

# 三辺固定，一辺自由な矩形板が等分布荷重および等変分布荷重 を受ける場合のタワミおよび曲げモーメントについて

成岡昌夫\* 船越三郎\*\* 山本知弘\*\*\*  
小林昭一\*\*\*\* 桜井春輔\*\*\*\*

## 1. はしがき

三辺固定，一辺自由の等方性矩形板の曲げの問題は，解析的には解けない問題とされていて，まず，坂教授は，普通の階差法 ( $\mu=0$  と仮定する) を用いて，タワミを求め，次いで曲げモーメントを計算した<sup>1)</sup>。次いで水野教授，吉村芳男氏は，まず，モーメント和を，次いでタワミを求めるという，二段の操作で，この問題を解いた<sup>2)</sup>。

この研究では，ポアソン比  $\mu=0$  とせず， $\mu=1/6$  として， $\mu$  の影響が相当あることを示している。しかし，普通精度の階差法によっているので，解の精度に問題があり， $\mu$  の影響は二次的なものである。かつ，等変分布荷重の場合しか取扱っていない。

一方，この問題は，等分布荷重満載の場合にかぎり，解析的に解けるが<sup>3)</sup>，膨大な手数を要し，任意の点のタワミ，曲げモーメントを求めるのは，むしろ，階差法による方がよい。

この問題は，ケーソンの側壁の設計計算に関連して，最近注目されているが，一般には，普通精度の階差法によっているようである。著者らは，Zurmühl の板に対する改良階差法を三辺固定・一辺自由の矩形板に適用して，若干の結果を得たので，以下これらについて述べたいと思う。

## 2. Zurmühl の板に対する改良階差法

Zurmühl の板に対する改良階差法について，以下簡単に式のみを紹介しよう。等方性薄板の中央面の釣合の方程式は，次のように表わされる。

$$\Delta \Delta u = p/N \quad (1)$$

ここに， $u$ ：板の中央面のタワミ， $p$ ：分布荷重の強度  
 $N$ ：板剛度，である。

断面力は，次のように表わされる。

曲げモーメント

$$m_x = -N(u_{xx} + \mu u_{yy}), \quad m_y = -N(u_{yy} + \mu u_{xx}) \quad (2)$$

ねじりモーメント

$$m_{xy} = -N(1-\mu)u_{xy} \quad (3)$$

\* 正員 工博 京都大学教授 工学部土木工学教室

\*\* 正員 播摩造船所鉄構設計課

\*\*\* 正員 京都大学助手，工学部土木工学教室

\*\*\*\* 正員 京都大学大学院工学研究科土木工学専攻 修士課程学生

せん断力

$$q_x = -N(u_{xxx} + u_{xyy}), \quad q_y = -N(u_{yyy} + \mu u_{xxy}) \quad (4)$$

$$\bar{q}_x = -N\{u_{xxx} + (2-\mu)u_{xyy}\} \quad (5)$$

$$\bar{q}_y = -N\{u_{yyy} + (2-\mu)u_{xxy}\}$$

境界条件は，辺  $x=\text{const.}$  で次のようになる。

固定辺： $u=0, u_x=0$  (6)

単純支持辺： $u=0, m_x=0$ ，すなわち， $u_{xx}=0$  (7)

自由辺： $m_x=0$ ，すなわち， $u_{xx} + \mu u_{yy}=0$

および  $\bar{q}_x=0$ ，すなわち， $u_{xxx} + (2-\mu)u_{xyy}=0$  (8)

自由隅：さらに  $m_{xy}=0$  すなわち  $u_{xy}=0$  (9)

板の支持状態を区別するために，次のように図示する。

二重実線——固定辺 ( $u=0, u_x=0$ )，一重実線——単純支持辺 ( $u=0, u_{xx}=0$ )，点線……自由辺 ( $m_x=0, \bar{q}_x=0$ )

### A) 一般内点に対する階差式

$$\text{A) } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -10 & -2 & 1 \\ 1 & -10 & 36 & -10 & 1 \\ 1 & -2 & -10 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} u = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Delta \Delta u h^4 + (h^2)$$

### B) 支持辺に隣接する内点および支持辺上の点に対する階差式

$$\text{R 1) } 60 u_{xx} h = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 2 \\ 16 & -80 & 16 \\ -149 & 336 & -144 & 32 & -3 \\ 16 & -80 & 16 \\ 2 & 8 & 2 \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 & 8 & 0 \\ 2 \end{bmatrix} \Delta \Delta u h^4 + (h^2),$$

$$\text{R 2) } -180 u_{xx} h^2 = \begin{bmatrix} 13 & 124 & -59 \\ 248 & -1240 & 824 & -144 \\ -969 & 5480 & -2772 & 816 & -87 \\ 248 & -1240 & 824 & -144 \\ 13 & 124 & -59 \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} 13 \\ 0 & 124 & -72 \\ 13 \end{bmatrix} \Delta \Delta u h^4 + (h^2),$$

$$\text{R 2a) } 180 u_{yy} h^2 = \begin{bmatrix} -17 & 4 & 4 \\ 248 & -4 & -40 & 12 \\ -456 & -24 & 108 & -48 & 6 \\ 248 & -4 & -40 & 12 \\ -17 & 4 & 4 \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} -1 \\ 1 & 0 & 7 \\ -1 \end{bmatrix} \Delta \Delta u h^4 + (h^2),$$

$$\text{R 3) } 24 \bar{q}_x h^3 = \begin{bmatrix} 15 & 16 & -13 \\ -64 & -136 & 160 & -32 \\ -56 & 384 & -474 & 160 & -18 \\ -64 & -136 & 160 & -32 \\ 15 & 16 & -13 \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} 3 \\ 6 & 24 & -18 \\ 3 \end{bmatrix} \Delta \Delta u h^4$$

$$- \mu \cdot \begin{bmatrix} 9 & -16 & 25 \\ -80 & 172 & -208 & 44 \\ -80 & 172 & -208 & 44 \\ 9 & -16 & 25 \end{bmatrix} u + \mu \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 3 & -12 & 21 \\ 3 \end{bmatrix} \Delta \Delta u h^4 + (h^2).$$

### C) B) にかかった4つの公式の適用に関する注意一覧表

境 界	境界条件	公 式	適 用
固 定 	$u_x = 0$	R 1	境界に隣接する点
単 純 支 持 	$u_{xx} = 0$	R 2	境界に隣接する点
自 由 	$u_{xx} + \mu u_{yy} = 0$ $u_{xxx} + (2-\mu)u_{xyy} = 0$	R 2, R 2a R 3	境界に隣接する点 境界上の点

D) 隅角部の内点および隅角边上の点に対する階差式

**ES 1**

-2	1	-2		
8	16	8		
10	-124	0	8	-2
-149	<b>448</b>	-124	16	1
20	-149	10	8	-2

 $u - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta \Delta u h^4 = 60(u_x^{(3)} + u_y^{(3)})h + (h^7),$ 
  

**ES 2**

11	-37	11		
-44	328	-44		
377	-1586	432	-44	11
-1041	<b>3296</b>	-1586	328	-37
322	-1041	377	-44	11

 $u - \begin{bmatrix} 12 \\ 12 \\ 102 \\ 12 \\ 12 \end{bmatrix} \Delta \Delta u h^4 = -180(u_{xx}^{(3)} + u_{yy}^{(3)})h^2 + (7^7),$ 
  

**ES 3**

55	-80	55		
-148	248	-148		
85	-388	360	-148	55
<b>156</b>	160	-388	248	-80
-190	<b>156</b>	85	-148	55

 $u - \begin{bmatrix} 44 \\ 32 \\ -14 \\ 44 \\ 32 \end{bmatrix} \Delta \Delta u h^4 + \mu \cdot \begin{bmatrix} 7 & -20 & 7 \\ -64 & 152 & -64 \\ 325 & -664 & 360 & -64 & 7 \\ -564 & 1120 & -664 & 152 & -20 \\ 290 & -564 & 325 & -64 & 7 \end{bmatrix} u$ 
  
 $+ \mu \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ -10 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} \Delta \Delta u h^4 = 72(\bar{q}_x^{(3)} + \bar{q}_y^{(3)})h^3 + (h^7),$ 

**EES 1**

-21	24	-18		
80	-48	48		
-138	0	-72	48	-18
168	96	0	-48	24
-214	<b>168</b>	-138	80	-21

 $u + \begin{bmatrix} 14 \\ 2 \\ -32 \\ 14 \\ 2 \end{bmatrix} \Delta \Delta u h^4 = 30(u_x^{(3)} + u_y^{(3)})h + (h^7),$ 
  

**EES 2**

-68	76	-63		
232	-104	152		
-311	-192	-156	152	-63
148	<b>592</b>	-192	-104	76
-176	148	-311	232	-68

 $u - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -163 \\ -13 \\ 352 \\ -163 \\ -13 \end{bmatrix} \Delta \Delta u h^4 = -60(u_{xx}^{(3)} + u_{yy}^{(3)})h^2 + (h^7),$ 
  

**EES 3**

159	-228	141		
-712	984	-600	40	
1653	-2544	1782	-600	141
-2412	3912	-2544	984	-228
<b>1384</b>	-2412	1653	-712	159


 $u - \begin{bmatrix} 84 \\ 12 \\ -120 \\ 84 \\ 12 \end{bmatrix} \Delta \Delta u h^4 = 360 u_{xy}^{(3)} h^2 + (h^7).$ 

**E 1**

-38	76	-38		
152	-304	152		
238	212	-72	-4	-14
-1375	<b>1264</b>	-880	288	-17
428	-168	118	-4	-14

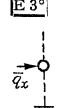
 $u - \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 68 \\ -35 \\ 1 \end{bmatrix} \Delta \Delta u h^4 = 300 u_x^{(3)} h + 360 u_{xy}^{(3)} h^2 + (h^7).$

**E 2**




$$\begin{bmatrix} -83 & 166 & -83 \\ 332 & -664 & 332 \\ 691 & 290 & 36 & -106 & -11 \\ -2496 & \boxed{2008} & -1996 & 752 & -68 \\ 1106 & -540 & 451 & -106 & -11 \end{bmatrix} u - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 5 \\ -1 & 292 & -151 \\ 5 \end{bmatrix} \Delta \Delta u h^4 = -180 u_{xx}^{(3)} + 900 u_{yy}^{(3)} h^2 + (h^7),$$

**E 3°**




$$\begin{bmatrix} -23 & 23 \\ 92 & -92 \\ -136 & 192 & -90 & 34 \\ \boxed{118} & -308 & 324 & -152 & 18 \\ -21 & 77 & -90 & 34 \end{bmatrix} u + \mu \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \\ -16 & 30 & -18 & 4 \\ 40 & -68 & 36 & -8 \\ -21 & 35 & -18 & 4 \end{bmatrix} u - 21 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta \Delta u h^4 = -12 \bar{q}_x^{(3)} h^3 + (h^6),$$

**F 3**




$$\begin{bmatrix} 55 & -110 & 55 \\ -220 & 440 & -220 \\ 320 & -836 & 750 & -320 & 86 \\ \boxed{-306} & 1238 & -1808 & 1268 & -438 & 46 \\ 45 & -286 & 475 & -320 & 66 \end{bmatrix} u + \mu \cdot \begin{bmatrix} -5 & 10 & -5 \\ 20 & -40 & 20 \\ 20 & -32 & 30 & -20 & 2 \\ -78 & 134 & -80 & 20 & 6 & -2 \\ 45 & -82 & 55 & -20 & 2 \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} 0 \\ 49 & -102 & 53 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta \Delta u h^4 - \mu \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -2 & 6 & -4 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta \Delta u h^4 = 24 \bar{q}_x h^3 + (h^7).$$

**RM 1**



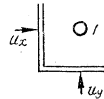
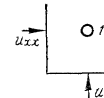
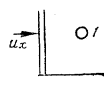
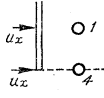
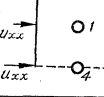
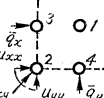
$$\begin{bmatrix} 25 & -48 & 36 & -16 & 3 \\ -50 & \boxed{96} & -72 & 32 & -6 \\ 25 & -48 & 36 & -16 & 3 \end{bmatrix} u - 12 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} u_{xx} h + (h^7),$$

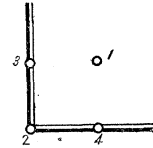
**RM 2**



$$\begin{bmatrix} 35 & -104 & 114 & -56 & 11 \\ -70 & \boxed{208} & -228 & 112 & -22 \\ 35 & -104 & 114 & -56 & 11 \end{bmatrix} u + 12 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} u_{xx} h^2 + (h^7).$$

E) D) にかかけた12の公式の適用に関する注意一覧表 (点の表わし方は次の図による)

隅角縁	境界条件	公式	適用
	$u_x=0$ in 3 $u_y=0$ in 4	ES 1	点 1
	$u_{xx}=0$ in 3 $u_{yy}=0$ in 4	ES 2	点 1
	$u_x=0$ in 3	E 1 または RM 1	点 1
	$u_x=0$ in 3 $u_x=0$ in 2	E 1 または RM 1 EES 1	点 1 点 4
	$u_{xx}=0$ in 3 $u_{xx}=0$ in 2	E 2 または RM 2 EES 2	点 1 点 4
	$u_{xx}=u_{yy}=0$ in 2 $u_{xy}=0$ in 2	EES 2 EES 3	点 1 点 2
	$\bar{q}_x=0$ in 3 $\bar{q}_y=0$ in 4 完全に対象の場合	E 3 または E 3° ES 3 ES 3	点 3 点 4 点 3=4



F) 二次微係数の階差式

(a) 一般公式

$$\boxed{B} -180 u_{xx} h^2 = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 4 & -24 & 40 & -24 & 4 \\ 7 & -196 & \boxed{378} & -196 & 7 \\ 4 & -24 & 40 & -24 & 4 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \Delta \Delta u h^4 + (h^6),$$

(b) 境界辺に隣接する内点に対する公式

$$\boxed{BR1} -180 u_{xx} h^2 = \begin{bmatrix} -2 & -11 & 1 \\ -22 & 110 & -46 & 6 \\ -129 & \boxed{150} & -72 & -24 & 3 \\ -22 & 110 & -46 & 6 \\ -2 & -11 & 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 & 11 & -3 \\ 2 \end{bmatrix} \Delta \Delta u h^4 + (h^7),$$

$$\boxed{BR2} -180 u_{yy} h^2 = \begin{bmatrix} 2 & 11 & -4 \\ -8 & -236 & 40 & -12 \\ 6 & \boxed{474} & -108 & 48 & -6 \\ -8 & -236 & 40 & -12 \\ 2 & 11 & -4 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 & 0 & 7 \\ -1 \end{bmatrix} \Delta \Delta u h^4 + (h^7).$$

(c) 境界辺上の点に対する公式 R2, R3 を用いる。

(d) 隅角部の内点および隅角辺上の点に対する公式

$$\boxed{BE1} \begin{array}{c} u_{xx} \\ \circ \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} -720 u_{xx} h^2 = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 8 & -16 & 8 \\ -16 & 40 & -36 & 16 & -4 \\ -1269 & \boxed{2352} & -1204 & 128 & -7 \\ -6 & 20 & -26 & 16 & -4 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 & -4 & 2 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta \Delta u h^4 - 330 u_x^{(3)} h + (h^7),$$

$$\boxed{BE2} \begin{array}{c} u_{yy} \\ \circ \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} -720 u_{yy} h^2 = \begin{bmatrix} 6 & -12 & 6 \\ -24 & 48 & -24 \\ -76 & -584 & -36 & -32 & 8 \\ 765 & \boxed{112} & 660 & -96 & -1 \\ -106 & -524 & -66 & -32 & 8 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 & 56 & 0 \\ 2 \end{bmatrix} \Delta \Delta u h^4 + 300 u_x^{(3)} h + (h^7),$$

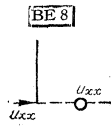
$$\boxed{BE3} \begin{array}{c} u_{xx} \\ \circ \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} -1800 u_{xx} h^2 = \begin{bmatrix} 7 & -14 & 7 \\ -28 & 56 & -28 \\ 56 & -140 & 126 & -56 & 14 \\ -2231 & \boxed{4728} & -2806 & 352 & -43 \\ 21 & -70 & 91 & -56 & 14 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 7 & 14 & -7 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta \Delta u h^4 + 180 u_x^{(3)} h^2 + (h^7),$$

$$\boxed{BE4} \begin{array}{c} u_{yy} \\ \circ \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} -1800 u_{yy} h^2 = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -12 & 24 & -12 \\ -286 & -1220 & -306 & 16 & -4 \\ 971 & \boxed{1432} & 1446 & -272 & 23 \\ -301 & -1190 & -321 & 16 & -4 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 5 \\ 12 & 116 & 12 \\ 5 \end{bmatrix} \Delta \Delta u h^4 - 180 u_x^{(3)} h^2 + (h^7),$$

$$\boxed{BE5} \begin{array}{c} u_{xx} \\ \circ \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} -360 u_{xx} h^2 = \begin{bmatrix} 24 & -48 & 24 \\ -96 & 192 & -96 \\ 192 & -480 & 432 & -192 & 48 \\ \boxed{1883} & -2304 & 408 & 64 & -51 \\ 72 & -240 & 312 & -192 & 48 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ -24 & 48 & -24 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta \Delta u h^4 + 1500 u_x^{(3)} h + (h^7),$$

$$\boxed{BE6} \begin{array}{c} u_{xx} \\ \circ \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} -360 u_{xx} h^2 = \begin{bmatrix} 24 & -48 & 24 \\ -96 & 192 & -96 \\ 192 & -480 & 432 & -192 & 48 \\ -192 & +576 & -672 & 384 & -96 \\ \boxed{2147} & -3120 & 1392 & -512 & 93 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ -24 & 48 & -24 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta \Delta u h^4 + 1500 u_x^{(3)} h + (h^7),$$

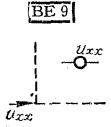
$$\boxed{BE7} \begin{array}{c} u_{xx} \\ \circ \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} -720 u_{xx} h^2 = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 8 & -16 & 8 \\ -16 & 40 & -36 & 16 & -4 \\ 16 & -48 & 56 & -32 & 8 \\ -1291 & \boxed{2420} & -1286 & 176 & -19 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 & -4 & 2 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta \Delta u h^4 - 300 u_x^{(3)} h + (h^7),$$



7	-14	7		
-28	56	-28		
56	-140	126	-56	14
-56	168	-196	112	-28
-2154	4490	-2519	184	-1

0		
-7	14	-7
0		

$$u + \Delta d u h^4 + 1800 u_{xx}^{(2)} h^2 + (h^7),$$



-23	-104	-23		
-208	1016	-208		
316	-1240	-414	584	-146
-3516	7048	-2056	-1168	292
-544	1440	-1709	824	-161

175		
-2	-46	-2
25		

$$u + \Delta d u h^4 + 180 u_{xx}^{(2)} h^2 + (h^7),$$

G) F, d) の9つの公式の適用に関する注意一覧表

隅角辺	点番号	適用公式	
		$u_{xx}$	$u_{yy}$
	1	BE 1	BE 1*
	2	0	0
	3	BE 5	0
	4	0	BE 5*
	1	BE 3	BE 3*
	2	0	0
	3	0	0
	4	0	0
	1	BE 9	BE 9*
	2	0	0
	3	$u_{xx} = -\mu u_{yy}$	BE 8*
	4	BE 8	$u_{yy} = -\mu u_{xx}$
	1	BE 1	BE 2
	2	BE 6	0
	3	BE 5	0
	4	0	0
	1	BE 1	BE 2
	2	BE 6	0
	3	BE 5	0
	4	BE 7	$u_{yy} = -\mu u_{xx}$
	1	BE 3	BE 4
	2	0	0
	3	0	0
	4	BE 8	$u_{yy} = -\mu u_{xx}$

備考: \* は x と y を交換して用いることを示す。

3. Zurmühlの板に対する改良階差法による三辺固定、一辺自由の矩形板の階差方程式とその解

解析の対称とした矩形板は 図-1 のように、三辺固定・一辺自由で、短辺が  $a$ 、長辺が  $b=a$ ,  $b=5a/4$ ,  $b=$

$6a/4$ ,  $b=7a/4$ ,  $b=8a/4$  の5種類とした。この矩形板を  $h=a/4$  の square network でおおう。図-2 は square network の格点番号を示す。図-2 の  $b/a=6/4$  の矩形板に対する階差方程式のみを表-1 に示す。右辺は  $qa^4/256 N$  を単位とつてある。

図-1 解析の対象とする矩形板

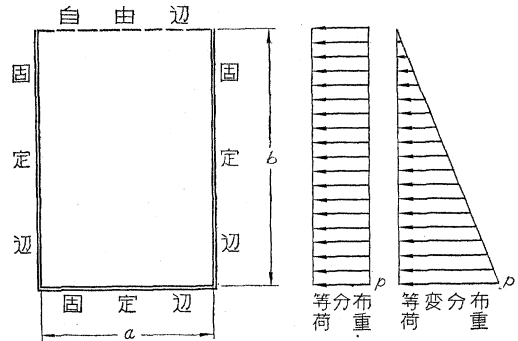


図-2 square network と格子点の符号

(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
$a/b=4/4$	$a/b=4/5$	$a/b=4/6$	$a/b=4/7$	$a/b=4/8$
a 1 2 1 a	a 1 2 1 a	a 1 2 1 a	a 1 2 1 a	a 1 2 1 a
b 3 4 3 b	b 3 4 3 b	b 3 4 3 b	b 3 4 3 b	b 3 4 3 b
c 5 6 5 c	c 5 6 5 c	c 5 6 5 c	c 5 6 5 c	c 5 6 5 c
d 7 8 7 d	d 7 8 7 d	d 7 8 7 d	d 7 8 7 d	d 7 8 7 d
e 9 10 9 e	e 9 10 9 e	e 9 10 9 e	e 9 10 9 e	e 9 10 9 e
f 11 12 11 f	f 11 12 11 f	f 11 12 11 f	f 11 12 11 f	f 11 12 11 f
g 13 14 13 g	g 13 14 13 g	g 13 14 13 g	g 13 14 13 g	g 13 14 13 g
h 15 16 15 h	h 15 16 15 h	h 15 16 15 h	h 15 16 15 h	h 15 16 15 h
i 17 18 17 i	i 17 18 17 i	i 17 18 17 i	i 17 18 17 i	i 17 18 17 i
j 19 20 19 j	j 19 20 19 j	j 19 20 19 j	j 19 20 19 j	j 19 20 19 j
k 21 22 21 k	k 21 22 21 k	k 21 22 21 k	k 21 22 21 k	k 21 22 21 k
l 23 24 23 l	l 23 24 23 l	l 23 24 23 l	l 23 24 23 l	l 23 24 23 l
m 25 26 25 m	m 25 26 25 m	m 25 26 25 m	m 25 26 25 m	m 25 26 25 m
n 27 28 27 n	n 27 28 27 n	n 27 28 27 n	n 27 28 27 n	n 27 28 27 n
o 29 30 29 o	o 29 30 29 o	o 29 30 29 o	o 29 30 29 o	o 29 30 29 o
p 31 32 31 p	p 31 32 31 p	p 31 32 31 p	p 31 32 31 p	p 31 32 31 p
q 33 34 33 q	q 33 34 33 q	q 33 34 33 q	q 33 34 33 q	q 33 34 33 q
r 35 36 35 r	r 35 36 35 r	r 35 36 35 r	r 35 36 35 r	r 35 36 35 r
s 37 38 37 s	s 37 38 37 s	s 37 38 37 s	s 37 38 37 s	s 37 38 37 s
t 39 40 39 t	t 39 40 39 t	t 39 40 39 t	t 39 40 39 t	t 39 40 39 t
u 41 42 41 u	u 41 42 41 u	u 41 42 41 u	u 41 42 41 u	u 41 42 41 u
v 43 44 43 v	v 43 44 43 v	v 43 44 43 v	v 43 44 43 v	v 43 44 43 v

4. 三辺固定・一辺自由の矩形板のタワミの値

図-2 の5種の矩形板に対する階差方程式を、Crout

表-1 図-2(c) ( $b/a=6/4$ ) の場合の階差方程式

格点	公式	$w_1$	$w_2$	$w_3$	$w_4$	$w_5$	$w_6$	$w_7$	$w_8$	$w_9$	$w_{10}$	$w_{11}$	$w_{12}$	等分布	等変分布
1	EES 1	24.8	-13.8	4.8	0	4.8	-7.2	-4.8	4.8	2.4	-1.8			0	-0.2
2	R 3	-12.8	5.6	-27.2	38.4	32.0	-47.4	-6.4	16.0	0	-1.8			1.8	-0.1
3	E 1	-1.72	1.18	15.52	-8.80	2.08	-0.72	-3.04	1.52	0.76	-0.38			0.3	0.05
4	R 2	4.96	-9.69	-24.80	34.80	16.48	-27.72	-2.88	8.16	0	-0.87			0.78	0.010
5	R 1	0.8	0.2	-8.0	1.6	36.8	-14.4	-8.0	1.6	0.8	0.2			1.2	0.4
6	A	2.0	1.0	-4.0	-10.0	-20.0	36.0	-4.0	-10.0	2.0	1.0			3.0	1.0
7	R 1			0.8	0.2	-8.0	1.6	36.8	-14.4	-8.0	1.6	0.8	0.2	1.2	0.6
8	A			2.0	1.0	-4.0	-10.0	-20.0	36.0	-4.0	-10.0	2.0	1.0	3.0	1.5
9	R 1					0.8	0.2	-8.0	1.6	36.8	-14.4	-8.0	1.6	1.2	0.8
10	A					2.0	1.0	-4.0	-10.0	-20.0	36.0	-4.0	-10.0	3.0	2.0
11	ES 1					0.1	-0.2	1.6	0.8	-11.6	0	46.4	-12.4	1.2	1.0
12	R 1						-0.3	0	3.2	3.2	-14.4	-16.0	33.6	1.2	1.0

表-2 1000・ $\bar{u}$  の値

荷重	矩形板の種類	$\bar{u}_1$	$\bar{u}_2$	$\bar{u}_3$	$\bar{u}_4$	$\bar{u}_5$	$\bar{u}_6$	$\bar{u}_7$	$\bar{u}_8$	$\bar{u}_9$	$\bar{u}_{10}$	$\bar{u}_{11}$	$\bar{u}_{12}$	$\bar{u}_{13}$	$\bar{u}_{14}$	$\bar{u}_{15}$	$\bar{u}_{16}$	
等分布荷重	4:4 (図-2,a)	1.4662	2.6214	1.3737	2.4288	1.1049	1.9244	0.5387	0.9076									
	4:5 (図-2,b)	1.4734	2.6317	1.4569	2.5852	1.3687	1.1029	2.4115	1.9191	0.5383	0.9067							
	4:6 (図-2,c)	1.4694	2.6183	1.4717	2.6150	1.4526	2.5739	1.3664	2.4066	1.1021	1.9175	0.5381	0.9064					
	4:7 (図-2,d)	1.4660	2.6085	1.4695	2.6124	1.4693	2.6097	1.4513	2.5713	1.3659	2.4057	1.1020	1.9172	0.5381	0.9063			
	4:8 (図-2,e)	1.4649	2.6048	1.4667	2.6076	1.4689	2.6110	1.4689	2.6089	1.4511	2.5710	1.3658	2.4056	1.1020	1.9172	0.5381	0.9063	
等変分布荷重	4:4 (図-2,a)	0.3194	0.6103	0.4336	0.7775	0.4825	0.8294	0.3006	0.4887									
	4:5 (図-2,b)	0.2583	0.4925	0.3954	0.7134	0.5421	0.9513	0.5796	0.9941	0.3429	0.5615							
	4:6 (図-2,c)	0.2120	0.4007	0.3385	0.6130	0.5063	0.8984	0.6561	1.1483	0.6609	1.1361	0.3748	0.6173					
	4:7 (図-2,d)	0.1792	0.3364	0.2885	0.5234	0.4455	0.7948	0.6220	1.1000	0.7529	1.3812	0.7235	1.2464	0.3982	0.6588			
	4:8 (図-2,e)	0.1560	0.2916	0.2503	0.4543	0.3894	0.6963	0.5571	0.9898	0.7217	1.2756	0.8292	1.4532	0.7711	1.3306	0.4158	0.6899	

法によつて解いた結果を、 $u_i = \bar{u}_i (pa^4/N)$  の形で表わし  $1000 \cdot \bar{u}_i$  の値を表-2 および、図-3~7 の格子点の上側に示す。図-3, 5 で格子点の下に記入したのは坂教授の求めた値である。

連立方程式は、それぞれ、8元、10元、12元、14元、16元となるが、8~12元の場合はモンローの電動計算機により、14元、16元の場合は、Facom-128 B によつて解いた。Zurmühl の方法によれば、タワミの値が相当小さくなり、比較的粗な network でも、よい値が得られている。

### 5. 三辺固定・一辺自由の矩形板の曲げモーメントの値

以上で求められたタワミの値をもとにして、Zurmühl の二次微係数の公式によつて  $M_x, M_y$  ( $x$  は短辺方向、 $y$  は長辺方向を示す) を求めた結果を図-3~7 の  $M_x, M_y$  欄の格子点の上側に示す。ただし、この図では、

$$M_x = \bar{m}_x pa^2, M_y = \bar{m}_y pa^2$$

図-3  $b/a=4/4$  の場合の  $1000 \bar{u}, 1000 \bar{m}_x, 1000 \bar{m}_y$  の値

	$u$	$M_x$	$M_y$
等	0 1.4662 2.6214 2.401 3.191	-83.4761 10.3835 41.7801 -76.83 16.08 44.67	0 0 0
介	0 1.3737 2.4288 2.192 3.456	-87.6590 10.1843 38.2032 -70.74 14.85 40.45	0 2.7837 4.9063 3.44 5.14
布	0 1.1049 1.9244 1.768 2.756	-67.1848 9.1019 29.4506 -56.58 12.48 31.62	0 5.0859 8.9027 6.18 9.44
荷	0 0.5387 0.9076 0.958 1.463	-32.1991 3.7639 16.5572 -30.66 7.25 16.16	0 2.2949 3.5069 2.31 2.72
重	0 0 0	0 0 0	0 -32.0832 -56.6528 -30.66 -46.82
等	0 0.3194 0.6103 0.452 0.750	-16.5500 1.1054 10.5762 -14.46 2.46 9.54	0 0 0
変	0 0.4336 0.7775 0.642 1.071	-27.2091 2.9112 12.3948 -20.54 4.27 12.00	0 0.8095 1.4038 1.34 2.21
介	0 0.4875 0.8294 0.748 1.146	-30.9047 4.3166 12.3206 -23.84 5.60 12.74	0 3.8761 6.7135 5.72 7.74
布	0 0.3006 0.4887 0.534 0.791	-17.8353 3.3338 8.8999 -17.04 4.43 8.22	0 4.0223 3.1475 5.12 6.98
荷	0 0 0	0 0 0	0 -20.7692 -25.3292 -17.04 -25.31

図-4  $b/a=5/4$  の場合の  $1000 \bar{u}, 1000 \bar{m}_x, 1000 \bar{m}_y$  の値

	$u$	$M_x$	$M_y$
等	0 1.4734 2.6317 0 1.4569 2.5852	-83.5733 10.1869 42.4771 -84.4636 10.5120 41.7239	0 0 0 0 1.0441 1.8056
介	0 1.3687 2.4115 0 1.1029 1.9191	-80.0003 10.3868 37.8856 -67.8497 9.1375 29.3120	0 2.7348 4.9943 0 5.0996 9.0224
布	0 0.5383 0.9067 0 0 0	-32.2008 5.2003 13.1109 0 0 0	0 2.1950 2.4855 0 -32.2009 -56.6771

	$u$	$M_x$	$M_y$
等	0 0.2583 0.4925 0 0.3954 0.7134	-13.0277 0.9029 5.7098 -21.9118 2.5149 11.9249	0 0 0 0 -0.3795 -0.6630
変	0 0.3421 0.5615 0 0.5796 0.9941	-32.0020 4.2269 14.8251 -37.9284 5.2455 14.6962	0 1.6464 2.9955 0 4.6007 8.1143
介	0 0.3429 0.5615 0 0 0	-21.6934 3.7798 7.6215 0 0 0	0 3.8556 5.3710 0 -22.9471 -38.4942

図-7 (b)  $b/a=8/4$  の場合の  $1000 \bar{u}, 1000 \bar{m}_x, 1000 \bar{m}_y$  の値 (等変分布荷重の場合)

	$u$	$M_x$	$M_y$
等	0 0.1560 0.2916 0 0.2503 0.4543	-79.325 0.6963 5.0520 -13.5455 1.5097 7.5395	0 0 0 0 -0.7953 -1.4285
変	0 0.3894 0.6463 0 0.5571 0.9899	-21.7226 2.6486 11.2705 -31.6917 3.9796 15.8225	0 -0.4565 -0.8404 0 0.0204 0.0716
布	0 0.7217 1.2756 0 0.8792 1.4532	-41.6844 5.3531 20.1753 -49.2024 6.5244 22.5816	0 0.8253 1.6010 0 2.5383 4.6862
荷	0 0.7711 1.3306 0 0.4158 0.6899	-48.6621 6.7272 19.2528 -25.6727 4.3240 9.6445	0 4.9924 8.8492 0 3.2912 4.4093
重	0 0 0	0 0 0	0 -20.0083 -58.5962

図-6(a)  $b/a=7/4$  の場合の  $1000 \bar{u}$ ,  $1000 \bar{m}_x$ ,  $1000 \bar{m}_y$  の値 (等分布荷重の場合)

	$u$	$M_x$	$M_y$
	0 1.4660 2.6085	-83.2296 10.3608 41.7957	0 0 0
等	0 1.4695 2.6124	-83.6168 10.4527 41.7922	0 0.0400 0.0793
分	0 1.4693 2.6097	-83.7515 10.5195 41.6799	0 0.2360 0.4929
布	0 1.4513 2.5713	-83.3039 10.5804 40.8645	0 0.9750 1.8896
荷	0 1.3659 2.4057	-79.9182 10.3923 37.6356	0 2.7521 5.0646
重	0 1.1020 1.9172	-67.8150 9.1381 29.2750	0 5.1184 9.0615
	0 0.5381 0.9063	-32.2005 5.2008 13.1028	0 2.2033 2.5022
	0 0 0	0 0 0	0 -32.2004 -56.0844

図-6(b)  $b/a=7/4$  の場合の  $1000 \bar{u}$ ,  $1000 \bar{m}_x$ ,  $1000 \bar{m}_y$  の値 (等分布荷重の場合)

	$u$	$M_x$	$M_y$
	0 0.1792 0.3364	-90.674 0.7644 5.8509	0 0 0
等	0 0.2885 0.5234	-15.6404 1.7479 8.6666	0 -0.8670 -1.5520
変	0 0.4455 0.7949	-24.9805 3.0804 12.8115	0 -0.3400 -1.0161
分	0 0.6220 1.1000	-35.9684 4.5975 17.4107	0 0.6499 1.2689
布	0 0.7529 1.3812	-44.7957 5.9603 20.4440	0 2.4584 4.5342
荷	0 0.7235 1.2464	-45.9013 6.3771 18.6178	0 4.9640 8.7061
重	0 0.3982 0.6588	-24.7308 4.1974 9.1524	0 3.4475 5.1261
	0 0 0	0 0 0	0 -25.6408 -44.0915

表-3(a)  $b/a=6/4$  の場合の  $u_{xx}$  を求めるための計算表

格点	適用公式	$u_{xx}h^2$ の係数	$u_{xx}$ を求めるために $u_i$ に乗すべき係数の値											$\Delta \Delta u h^4$ の係数				
			$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_4$	$u_5$	$u_6$	$u_7$	$u_8$	$u_9$	$u_{10}$	$u_{11}$	$u_{12}$				
1	BE 7	-720	2 596	-1 286	-80	56	-36	-16	8	4	-2					0	0	
2	R 2a	180	496	-456	-8	-24	-80	108	24	-48	0	6				-6	-2	
3	BE 1	-720	36	-26	2 480	-1 204	56	-36	-16	8	4	2				0	0	
4	BR 2	-180	-16	6	-472	474	80	-108	-24	48	0	-6				6	2	
5	BR 1	-180	-11	1	116	-46	126	-72	116	-46	-11	1				12	4	
6	B	-180	4	-4	-48	40	-392	378	-48	40	4	-4				0	0	
7	BR 1	-180			-11	1	116	-46	126	-72	116	-46	-11	1		12	4	
8	B	-180			4	-4	-48	40	-392	378	-48	40	4	-4		0	0	
9	BR 1	-180					-11	1	116	-46	126	-72	116	-46	-11	-46	12	8
10	B	-180					4	-4	-48	40	-392	738	-48	40	40	0	0	
11	BE 1	-720					4	-2	-16	8	56	-36	2 480	-1 204		0	0	
12	BR 2	-180							-6	-24	48	80	-108	-472	474	6	4	
a	BE 6	-360	-3 632	1 392	960	-672	-72	432	192	-96	-48	24				0	0	
b	BE 5	-360	-432	-312	-2 240	408	-672	432	192	-96	-48	24				0	0	
c	R 2	-180	124	-59	-1 384	824	4 296	-2 772	-1 384	824	124	-59				-78	-26	
d	R 2	-180			124	-59	-1 384	824	4 296	-2 772	-1 384	824	-59			-78	-39	
e	R 2	-180				124	-59	-1 384	824	4 296	-2 772	-1 384	824	-1 384	824	-78	-52	
f	BE 5	-360					-48	24	192	-96	-672	432	-2 240	408		0	0	

表-3(b)  $b/a=6/4$  の場合の  $u_{yy}$  を求めるための計算表

格点	適用公式	$u_{yy}h^2$ の係数	$u_{yy}$ を求めるために $u_i$ に乗すべき係数の値											$\Delta \Delta u h^4$ の係数			
			$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_4$	$u_5$	$u_6$	$u_7$	$u_8$	$u_9$	$u_{10}$	$u_{11}$	$u_{12}$			
3	BE 2	-720	-556	-66	16	660	-616	-36	48	-24	-12	6				60	10
4	BR 1	-180	-44	-129	220	150	-92	-72	12	-24	0	3				12	1.5
5	BR 2	-180	11	-4	-248	40	522	-108	-248	40	11	-4				6	2
6	B	-180	8	7	-48	-196	80	378	-48	-196	8	7				0	0
7	BR 2	-180			11	-4	-248	40	522	-108	-248	40	11	-4		6	3
8	B	-180			8	7	-48	-196	80	378	-48	-196	8	7		0	0
9	BR 2	-180					11	-4	-248	40	522	-108	-248	40	6	6	4
10	B	-180					8	7	-48	-196	80	378	-48	-196	0	0	0
11	BE 2	-720					-12	6	48	-24	-616	-36	16	660	60	50	
12	BR 1	-180					0	3	12	-24	-92	-72	220	150	12	10.5	
i	BE 5	-360					-51	48	64	-192	312	432	-2 112	-480	0	0	
j	R 2	-180					0	-87	-288	816	1 648	-2 772	-2 480	3 480	-78		

として、 $10^3 \bar{m}_x$ ,  $10^3 \bar{m}_y$  の値を示してある。図-3.5で格子点の下に記入してあるのは坂教授の求めた値である。なお、参考までに、 $b/a=6/4$  の矩形板(図-2(c))に

おいて、各格子点の  $u_{xx}$ ,  $u_{yy}$  をいかにして計算するかを、表-3(a),(b)に示す。

