

交通流の単一な流れについて

毛 利 正 光*

道路上を車の通過する事象を一つの独立現象と考えると、これに確率論を適用することは W. F. Adams¹⁾ によつて始められたが、これは主として交通物の通過する時間間隔に対して確率論的考察を加えたもので、Adams は最も簡単な場合についてのみ処理した。B. D. Greenshields²⁾ は交差点における 2 つの交通流の相互作用について注目し、交通流の交差現象に対して興味ある解法を示し、交差点における車の遅れ、実用的な信号周期との関係について論じ、明解な数学的方法を与えているが、信号のない交差点における問題は非常に複雑になつて、確率論的処理がきわめて困難である。これらは、いずれも交通流中の間隔の分布に確率論の法則を適用したもので、ついで M. S. Raff³⁾ は最も自然な交通の流れについて数学的処理方法に成功している。以下主としてこの考え方に従つて、交通流に対する基礎的な理論を進めてゆくこととした。

1. 交通流の分布

交通流を random event の連続であると考え、ポアソン分布によく適合することは、すでに述べられているとおりで¹⁾²⁾、その数学的論拠についても、すでに述べているとおりで⁴⁾。すなわち、いま平均 N 台の割合で事象が起つているとき、 t 時間の間にこれらの事象の k コが起る確率は次式で与えられる。

$$e^{-Nt} \frac{(Nt)^k}{k!} \dots\dots\dots (1)$$

- ここに e : 自然対数の底 (=2.718.28.....)
- N : 事象の起る平均の割合 (単位時間当りの交通量)
- t : 時間間隔の長さ
- k : 正の整数 (0, 1, 2, 3.....)

いま (1) 式で与えられる法則を交通流中の車両間隔の分布に適用する。まず道路上のある特定点を通過する車の流れを考えて、この点を通過したときの車の時間は横軸に時間をとつた一連の点としてプロットされる (図-1 参照)。従つて、この車両の間隔に注目すると交通流

図-1 交通流中の車両間隔の分布
車両通過の時間



は車両間隔の連続であると考えられることができる。これらの間隔は飽和交通量以下の混雑を起していない程度の交通流では種々の違つた大きさであるが、平均の間隔の大きさは常に交通量の逆数で与えられる。例えば交通量が 600 台/h では平均間隔は 1/600 時間あるいは 6 秒である。これらの間隔を時間順でなく、大きさの順に並べると、その生起の確率がポアソンの法則に一致することになる⁴⁾。

従つて一連の間隔中から任意の一つの間隔を選び出して、それが t より大なる確率は⁴⁾

$$e^{-Nt} \dots\dots\dots (2)$$

実際問題として平均 N 台の割合で交通量があるとき、 A 台の車をふくむ一つの時間周期を選ぶと、 t より大きい間隔の数は次式で与えられる。

$$Ae^{-Nt} \dots\dots\dots (2')$$

長さが t と $t+dt$ の間にある間隔の数は式 (2') の負の微分で与えられるから

$$ANe^{-Nt} dt \dots\dots\dots (3)$$

この間隔にふくまれる時間は t 倍であるから

$$ANte^{-Nt} dt \dots\dots\dots (4)$$

ゆえに間隔にふくまれる全時間は、間隔の全範囲について積分したものとなるから

$$AN \int_0^{\infty} te^{-Nt} dt = \frac{A}{N} \dots\dots\dots (5)$$

いまこのことを算術的に考えてみると、平均の時間間隔の大きさは $1/N$ で、間隔の全数 A のものを考えているから、これらの間隔にふくまれる全時間は $A \times 1/N$ となるのがわかる。

2. 車両間隔の種類

つぎに主道路 A を横断したい側道路 B 上の人から見れば、A 上の流れは横断可能の区間と横断不可能の区間の交互のくり返しに分けられる。前者を交通流 A 中の開区間、後者を閉区間と呼ぶことにする。いま一つ別の方面からの定義をすると、閉区間とは任意の車の通過に先立つことが、ある限界時間 L に等しいか、それ以下の時間であるときで、一方次の車の通過前の時間が L 以上であるときは開区間である。すなわち次の車の通過までに L 以上の時間間隔があれば横断可能で、それ以下であれば不可能となる。

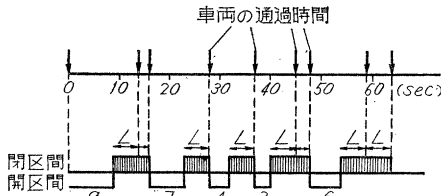
ここに定義する限界時間 L は、道路の幅員、形状な

* 正員 大阪市立大学講師, 理工学部土木教室

どの物理的構造により、それぞれ特有の値を有するものと考えられ、B点で前方の交通流を横切ろうとするとき、つぎの車の通過までに L 以上の時間があれば即座に横断可能で、 L 以下の場合は前方の車の通過を待つて、始めて横断可能となることになる。

従つてすべての開区間は L より大なる間隔の一部となり、 L より大なる間隔は2つの部分に分けられ、そのあとの部分が L で最初の部分が開区間となる。 L 以下の間隔で車が連続して通過するときは、一連の開区間を形成することになる。このことを図に示すと図-2のようになる。図-2は限界時間 $L=5$ 秒とした場合を示したものであり、交通流は開区間と閉区間の交互のくり返しであることになる。

図-2 交通流中の間隔：閉区間と開区間



(1) 開区間の分布

まず第一に交通流中の開区間の分布について考えると式(2')で与えられる公式が適用される。しかしすべての開区間は L より大なる間隔の一部であつて、長さ t なる開区間は $(L+t)$ なる間隔に相当する。ゆえに t より大なる開区間の数は $(L+t)$ より大なる間隔の数に等しい。すなわち

$$Ae^{-N(L+t)} \dots \dots \dots (6)$$

開区間の総数はもちろん $t=0$ より大なる区間の総数であつて、(6)式から $t=0$ とおくことによつて得られる。ゆえに開区間の総数は

$$Ae^{-NL} \dots \dots \dots (7)$$

開区間中にくまれる全時間は式(3)~(5)で述べたと同様にして求められる。 t と $t+dt$ の間の長さの開区間の数は式(6)から

$$ANe^{-N(L+t)}dt \dots \dots \dots (8)$$

これらの開区間中にくまれる時間は

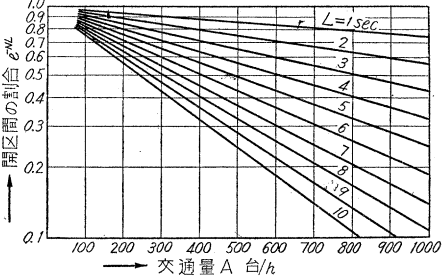
$$ANte^{-N(L+t)}dt \dots \dots \dots (9)$$

全開区間中にくまれる全時間は、開区間の大きさの全範囲について積分すればよいから

$$ANe^{-NL} \int_0^{\infty} t \cdot e^{-Nt} dt = \frac{A}{N} e^{-NL} \dots \dots \dots (10)$$

開区間の平均時間は全時間÷全数=式(10)÷式(7)で与えられる。すなわち $1/N$ となり、これは平均の間隔の長さと同じ。このことは各開区間は開区間より長いいくつかの間隔の一部にすぎないことから、開区間の平均の長さは平均間隔の長さより小であらうと考えられる

図-3 種々の限界時間の場合における交通量の変化に対する開区間の割合



一般の予想に反する、注目すべき事実を与えてくれるものである。

いま交通量 A を慣用的に 台/h の単位で表示すると $N=A/3600$ 台/sec, ゆえに式(10)から全開区間中の時間は $3600 \times e^{-NL}$ 秒となるから1時間なる時間の長さに対する開区間の割合は $3600 \times e^{-NL} \div 3600 = e^{-NL}$ として表わせることになる。従つて、この値を交通量 A および種々なる L の値に対して計算すると図-3のような割合となる。

【例】主道路の交通量 360 台/h, $L=5$ 秒, 1時間について考えると $A=360$ 台/h, $N=0.1$ 台/sec, $L=5$

- ∴ 全間隔数=360, 間隔中の全時間=1時間
- ∴ 平均間隔の長さ=10秒

$$\text{開区間の全数} = 5 \text{秒より大なる間隔の数} = 360 \times e^{-0.5} = 360 \times 0.607 = 218$$

これらの開区間中の全時間=36分24秒

- ∴ 開区間の平均長はまた10秒となる。

(2) 閉区間の分布

これは開区間の場合にくらべて問題がむつかしく、数学的に厳密に解くことは困難であるが、次の事項が成立することから解くことができる。すなわち

- a) 閉区間の全数は式(7)で表わされる開区間の全数に等しくしなければならない。
- b) 閉区間の全時間=全時間-開区間の時間
=式(5)-式(10)
- c) L より短い閉区間はない。
- d) ちょうど L に等しいある閉区間の数があり、この数は L より大きい連続した間隔の対の数と同数である。
- e) 公式は L より大なるどのような長さの開区間の存在をも許すものでなくてはならない。

d) の条件から L より大きい連続した間隔が幾対あるか考えてみると、式(2)を参照して任意の一つの間隔を選出した場合、それが L より大なる確率は e^{-NL} , しかしてそのような間隔の全数は Ae^{-NL} であつて、これらの間隔に連続して組をつくる間隔を考えると、それらの一つが L より大なる確率は、もとの組と同様 at random

であるから e^{-NL} 、したがって L より大なる連続間隔の対の数は

$$Ae^{-NL} \times e^{-NL} = Ae^{-2NL} \dots\dots\dots (11)$$

これは L に等しい閉区間の数に対する期待値である*。

さて

(1) L 以下の閉区間の数は 0

(2) L に等しい閉区間の数は Ae^{-2NL}

(3) t を L に等しいか大として、 t より大なる閉区間の数を $H(t)$ として $H(t)$ なる関数をきめる。

先に述べたように t と $t+dt$ の間にある閉区間の数は $-H'(t)dt$ で、いま $G(t) \equiv -H'(t)dt$ とおくと a) に述べたごとく閉区間の全数は Ae^{-NL} 、ゆえに次の等式が成立する。

$$L \text{ より小なる閉区間の数} \quad L \text{ に等しい閉区間の数}$$

$$\begin{matrix} 0 \\ \parallel \\ Ae^{-2NL} \end{matrix} +$$

L より大なる閉区間の数

$$+ \int_L^\infty G(t) dt = Ae^{-NL}$$

$$\therefore \int_L^\infty G(t) dt = Ae^{-NL}(1 - e^{-NL}) \dots\dots\dots (12)$$

$y = t - L$ とおくと

$$\int_0^\infty G(y) dy = Ae^{-NL}(1 - e^{-NL}) \dots\dots\dots (12')$$

b) の条件から閉区間の全時間は $A/N \times (1 - e^{-NL})$ ゆえに L より小なる閉区間の時間 L に等しい閉区間の時間

$$\begin{matrix} 0 \\ \parallel \\ AL e^{-2NL} \end{matrix} +$$

$$L \text{ より大なる閉区間の時間} + \int_L^\infty t \cdot G(t) dt = \frac{A}{N}(1 - e^{-NL}) \dots\dots\dots (13)$$

$$\therefore \int_0^\infty y \cdot G(y) dy = \frac{A}{F} e^{-NL}(1 - e^{-NL}) \dots\dots\dots (13')$$

ここに

$$F = \frac{Ne^{-NL}(1 - e^{-NL})}{1 - e^{-NL} - NL e^{-NL}} \dots\dots\dots (14)$$

c), d) の条件はすでに取り入れた, e) の条件により $G(y)$ は y のすべての正の値に対して正でなければならない。しかも式 (12'), (13') の積分を満足しなければならない。

しかして次式で与えられる級数は、すべての条件を満足することが容易に理解される。

$$G_n(y) = \frac{n^n}{(n-1)!} AF^n e^{-NL}(1 - e^{-NL}) y^{n-1} e^{-nFy} \quad (15)$$

ここに n : 正の整数

これに相当する H - 関数は

$$H_n(y) = Ae^{-NL}(1 - e^{-NL}) e^{-nFy} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(nFy)^k}{k!} \dots\dots\dots (16)$$

この式はかなり複雑であるが、われわれの場合適合する関数は、これらの級数の中の最も簡単なものであつて、

* A がきわめて小さいときの期待値は $(A-1)e^{-NL}$ となる。 A が大なるときはその差は無視できる。

すなわち $n=1$ のときの関数となるから

$$G(y) = AF e^{-NL}(1 - e^{-NL}) e^{-Fy} \dots\dots\dots (17)$$

$$H(y) = Ae^{-NL}(1 - e^{-NL}) e^{-Fy} \dots\dots\dots (18)$$

ゆえに閉区間の分布に関する式は次のごとくなる。

- ① L 以下の閉区間の数 = 0
- ② L に等しい閉区間の数 = Ae^{-2NL}
- ③ L に等しいかまたは大なる t に対する閉区間の数 = $Ae^{-NL}(1 - e^{-NL}) e^{-F(t-L)}$

$$\text{閉区間の全数} = Ae^{-NL} \dots\dots\dots (20)$$

$$\text{閉区間の全時間} = \frac{A}{N}(1 - e^{-NL}) \dots\dots\dots (21)$$

$$\text{平均閉区間の長さ} = \frac{1 - e^{-NL}}{Ne^{-NL}} \dots\dots\dots (22)$$

これらの値から主道路上の交通流の閉区間の長さに依じて、やむを得ず停止せしめられる側道路上の交通車両や横断歩行者の割合、数を算出して、その交通処理の方法、対策を考究することができる。

(3) 実測例

つぎに実際の交通流中の閉区間の長さの分布と理論値との比較をしてみると、いま閉区間の長さを t 秒とすると、 t より大なる閉区間にふくまれる時間は式 (10) と同じように計算して

$$\int_t^\infty ANte^{-N(L+t)} dt = \frac{A}{N}(Nt+1)e^{-N(L+t)} \dots\dots\dots (23)$$

A 台の車をふくむ時間周期を考えると、それにふくまれる全時間は式 (5) から A/N であるから t 以上の閉区間の百分率は次式で計算される。

$$(Nt+1)e^{-N(L+t)} \times 100\% \dots\dots\dots (24)$$

表-1 は実測の一例で、交通量 642 台/h の場合の閉

表-1 閉区間の分布に関する実測例

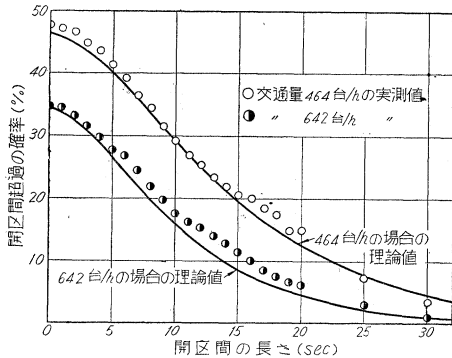
閉区間の長さ* t (秒)	観測度数 f	$t \times f^{**}$ (秒)	$t \times f$ の累加 (秒)	累加百分率 %	理論値 %
0~ 0.9	32	16.0	1256.5	34.90	34.16
1~ 1.9	29	43.5	1240.5	34.45	33.27
2~ 2.9	23	57.5	1197.0	33.25	31.75
3~ 3.9	18	63.0	1139.5	31.65	29.85
4~ 4.9	16	72.0	1076.5	29.89	27.71
5~ 5.9	8	44.0	1004.5	27.90	25.48
6~ 6.9	12	78.0	960.5	26.68	23.23
7~ 7.9	12	90.0	882.5	24.51	21.03
8~ 8.9	9	76.5	792.5	22.01	18.95
9~ 9.9	8	76.0	716.0	19.88	16.97
10~10.9	4	42.0	640.0	17.77	15.16
11~11.9	3	34.5	598.0	16.61	13.45
12~12.9	4	50.0	563.5	15.65	11.92
13~13.9	3	40.5	513.5	14.26	10.53
14~14.9	4	58.0	473.0	13.13	9.25
15~15.9	3	46.5	415.0	11.52	8.13
16~16.9	3	49.5	368.5	10.23	7.14
17~17.9	2	35.0	319.0	8.86	6.22
18~18.9	2	37.0	284.0	7.88	5.46
19~19.9	1	19.5	247.0	6.86	4.75
20~24.9	5	112.5	227.5	6.31	3.11
25~29.9	3	82.5	115.0	3.19	1.49
30~34.9	1	32.5	32.5	0.90	0.68

* 限界時間 $L=6$ 秒としたときの長さ

** この計算には t の中央値を用いた。

注: 上表は大阪府町プール南側路上における観測値で (昭.31.2.23), このときの交通量 $A=642$ 台/h であつた。

図-4 開区間量の累加分布



区間の長さに応じた観測値の頻度を示したもので、表中の理論値は式(24)により $L=6$ 秒として計算した値である。実測値と理論値を図-4に示し比較した。図中には交通量 464 台/h の場合も示したが、実測値はかなり

よく一致することがわかると思う。

以上述べたことは道路交通の処理方策上交通規制、信号機の設置基準、横断歩行者の管理などに利用しうるものと考えられる。なお実用的には限界時間 L の値を調査研究しなければならない⁵⁾。

参考文献

- 1) William Frederick Adams: Road Traffic Considered as a Random Series, The Institution of Civil Engineers Journal 4, p.p.121-130.
- 2) Bruce D. Greenshields: Application of Statistical Sampling Methods to Traffic Performance at Urban Intersections, Proceedings of 26th Annual Meeting of the Highway Research Board, Dec., 1946, p.p.377-389.
- 3) Morton S. Raff: The Distribution of Blocks in an Uncongested Stream of Automobile Traffic, March 1951, Journal of the American Statistical Association.
- 4) 毛利正光: 交通流の分布に関する統計学的考察, 都市計画学会誌第5巻4号, 通巻第18号, 1956 No.4, p.p.13~21.
- 5) 米谷栄二・毛利正光: 稲見俊明: 歩行者の横断に必要な交通間隔について, 第3回日本道路会議論文集(昭31.6.30)p.p.669~672.

日本工学会手帖(1959年版) 予約申込みについて

1. 寸法	15×9.5 cm	4. 予約申込場所	土木学会または日本工学会
2. 定価	170 円(送料とも 180 円)	5. 予約金支払日	昭和 33 年 11 月 30 日まで
3. 予約申込期日	昭和 33 年 10 月 31 日まで	6. 手帖発送期日	昭和 33 年 12 月 1 日より

東京都千代田区神田佐久間町 1 の 11 社団法人 造船協会内 社団法人 日本工学会 振替口座 東京 5055 番 電話 神田 (25) 4358 番

最新刊

プレストレスト コンクリート

〔内容説明送呈〕

Y. ギヨン著 藤田 亀太郎監修
大島 久次・中野 清司 共訳
B5 判・638 頁・上製本函入・送料 50 円
定 価 2,500 円

P.S コンクリートの世界的名著の完訳版
本書はフレシネの高弟ギヨンが著したもので、P.S コンクリートのバイブルとも称せられ、基礎理論と計算法及び世界的研究成果を網羅した。関係研究者・設計者・現場技術者・学生必備の画期的翻訳決定版。

都市計画

京都大学名誉教授・工学博士 武居高四郎著
都市計画審議委員・各市顧問
〔A5 判・350 頁・上製本・定価 680 円・送料 40 円〕

都市の起原とその発達より、都市計画の変遷・都市計画史を述べ都市の構成・組織について、その内容機構を分析、検討し、いかなる機構をもつよう都市を計画し建設すべきかを具体的にかつ明快に詳述した。都市計画を知らんとする人及び関係技術者・学生必携

東京都神田駿河台 3・振替 東京 57035 番

共立出版株式会社