n} + \varphi_{n,m} = 0$$

従つて、 $M_{n,m} = -\frac{\varphi_{n,m}}{\varphi_{n,n}}$

また、Maxwell の法則から、 $\varphi_{n,m} = \varphi_{m,n} = w_{m,n}$ であるから

$$M_{n,m} = -\frac{w_{m,n}}{\varphi_{n,n}}$$

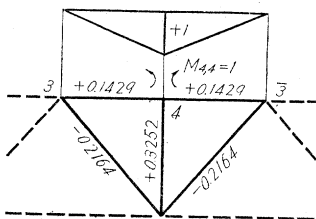
そこで、 $\varphi_{n,n}, w_{m,n}$ のおのおのを計算するならば、この式によつて、影響線値がえられる。

本橋では、 $M_{n,n}=1$ による静定基本トラスのタワミを、弾性荷重を用いて求め、次にこのタワミによつて生ずる上弦材各格点の支点曲げモーメントを固定モーメント法で算出する。この支点曲げモーメントによつて生ずるタワミを再び弾性荷重を用いて求め以上二つの和が $w_{m,n}$ である。また $\varphi_{n,n}$ は、上の計算中での、弾性荷重と支点曲げモーメントの値から求められる。

(1) $w_{m,n}$ の計算

a) $M_{n,n}=1$ を加えたときの各格点のタワミ ここで は格点 4 の影響線の計算過程を例にとつて $M_{4,4}=1$ による各格点のタワミを示すことにする。

図-14 U_4 に $M_{4,4}=1$ を加えたときの部材応力



弾性荷重は

$$EI_0 \bar{w}_i = \frac{I_0}{A_0} \left(\sum_i S_i^\lambda S_0 \frac{A_0}{A_V} \lambda + \sum_i S_i^\lambda S_0 \frac{A_0}{A_s} s \right)$$

となる。

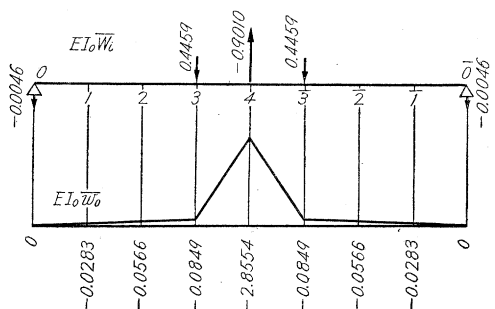
活荷重に対しては、上弦材は合成されているから、標準断面二次率として、 $I_0 = \bar{I}_V = 400\,410 \text{ cm}^4$ にとる。

$$\frac{I_0}{A_0} = \frac{400\,410}{100} = 4\,004.1 \text{ cm}^2 = 0.400\,41 \text{ m}^2$$

$$EI_0 \bar{w}_4 = 0.400\,41 \{ (0.2164)(-0.2164) \cdot 1.3528 \cdot 9.318 \cdot 2 + (-0.3252)(0.3252) \cdot 1.414 \cdot 7 + (-0.1429)(0.1429) \cdot 0.905 \cdot 12.3 \} = -0.9010$$

$EI_0 \bar{w}_3$: 以下計算式省略 = 0.4459

図-15



格点 3 と 5 を固定とすると、 $M_{4,4}=1$ によつて次の曲げモーメントが起る。

$$\bar{M}_{3,4,B} = 0.500 \text{ tm}$$

$$\bar{M}_{5,4,B} = -0.500 \text{ tm}$$

トラスのタワミ \bar{w}_0 により、各支点の固定モーメントは、

$$\bar{M}_{3,4,\bar{w}_0} = \frac{3}{\lambda^2 \frac{I_0}{\bar{I}_V}} EI_0 \Delta \bar{w}_0 = \frac{3}{6.15^2} \cdot 2.7705 = 0.2198 \text{ tm}$$

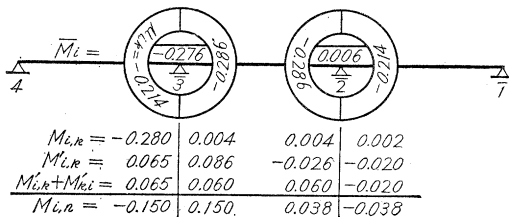
$$\bar{M}_{5,2,\bar{w}_0} = \frac{6}{\lambda^2 \frac{I_0}{\bar{I}_V}} EI_0 \Delta \bar{w}_0 = \frac{6}{6.15^2} \cdot 0.0283 = 0.0045 \text{ tm}$$

$$\bar{M}_{2,3,\bar{w}_0} = \bar{M}_{5,2,\bar{w}_0}$$

$$\bar{M}_{2,1,\bar{w}_0} = \frac{3}{\lambda^2 \frac{I_0}{\bar{I}_V}} EI_0 \Delta \bar{w}_0 = \frac{3}{6.15^2} \cdot 0.0283 = 0.0022 \text{ tm}$$

$$\Sigma \bar{M}_{3,4} = \bar{M}_{3,4,B} + \bar{M}_{3,4,\bar{w}_0} = -0.5000 + 0.2198 = -0.2802 \text{ tm}$$

図-16

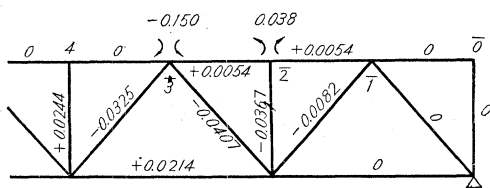


上で計算された支点曲げモーメントによつて生ずる部材応力を求める。

図-17 に示す部材応力から次のように、弾性荷重が計算される。

$$EI_0 \bar{w}_4 = 0.400\,41 \{ (-0.3252) \cdot 0.0244 \cdot 1.414 \cdot 7 + 0.2164 \cdot (-0.0325) \cdot 1.3528 \cdot 9.318 \cdot 2 \} = -0.1024$$

図-17



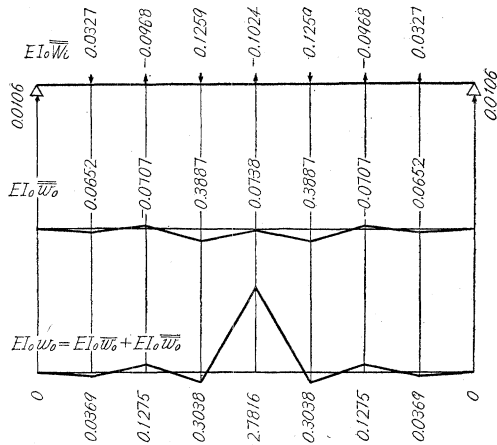
$EI_0 \bar{W}_3$: 以下計算式省略 = 0.1259

$EI_0 \bar{W}_2 = -0.0968$

$EI_0 \bar{W}_1 = 0.0327$

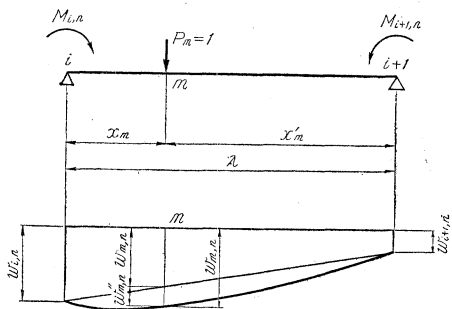
これによつて 図-18 に示すようなタワミが求まる。

図-18



b) $M_n=1$ を加えたときの各格間のタワミ 格点 i より x_m の距離にある m 点のタワミ $w_{m,n}$ の値は、図-19 のように、 $w_{m,n}'$ と $w_{m,n}''$ に分けられる。

図-19



$w_{m,n} = w_{m,n}' + w_{m,n}''$

$w_{m,n}' = w_{i,n} \cdot \frac{x_m'}{\lambda} + w_{i+1,n} \cdot \frac{x_m}{\lambda}$

$w_{m,n}'' = \frac{\lambda^2}{6EI_V} (M_{i,n} \cdot \omega_D' + M_{i+1,n} \cdot \omega_D)$

ただし

$$\left\{ \begin{aligned} \omega_D &= \frac{x_m}{\lambda} - \frac{x_m^3}{\lambda^3} \\ \omega_D' &= \frac{x_m'}{\lambda} - \frac{x_m'^3}{\lambda^3} \end{aligned} \right.$$

なお、この ω_D, ω_D' の値は、Hütte III の表に示されているのをを用いると便利である。

そこで

$$w_m = w_{i,n} \cdot \frac{x_m'}{\lambda} + w_{i+1,n} \cdot \frac{x_m}{\lambda} + \frac{\lambda^2}{6EI_V} (M_{i,n} \cdot \omega_D' + M_{i+1,n} \cdot \omega_D)$$

あるいはまた、

$$EI_0 w_{m,n} = EI_0 w_{i,n} \frac{x_m'}{\lambda} + EI_0 w_{i+1,n} \frac{x_m}{\lambda} + \frac{\lambda^2}{6} \cdot \frac{I_0}{I_V} (M_{i,n} \cdot \omega_D' + M_{i+1,n} \cdot \omega_D)$$

(2) $\varphi_{n,n}$ の計算

図-13 により、

$\varphi_{n,n} = \psi_{n,n}' + \tau_{n,n}$

$\psi_{n,n} = \psi_{n,n}' + \psi_{n,n}'' = \frac{w_{n-1,n} - 2w_{n,n} + w_{n+1,n}}{\lambda}$

$\tau_{n,n} = \tau_{n,n}' + \tau_{n,n}'' = \left(\frac{M_{n,n} \lambda}{3EI_V} + \frac{M_{n-1,n} \lambda}{6EI_V} \right) + \left(\frac{M_{n,n} \lambda}{3EI_V} + \frac{M_{n+1,n} \lambda}{6EI_V} \right)$

$\therefore \varphi_{n,n} = \frac{w_{n-1,n} - 2w_{n,n} + w_{n+1,n}}{\lambda} + \frac{2\lambda M_{n,n}}{3EI_V} + \frac{(M_{n-1,n} + M_{n+1,n}) \lambda}{6EI_V}$

$I_0 = I_V$ であるから

$EI_0 \varphi_{n,n} = -(EI_0 \bar{W}_n + EI_0 \bar{W}_{n+1}) + \frac{2}{3} M_{n,n} \lambda + \frac{M_{n-1,n} + M_{n+1,n}}{6} \lambda$

となる。格点 4 について計算すると、

$EI_0 \varphi_{4,4} = -(0.9010 - 0.1024) + \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 6.15 + \frac{2 \cdot (-0.15)}{6} \cdot 6.15 = 4.8175$

(3) 影響線値

格点 4 の影響線値は、以上の計算から、図-20 以下に示すように求まる。

その他の格点の曲げモーメントの影響線は、いま格点 4 について示したと同じようにして、求めることができる。また、格間の曲げモーメントの影響線も、これを用いてただちに計算できる (図-20~27 参照)。

6. その他

床版コンクリートの硬化収縮、温度変化、クリープ等による影響は、原理的には、死荷重による上材弦の曲げモーメントを求めたのと同様の手段でできるので、本文では省略することにする。

いままではすべて、上弦材の曲げモーメントについてのみ述べたが、その他の部材の応力は、やはり固定モーメント法による計算を行った結果、一般のトラスと同様に、計算してもさしつかえないことがわかつている。

図-20 U_4 の影響線

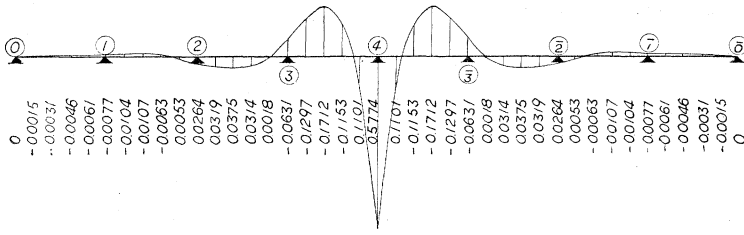


図-21 U_3 の影響線

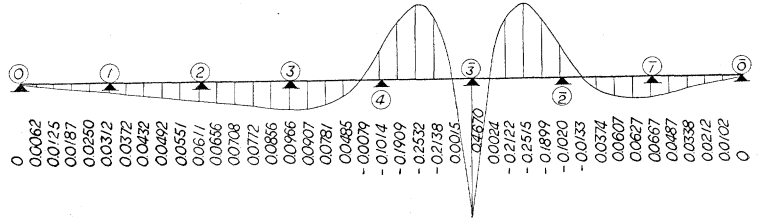


図-22 U_2 の影響線

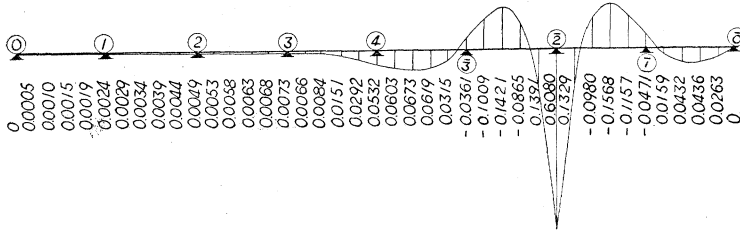


図-23 U_1 の影響線

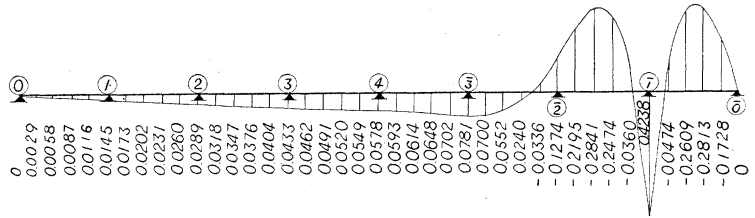


図-24 $U_4 \sim U_3$ の支間曲げモーメント影響線

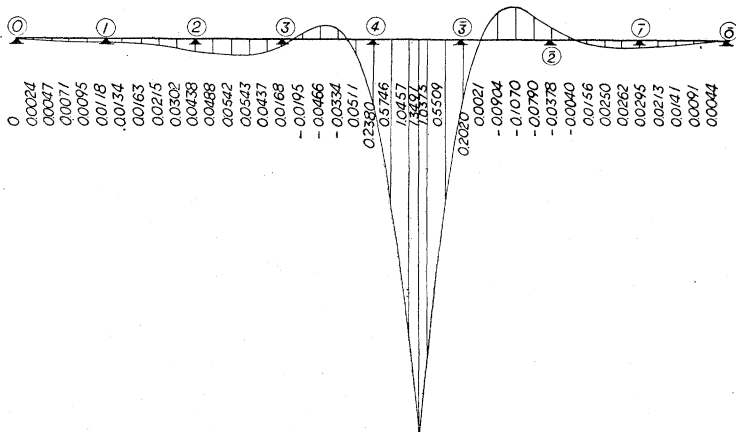


図-25 $U_3 \sim U_2$ の支間曲げモーメント影響線図

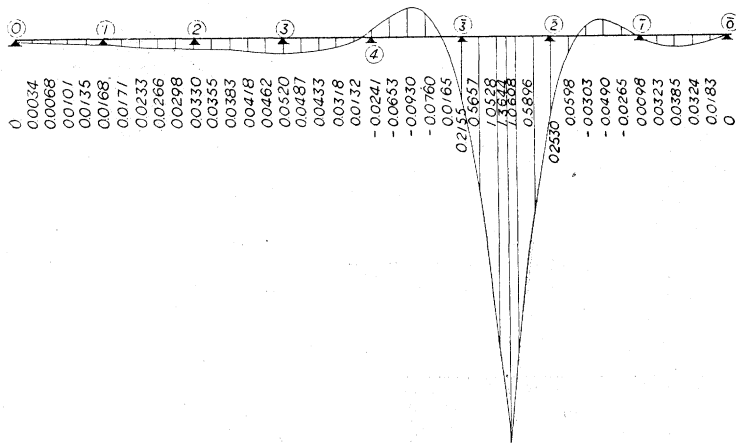


図-26 $U_2 \sim U_1$ の支間曲げモーメント影響線図

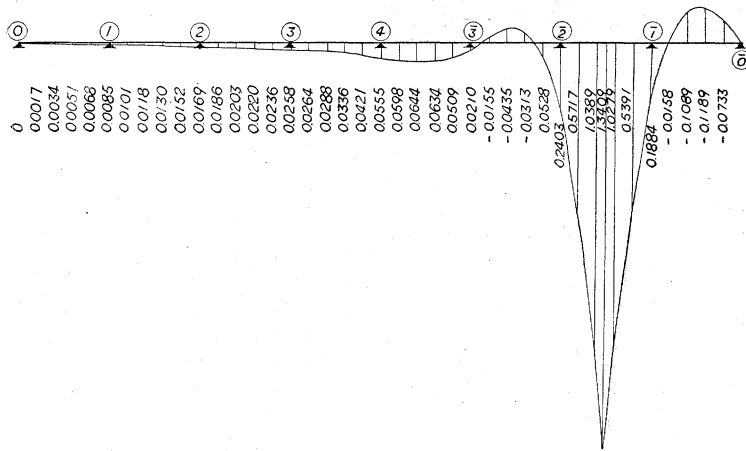
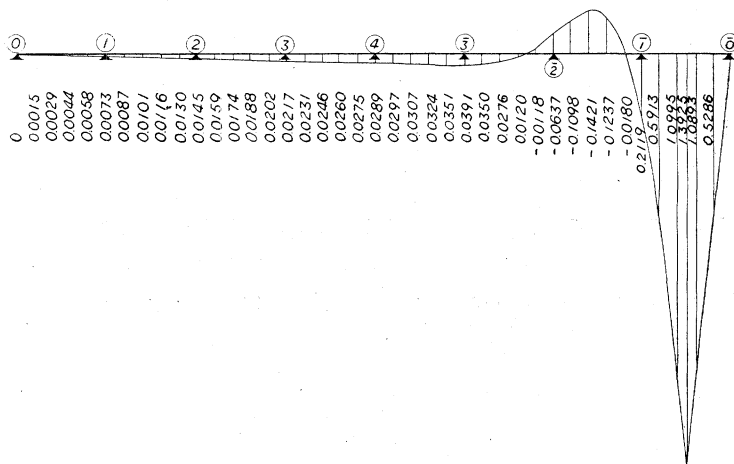


図-27 $U_1 \sim U_0$ の支間曲げモーメント影響線図



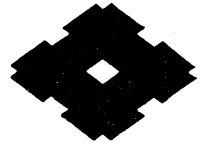
7. あとがき

すでに Digital Computer が橋梁の計算に用いられ始めている現状であるが、通常、本橋程度の不静定次数をもつ構造物の計算には、本方法によるものが割合簡便で実用的と思われる。従つて合成トラスに限らず、普通トラス、鉸桁などの床組、特に縦桁の計算に使つて便利である。

なお、本橋の設計にあつて建設省国道課 松崎課長補佐、沓掛橋梁係長の指導をうけた。ここに厚く謝意を表する。

参考文献

- 1) 福田武雄：合成トラス橋について、土木技術、昭 31-4
福田武雄・久保慶三郎：合成トラスの実測的研究、土木学会誌 第 42 卷 第 3 号、昭 32-3
- 2) G. Kani: Die Berechnung mehrstöckiger Rahmen, 1957
Sahmel: Beschleunigung der Konvergenz bei Berechnung von Rahmentragwerken nach Kani, Der Stahlbau 23 (1954), S. 262
Hanskarl Bandel: Einfache Berechnungsmethoden für Verbundkonstruktionen, 1957
なお影響線算出については、次の文献を参照した。
Camillo Popp: Zur genaueren Berechnung der Fahrbahn-Langsträger, stählerner Eisenbahnbrücken. 1954
Hütte, III, 28 Auflage.
コンクリートの収縮、クリープ等の計算は、本稿には省略したが、次の文献による方法が簡便であつた。
K. Sattler: Eine einfache Näherungsberechnung für statisch unbestimmte vollwandige Stahlträger-Verbundkonstruktionen. Bautechnik (1954) Heft 3
K. Sattler; Theorie der Verbundkonstruktionen. 1953

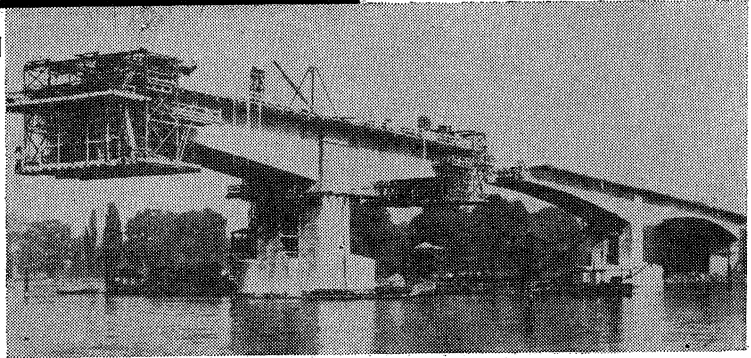


住友電工の

新しい建設材料

PC鋼棒

プレストレストコンクリート用
ピアノ線・鋼棒



弊社が西独ディッカーホーフ・ヴィドマン社と技術提携せる
ディヴィダーク式 P. S コンクリート工法による架橋状況

住友電気工業株式会社

本社 大阪市此花区恩貴島南之町六〇
東京支社 東京都港区芝琴平町一
名古屋支店・福岡営業所
製作所 大阪・伊丹・名古屋