

直交異方性板の曲げ理論 (追補)

成 岡 昌 夫\*

1. はしがき

著者は、さきに本誌に直交異方性板の曲げ理論と応用の大要を述べた<sup>1)</sup>。その場合に引用した基礎微分方程式は、M.T. Huber の提案した

$$B_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + B_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(x, y)$$

であつて、Y. Guyon<sup>2)</sup>; Ch. Massonnet<sup>3)</sup>; P.B. Morice<sup>4)</sup>らの研究は、すべてこの式を基礎としている。

この微分方程式の解は、 $\kappa = H/\sqrt{B_x B_y}$  により異なる。 $\kappa$  のきめ方には問題が多く、格子桁構造に対する Y. Guyon—Ch. Massonnet の方法、田原保二氏のさらに改良した方法<sup>5)</sup> などがあつて、あるいは鋼床板に対しては実験的に定めるべきものとされている。

しかしこれは Huber の微分方程式を用いることに起因する。すなわち Huber は、この式を充実板 (鉄筋コンクリート床板) に対して提案したが、充実板と相当に異なる桁橋構造を直交異方性板とみなして解析することから無理が生ずるのである。

この点にかんがみ A. Pflüger は、 $\kappa$  の値に左右されない解法を、座屈の問題に関して提案している<sup>6)</sup>。また K. Trenks の曲げの問題に関する論文<sup>7)</sup> は、A. Pflüger の研究を基礎としているが、Bauingenieur に発表されたその学位論文の要約<sup>8)</sup> のみでは、若干理解しにくいところもあり、なお彼の取り扱つたのが無限板に限られているので、ここで改めてこれらの理論を紹介し、あわせて著者の行なつた計算例を示し Huber 解とこの解法との相違を説明したいと思う。

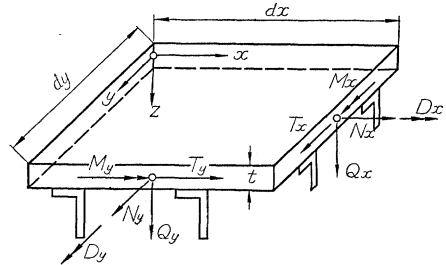
なお、A. Pflüger の理論によるべき場合およびその理由については、前著を参照されたい。

2. 記 号

図-1 を参照して次のように定める。

$t$ : 板の厚さ,  $F_x^*(F_y^*)$ :  $y(x)$  の方向単位長さについての  $x(y)$  方向の補剛材の断面積,  $I_x(I_y)$ :  $y(x)$  軸の単位長さについての補剛材の断面積の慣性モーメント,  $e_x(e_y)$ : 板の下面から補剛材の重心までの距離,  $S_x^* = F_x(e_x + 0.5t)$ ,  $S_y^* = F_y(e_y + 0.5t)$ ,  $I_x^* = I_x + F_x^*(e_x + 0.5t)^2$ ,  $I_y^* = I_y + F_y^*(e_y + 0.5t)^2$ : 板の中央面について求めた補剛材の断面積の一次モーメントおよび慣性モーメント (すべて単位長さあたりの値である),  $E$ : 弾性係数,  $\mu$ : ポアソン比,  $u_z, v_z, w_z$ : 中央面より  $z$  の距離

図-1



にある点の  $x, y, z$  方向の変位,

$u, v, w$ : 板の中央面 ( $z=0$ ) の点の  $x, y, z$  方向の変位,

$\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ : 板の伸びひずみおよびせん断ひずみ,

$\bar{\epsilon}_x, \bar{\epsilon}_y$ : 補剛材の伸びひずみ,

$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yx}$ : 板の直応力およびせん断応力,

$\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y$ : 補剛材の直応力

$N_x, N_y$ :  $y, x$  方向の単位長さあたりの板全体 (床板+補剛材) の  $x, y$  方向の軸方向力,

$T_x, T_y$ : 板の中央面に平行な方向のせん断力 (Schubkräfte),

$Q_x, Q_y$ : 板の中央面に垂直な方向のせん断力 (Querkräfte),

$M_x, M_y$ : 曲げモーメント (Biegemomente),

$D_x, D_y$ : ねじりモーメント (Drehmomente)。

3. 微分方程式の誘導

図-1 を参照して,

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x dz + \int_{(F_x)} \bar{\sigma}_x dF_x, & N_y &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y dz + \int_{(F_y)} \bar{\sigma}_y dF_y \\ T_x &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} dz = T_y, & M_x &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz + \int_{(F_x)} \bar{\sigma}_x z dF_x \\ M_y &= - \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z dz - \int_{(F_y)} \bar{\sigma}_y z dF_y, & D_x &= - \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z dz \\ & & &= -D_y \dots \dots \dots (1) \end{aligned} \right\}$$

フックの法則より、板および補剛材では、それぞれ、次の関係が成立する。

$$\sigma_x = E(\epsilon_x + \mu\epsilon_y)/(1 - \mu^2), \quad \sigma_y = E(\epsilon_y + \mu\epsilon_x)/(1 - \mu^2),$$

$$\tau_{xy} = E\gamma_{xy}/2(1 + \mu) \dots \dots \dots (2)_1$$

$$\bar{\sigma}_x = E\bar{\epsilon}_x, \quad \bar{\sigma}_y = E\bar{\epsilon}_y \dots \dots \dots (2)_2$$

一方、変位とひずみとの間の関係は、板および補剛材では、それぞれ

$$\epsilon_x = \partial u_z / \partial x, \quad \epsilon_y = \partial u_z / \partial y, \quad \gamma_{xy} = \partial u_z / \partial y + \partial v_z / \partial x, \dots \dots \dots (3)_1$$

$$\bar{\epsilon}_x = \partial u_z / \partial x, \quad \bar{\epsilon}_y = \partial v_z / \partial y, \dots \dots \dots (3)_2$$

\* 正員 工博 京都大学教授, 工学部土木工学教室

である。しかし、 $u_z, v_z, w_z$  と  $u, v, w$  との間には、次の関係がある。

$$u_z = u - z(\partial w / \partial x), v_z = v - z(\partial w / \partial y), w_z = w \dots (4)$$

従つて、断面力と変位との関係は次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \frac{Et}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + E \left( F_x^* \frac{\partial u}{\partial x} - S_x^* \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \\ N_y &= \frac{Et}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + E \left( F_y^* \frac{\partial v}{\partial y} - S_y^* \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ T_x = T_y &= \frac{Et}{2(1+\mu)} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ M_x &= -\frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ &\quad + E \left( S_x^* \frac{\partial u}{\partial x} - J_x^* \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_y &= \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ &\quad - E \left( S_y^* \frac{\partial v}{\partial y} - J_y^* \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ D_x = -D_y &= \frac{Et^3}{12(1+\mu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \dots (5)$$

次に、断面力の間には、次の5つの式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial T_x}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_y = 0, \quad \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = 0 \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

後の3つの式より、式(7)が得られる。

$$-\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 D_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 D_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = 0 \dots (7)$$

以上求めた式(6)の第1, 2式と式(7)に式(5)を代入し、

$$\begin{aligned} \bar{F}_x &= \{t/(1-\mu^2)\} + F_x^*, \quad S_x = S_x^*, \\ &\quad \bar{J}_x = \{t^3/12(1-\mu^2)\} + J_x^* \\ \bar{F}_y &= \{t/(1-\mu^2)\} + F_y^*, \quad S_y = S_y^*, \\ &\quad \bar{J}_y = \{t^3/12(1-\mu^2)\} + J_y^* \\ \bar{J}_T &= t^3/12(1-\mu^2) \end{aligned}$$

の記号を用いば、次の3つの偏微分方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{t}{2(1-\mu)} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{t}{2(1+\mu)} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - S_x \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \\ \bar{F}_y \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{t}{2(1-\mu)} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{t}{2(1+\mu)} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - S_y \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0 \\ \bar{J}_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\bar{J}_T \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \bar{J}_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - S_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - S_y \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \end{aligned} \right\} \dots (8)$$

これが A. Pflüger の求めた基礎微分方程式である。変位  $u, v, w$  に対して、これらを結びつける微分方程式が3つ成立する。

#### 4. 微分方程式の解法

いま、板が  $x=0, x=l$  の二辺で単純に支持されているものとし、次のようにおく。

$$\begin{aligned} w &= f(y) \cdot \sin(n\pi x/l), \quad u = \varphi(y) \cdot \cos(n\pi x/l), \\ v &= \psi(y) \cdot \sin(n\pi x/l) \dots \dots \dots (9) \end{aligned}$$

これを式(8)に代入すれば、

$$\left. \begin{aligned} \frac{t}{2(1+\mu)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \bar{F}_x \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 \varphi + \frac{t}{2(1-\mu)} \left( \frac{n\pi}{l} \right) \frac{d\psi}{dy} \\ + S_x \left( \frac{n\pi}{l} \right)^3 f = 0 \\ -\frac{t}{2(1-\mu)} \left( \frac{n\pi}{l} \right) \frac{d\varphi}{dy} + \bar{F}_y \frac{d^2 \psi}{dy^2} - \frac{t}{2(1+\mu)} \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 \psi \\ - S_y \frac{d^3 f}{dy^3} = 0 \\ -S_x \left( \frac{n\pi}{l} \right)^3 \varphi - S_y \frac{d^3 \psi}{dy^3} + \bar{J}_y \frac{d^4 f}{dy^4} - 2\bar{J}_T \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 \frac{d^2 f}{dy^2} \\ + \bar{J}_x \left( \frac{n\pi}{l} \right)^4 f = 0 \end{aligned} \right\} \dots (10)$$

式(10)<sub>3</sub>より

$$\begin{aligned} \varphi = \left[ -S_y \left( \frac{l}{n\pi} \right)^3 \frac{d^3 \psi}{dy^3} + \bar{J}_y \left( \frac{l}{n\pi} \right)^3 \frac{d^4 f}{dy^4} - 2\bar{J}_T \left( \frac{l}{n\pi} \right) \frac{d^2 f}{dy^2} \right. \\ \left. + \bar{J}_x \left( \frac{n\pi}{l} \right) f \right] / S_x \dots \dots \dots (11) \end{aligned}$$

次に、式(10)<sub>1</sub>, (10)<sub>2</sub>および(11)より

$$\begin{aligned} \psi^{(3)} = (d^3 \psi / dy^3) = Z / \{ [ (1 + \kappa_1^2) \bar{F}_x \bar{F}_y - \kappa_2^2 t^2 ] S_x S_y \\ + \kappa_1 [ \bar{F}_x^2 S_y^2 + \bar{F}_y^2 S_x^2 ] \} \dots \dots \dots (12)_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z = \kappa_2 t S_x (\bar{F}_y \bar{J}_y - S_y^2) \left( \frac{l}{n\pi} \right)^2 \left( \frac{d^4 f}{dy^4} \right) + \{ (\bar{F}_y S_x \\ + \kappa_1 \bar{F}_x S_y) (\bar{F}_x \bar{J}_y + \kappa_1 S_x S_y) - 2\kappa_2 t \bar{F}_y S_x \bar{J}_T \} \left( \frac{d^3 f}{dy^3} \right) \\ + \{ \kappa_2 t S_x (\bar{F}_y \bar{J}_y + \kappa_1 S_x S_y) - 2\bar{F}_x \bar{J}_T (\bar{F}_y S_x + \kappa_1 \bar{F}_x S_y) \} \\ \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 \frac{d^2 f}{dy^2} + \{ (\bar{F}_y S_x + \kappa_1 \bar{F}_x S_y) (\bar{F}_x \bar{J}_x - S_x^2) \} \\ \left( \frac{n\pi}{l} \right)^4 \cdot f \dots \dots \dots (12)_2 \end{aligned}$$

ただし  $\kappa_1 = (1+\mu)/(1-\mu)$ ,  $\kappa_2 = 2\mu/(1-\mu)(1-\mu^2)$

さて、式(12)により、 $d^3 \psi / dy^3$  は  $f$  のみの関数として表わされることになる。また  $d^3 \psi / dy^3$  が求められると、式(11)より  $\varphi$  も  $f$  のみの関数として表わされる。 $\psi$  は  $d^3 \psi / dy^3$  を三重積分することによつて求められる。

さらに、 $f^{(n)}$  のみをふくむ式をうることに努力すれば、最後に、次の式(13)が得られる。

$$\begin{aligned} (t \bar{F}_y \bar{J}_y - t S_y^2) \left( \frac{l}{n\pi} \right)^8 \frac{d^8 f}{dy^8} - \left\{ 2(1+\mu) \bar{F}_x \bar{F}_y \bar{J}_y \right. \\ \left. - \frac{2\mu t^2}{(1-\mu)(1-\mu^2)} \bar{J}_y + 2t \bar{F}_y \bar{J}_T - 2(1+\mu) \bar{F}_x S_y^2 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left( \frac{l}{n\pi} \right)^6 \frac{d^6 f}{dy^6} + \left\{ t \bar{F}_y \bar{J}_x + 4(1+\mu) \bar{F}_x \bar{F}_y \bar{J}_T \right. \\ & - \frac{4\mu t^2}{(1-\mu)(1-\mu^2)} \bar{J}_T + t \bar{F}_x \bar{J}_y + 2 \frac{1+\mu}{1-\mu} t S_x S_y \left. \right\} \left( \frac{l}{n\pi} \right)^4 \cdot \\ & \frac{d^4 f}{dy^4} - \left\{ 2(1+\mu) \bar{F}_x \bar{F}_y \bar{J}_x - \frac{2\mu t^2}{(1-\mu)(1-\mu^2)} \bar{J}_x \right. \\ & + 2t \bar{F}_x \bar{J}_T - 2(1+\mu) \bar{F}_y S_x^2 \left. \right\} \left( \frac{l}{n\pi} \right)^2 \frac{d^2 f}{dy^2} \\ & + (t \bar{F}_x \bar{J}_x - t S_x^2) f = 0 \dots \dots \dots (13) \end{aligned}$$

式(13)を解いて  $f$  を求め、式(12)より  $(d^3 \psi / dy^3)$  を求め、これを用いて、式(11)より  $\varphi$  が得られる。また、 $(d^3 \psi / dy^3)$  を積分して、 $\psi$  が求められる。これらによつて、式(9)よりすべての変位が求められ、式(5)から、すべての断面力が求まる。

### 5. 一方向にのみ補剛材の存在する場合の微分方程式

$x$  方向にのみ補剛材があるものとすれば、 $F_y^* = 0$ ,  $J_y^* = 0$  である。従つて、

$$\bar{F}_y = t / (1 - \mu^2), \quad S_y = 0, \quad \bar{J}_y = t^3 / 12(1 - \mu^2)$$

いま、 $S_x = F^* \cdot s$  とする。すなわち、 $s$  は補剛材の重心と deck plate の中央面との距離である。次に、

$$\rho = F_x^* / t, \quad \lambda = \bar{J}_x / \bar{J}_y, \quad r = s / t$$

とすれば、 $f(y)$  に関する式(13)は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \left( \frac{l}{n\pi} \right)^8 \frac{d^8 f}{dy^8} - 2[1 + \{1 + (1+\mu)\rho\}] \left( \frac{l}{n\pi} \right)^6 \frac{d^6 f}{dy^6} + [\lambda \\ & + 4\{1 + (1+\mu)\rho\} + \{1 + (1-\mu^2)\rho\}] \left( \frac{l}{n\pi} \right)^4 \frac{d^4 f}{dy^4} \\ & - 2[\{1 + (1+\mu)\rho\}\lambda + \{1 + (1-\mu^2)\rho\}] - 12(1+\mu) \\ & (1-\mu^2)\rho^2 r^2] \left( \frac{l}{n\pi} \right)^2 \frac{d^2 f}{dy^2} + [\{1 + (1-\mu^2)\rho\}\lambda \\ & - 12(1-\mu^2)^2 \rho^2 r^2] f = 0 \dots \dots \dots (14) \end{aligned}$$

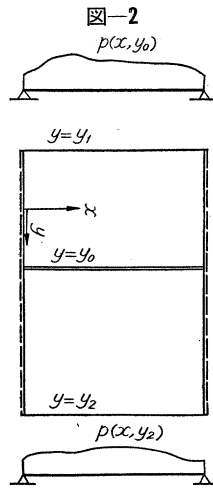
上式を解いて  $w(x, y) = f(y) \sin(n\pi x / l)$  が求められる。また、 $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  は、次のようになる。

$$u(x, y) = \frac{\cos(n\pi x / l)}{12(1-\mu^2)} \cdot \frac{t}{\rho r} \left\{ \left( \frac{l}{n\pi} \right)^8 \frac{d^8 f}{dy^8} - 2 \left( \frac{l}{n\pi} \right)^6 \frac{d^6 f}{dy^6} + \lambda \left( \frac{n\pi}{l} \right) f \right\} \dots \dots \dots (15)_1$$

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \frac{\sin(n\pi x / l)}{12(1+\mu^2)} \cdot \frac{t}{\rho r} \iiint \left[ \frac{2\mu}{1-\mu} \left( \frac{l}{n\pi} \right)^8 \frac{d^8 f}{dy^8} \right. \\ & + \left\{ 1 + (1-\mu^2)\rho - \frac{4\mu}{1-\mu} \right\} \frac{d^4 f}{dy^4} - \left[ 2\{1 + (1-\mu^2)\rho\} \right. \\ & - \frac{2\mu}{1-\mu} \lambda \left. \right] \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 \frac{d^2 f}{dy^2} + [\{1 + (1-\mu^2)\rho\}\lambda \\ & - 12(1-\mu^2)^2 \rho^2 r^2] \left. \right] \left( \frac{n\pi}{l} \right)^4 f \left. \right] dy dy dy \dots \dots \dots (15)_2 \end{aligned}$$

### 6. 境界条件および連続条件

図-2 のように、辺  $y = y_0$  上に、線荷重  $p(x, y_0)$  が作用する場合には、辺  $y = y_0$  における連続条件は次のようである。



- a)  $w_l = w_r$
  - b)  $(\partial w_l / \partial y) = (\partial w_r / \partial y)$
  - c)  $(\partial^2 w_l / \partial y^2) = (\partial^2 w_r / \partial y^2)$
  - d)  $u_l = u_r$
  - e)  $(\partial u_l / \partial y) = (\partial u_r / \partial y)$
  - f)  $v_l = v_r$
  - g)  $(\partial v_l / \partial y) = (\partial v_r / \partial y)$
  - h)  $Q_{y,l}^{(y=y_0)} - Q_{y,r}^{(y=y_0)} = p(x, y_0)$
- ..... (16)

次に自由辺に  $p(x, y_2)$  の線荷重が作用する場合の境界条件は次のようである。

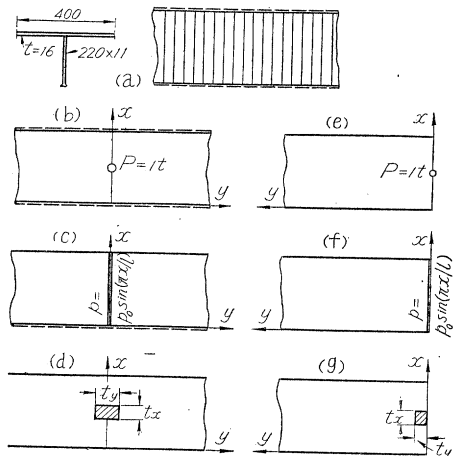
- a)  $\bar{Q}_y = Q_y + (\partial D_y / \partial x) = -p(x, y_2)$ ,
  - b)  $M_y = 0$ , c)  $N_y = 0$ , d)  $T_y = 0$
- ..... (17)

従来の場合にくらべてともに、条件式の数が増え2倍になっていることに注意されたい。

### 7. 計算例(その1)

図-3 (a) のように、 $x$  方向にのみ補剛材を有する鋼床の無限板あるいは半無限板を考える。鋼床板の断面は次のようである。

図-3



$$\begin{aligned} F_x &= 242.3 \text{ cm}^2/\text{m}, & F_y &= 160.0 \text{ cm}^2/\text{m}, \\ W_x^u &= 855.8 \text{ cm}^3/\text{m}, & W_x^o &= 2694 \text{ cm}^3/\text{m}, \\ W_y^u &= 42.67 \text{ cm}^3/\text{m}, & W_y^o &= 42.67 \text{ cm}^3/\text{m}, \\ \lambda &= \bar{J}_x / \bar{J}_y = 600, & \rho &= F_x^* / t = 0.5, \\ r &= s / t = 10, & \mu &= 0.3 \end{aligned}$$

(A) 図-3 (a) の鋼床板無限板の中心に集中荷重  $P$  が作用する場合(図-3 (b))  $f$  に関する方程式にふくまれる4つの積分常数は、 $y = 0$  における連続条件

- 1)  $(df/dy) = 0$ , 2)  $(d\varphi/dy) = 0$ , 3)  $\psi = 0$ ,

4)  $Q_y = -(1/2) \cdot (2/l) \cdot \sin(n\pi/2)$

によつて決定され、 $f, \varphi, \psi$  が求められる。これを用いて、式 (18) から断面力を計算する。

**断面力の計算** (5.  $F_y^* = 0, J_y^* = 0$  の場合であることに注意)

a)  $N_x = Et \Sigma \left[ - \left( \frac{1}{1-\mu^2} + \rho \right) \left( \frac{n\pi}{l} \right) \varphi + \frac{\mu}{1-\mu^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \rho \gamma t \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 f \right] \sin \frac{n\pi x}{l}$

b) 等方性板の中央面に作用する曲げモーメント  $M_x$

$$M_x = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} \Sigma \left[ \lambda \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 f - \mu \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 12 \cdot \right.$$

$$\left. (1-\mu^2) \frac{\rho \gamma}{t} \left( \frac{n\pi}{l} \right) \varphi \right] \sin \frac{n\pi x}{l}$$

c) 全断面の重心についてとつた曲げモーメント  $M_x^0$

$$M_x^0 = M_x - eN_x,$$

$$e = S_x / (F_x^* + t) = s \cdot F_x^* / (F_x^* + t)$$

d)  $N_y = \frac{Et}{1-\mu^2} \Sigma \left[ \frac{\partial \psi}{\partial y} - \mu \left( \frac{n\pi}{l} \right) \varphi \right] \sin \left( \frac{n\pi x}{l} \right)$

e)  $M_y = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} \Sigma \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \mu \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 f \right] \sin \frac{n\pi x}{l}$

f)  $T_x = T_y = \frac{Et}{2(1+\mu)} \Sigma \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \left( \frac{n\pi}{l} \right) \psi \right] \cos \frac{n\pi x}{l}$

g)  $D_x = -D_y = \frac{Et^3}{12(1+\mu)} \Sigma \left( \frac{n\pi}{l} \right) \frac{\partial f}{\partial y} \cos \frac{n\pi x}{l}$

h)  $Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} \Sigma \left[ \lambda \left( \frac{n\pi}{l} \right)^3 f - \left( \frac{n\pi}{l} \right) \frac{d^2 f}{dy^2} - 12(1-\mu^2) \frac{\rho \gamma}{t} \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 \varphi \right] \cos \frac{n\pi x}{l}$

i)  $Q_y = -\frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial D_x}{\partial x} = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} \Sigma \left[ -\frac{d^2 f}{dy^2} + \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 \frac{df}{dy} \right] \sin \frac{n\pi x}{l}$

..... (18)

以上の計算式によつて、すべての断面力が求められる。

図-3 (a) の無限鋼床板の中央に  $P=1t$  が作用する場合 (図-3 (b)) の、 $x=l/2$  上のタワミ、軸方向力および曲げモーメントを表-1 に示す。表-1 では、この解法による値を厳密解、従来の直交異方性板理論による

表-1 図-3 (b) の無限板の  $x=l/2$  線上のタワミ、曲げモーメント

y/l	厳密解 w	Huber 解		厳密解		Huber 解		厳密解		Huber 解		近似解			
		w (κ=0.05)	w (κ=0.30)	N <sub>x</sub>	M <sub>x</sub>	M <sub>x</sub> (κ=0.05)	M <sub>x</sub> (κ=0.30)	N <sub>y</sub>	M <sub>y</sub>	M <sub>y</sub> (κ=0.05)	M <sub>y</sub> (κ=0.30)	w	N <sub>x</sub>	M <sub>x</sub>	M <sub>y</sub>
0	0.2871	0.3216	0.2889	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0.2810	∞	∞	∞
0.05	0.2263	0.2544	0.2306	2.034	0.8104	0.8931	0.8306	0.202	0.00585	0.00754	0.00585	0.2204	2.167	0.8042	0.00573
0.10	0.1398	0.1558	0.1470	0.430	0.4548	0.4934	0.4748	0.050	-0.00619	-0.00592	-0.00522	0.1346	0.540	0.4493	-0.00625
0.15	0.0716	0.0748	0.0789	-0.584	0.2319	0.2364	0.2495	-0.051	-0.00863	-0.00951	-0.00747	0.0671	-0.481	0.2261	0.00868
0.20	0.0302	0.0232	0.0346	-1.073	0.0981	0.0731	0.1102	-0.133	-0.00680	-0.00830	-0.00636	0.0266	-0.969	0.0922	-0.00680
0.25	0.0104	-0.0023	0.0105	-1.126	0.0345	-0.0093	0.0331	-0.191	-0.00391	-0.00533	-0.00417	0.0077	-1.026	0.0289	-0.00392
0.30	0.0033	-0.0097	-0.0002	-0.948	0.0123	-0.0306	-0.0013	-0.234	-0.00171	-0.00267	-0.00227	0.0015	-0.863	0.0076	-0.00169
0.35	0.0019	-0.0105	-0.0035	-0.706	0.0086	-0.0342	-0.0107	-0.260	-0.00046	-0.00090	-0.00099	0.0008	-0.642	0.0050	-0.00043
0.40	0.0022	-0.0107	-0.0036	-0.497	0.0103	-0.0351	-0.0116	-0.266	0.00005	0.00000	-0.00032	0.0019	-0.448	0.0076	0.00009
0.45	0.0023	-0.0039	-0.0026	-0.335	0.0115	-0.0123	-0.0084	-0.265	0.00016	0.00031	0.00000	0.0026	-0.306	0.0097	0.00021
0.50	0.0022	-0.0015	-0.0015	-0.225	0.0110	-0.0048	-0.0047	-0.261	0.00012	0.00033	0.00009	0.0028	-0.211	0.0101	0.00015
0.60	0.0009	0.0003	-0.0003	-0.098	0.0064	0.0010	-0.0009	-0.240	-0.00002	0.00014	0.00008				
0.70	-0.0003	0.0003	0.0001	-0.038	0.0019	0.0009	0.0003	-0.213	0.00003	0.00000	0.00002				
0.80	-0.0009	0.0001		-0.002	0.0001	0.0004		-0.181	0.00001	0.00001					
0.90	-0.0011			0.021	-0.0011			-0.154							
1.00	-0.0011			0.032	-0.0016			-0.127							

備考 単位: タワミ、 $10^{-4}l^2(m)$  (ただし  $l$  は  $m$  で表わす)、 $N_x, N_y, t/m$ ;  $M_x, M_y, tm/m$ .

表-2 図-3 (a) の無限板の中央に部分的分布荷重 ( $P=q \cdot t_x \cdot t_y = 1t$ ) が作用する場合 (図-3 (d)) の板中央の断面力および応力

	$t_x = 0.05l, t_y = 0.10l$						$t_x = 0.05l, t_y = 0.20l$					
	厳密解	Huber 解				厳密解	Huber 解					
		κ=0.05		κ=0.30			κ=0.05		κ=0.30			
		計算値	誤差	計算値	誤差		計算値	誤差	計算値	誤差		
$M_x (tm/m)$	1.203	1.344	12 %	1.229	2 %	0.909	1.009	11 %	0.932	2 %		
$N_x (t/m)$	3.987					2.581						
$\sigma_x^0 (kg/cm^2)$	-28.2	-49.9	72 %	-45.6	62 %	-23.0	-37.5	63 %	-34.6	50 %		
$\sigma_x^u (kg/cm^2)$	157.1	157.0	0 %	143.6	-9 %	116.9	117.9	1 %	108.9	-7 %		
$M_y (tm/m)$	0.0280	0.0313	12 %	0.0269	-4 %	0.0133	0.0155	17 %	0.0131	-1 %		
$N_y (t/m)$	0.459					0.295						
$\sigma_y^0 (kg/cm^2)$	-62.7	-73.4	17 %	-63.0	0 %	-29.4	-36.3	23 %	-30.7	4 %		
$\sigma_y^u (kg/cm^2)$	68.5	73.4	7 %	63.0	-8 %	33.0	36.3	10 %	30.7	-7 %		

値を Huber 解としてある。Huber 解では、 $\kappa=0.05$ ,  $0.30$  の二つを仮定してある。 $\kappa=0.05$  は、St. Venant のネジリコワサに相当するものである。

(B) 図-3 (a) の鋼床板無限板の中央に、正弦線荷重  $p=p_0 \sin(\pi x/l)$  が作用する場合 (図-3 (c)) 点 ( $x=l/2$ ,  $y=0$ ) の  $w, M_x, N_x, \sigma_x^o, \sigma_x^u, M_y, N_y, \sigma_y^o, \sigma_y^u$  の値は、K. Trenks, Bauing., 29 (1954) S. 375 に出ている。

る。

(C) 図-3 (a) の鋼床板無限板の中央に、 $P=qt_x t_y=1t$  の部分的等分布荷重が作用する場合 (図-3 (d)) 表-2 に、板中央点の断面力および応力を、 $t_x=0.05l$ ,  $t_y=0.10l$ ;  $t_x=0.05l$ ,  $t_y=0.20l$  の場合について示す。

(D) 図-3 (a) の鋼床板半無限板の自由縁の中央に集中荷重  $P=1t$  が作用する場合 (図-3 (e)) 計算結果

表-3 図-3 (e) の鋼床板半無限板の  $x=l/2$  線上のタワミ、軸方向力および曲げモーメント

	Huber 解			厳密解		Huber 解		厳密解		Huber 解		近 似 解					
	$\kappa=0.05$		$\kappa=0.30$	$N_x$	$M_x$	$\kappa=0.05$		$\kappa=0.30$		$N_y$	$M_y$	$M_y$	$M_y$	$w$	$N_x$	$M_x$	$M_y$
	$w$	$w$	$w$			$M_x$	$M_x$	$M_y$	$M_y$								
0	1.0892	1.2632	1.0055	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	0	0	0	0	1.0630	$\infty$	$\infty$	0	
0.05	0.5555	0.6458	0.5617	4.007	1.836	2.054	1.891	-1.234	-0.0631	-0.0686	-0.0469	-0.0383	0.2094	-0.891	0.678	-0.0504	
0.10	0.2245	0.2496	0.2700	-1.587	0.715	0.743	0.845	-1.358	-0.0505	-0.0570	-0.0383	-0.0265	0.0439	-3.238	0.156	-0.0327	
0.15	0.0542	0.0346	0.1010	-3.743	0.184	0.097	0.314	-1.430	-0.0329	-0.0400	-0.0265	-0.0158	-0.0172	-3.520	-0.046	-0.0162	
0.20	-0.0109	-0.0531	0.0182	-3.901	-0.025	-0.177	0.054	-1.472	-0.0165	-0.0225	-0.0158	-0.0093	-0.0078	-0.0250	-2.815	-0.074	-0.0054
0.25	-0.0224	-0.0686	-0.0135	-3.086	-0.059	-0.225	-0.046	-1.472	-0.0056	-0.0093	-0.0078	-0.0018	-0.0030	-0.0146	-1.923	-0.042	-0.0001
0.30	-0.0148	-0.0533	-0.0197	-2.085	-0.032	-0.174	-0.065	-1.436	-0.0003	-0.0018	-0.0030	-0.0006	-0.0006	-0.0028	-1.204	-0.004	0.0015
0.35	-0.0054	-0.0317	-0.0160	-1.266	0.001	-0.102	-0.052	-1.384	0.0013	0.0015	-0.0006	0.0003	0.0046	-0.0046	0.026	0.0009	
0.40	0.0002	-0.0145	-0.0102	-0.723	0.018	-0.047	-0.033	-1.294	0.0013	0.0022	0.0003	0.0018	0.0006	0.0072	-0.462	0.026	0.0009
0.45	0.0017	-0.0039	-0.0054	-0.392	0.022	-0.012	-0.017	-1.207	0.0008	0.0018	0.0006	0.0011	0.0004	0.0071	-0.318	0.025	0.0004
0.50	0.0008	0.0011	-0.0023	-0.195	0.019	0.004	-0.007	-1.123	0.0003	0.0011	0.0004	0.0002	0.0001				
0.60	-0.0030	0.0022	0.0000	0.000	0.005	0.007	0.000	-0.962	-0.0001	0.0002	0.0001						
0.70	-0.0052	0.0007	0.0002	0.092	-0.005	0.002	0.001	-0.807	-0.0001								
0.80	-0.0057	0.0003		0.145	-0.008	0.001		-0.670									
0.90	-0.0054			0.167	-0.009			-0.548									
1.00	-0.0049			0.165	-0.009			-0.444									

単位 0 表-1 と同じ

表-4 図-3 (f) の鋼床板半無限板の自由縁に  $p=p_0 \sin(\pi x/l)$  が作用する場合、および図-3 (g) の鋼床板半無限板の自由縁に部分的等分布荷重が作用する場合の、自由縁の中央のタワミ、軸方向力、曲げモーメントおよび応力

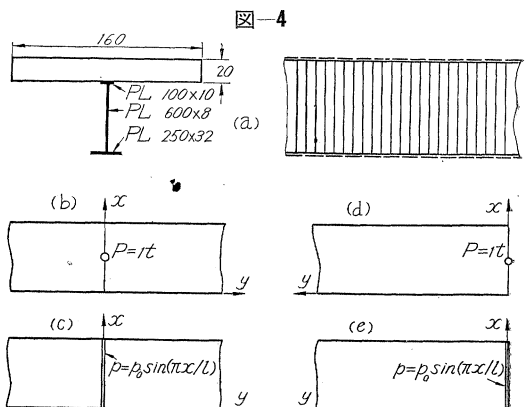
	図-3 (f) の荷重, $p_0=1t/m$ , $l=4.00m$								図-3 (g) の荷重, $P=q \cdot t_x \cdot t_y=1t$ , $t_x=t_y=0.05l$ , $l=4.00m$					
	厳密解	M.T. Huber 解						近 似 解		厳密解	M.T. Huber 解			
		$\kappa=0.05$		$\kappa=0.15$		$\kappa=0.30$		計算値	誤差		$\kappa=0.05$		$\kappa=0.30$	
		計算値	誤差	計算値	誤差	計算値	誤差				計算値	誤差	計算値	誤差
$w$ cm	0.3314	0.3843	16%	0.3468	5%	0.3059	-8%	0.3234	-2%	3.378	3.866	14%	3.300	-2%
$M_x$ tm/m	6.729	7.804	16%	7.042	5%	6.212	-8%	6.620	-2%	12.83				
$N_x$ t/m	35.45							37.67	6%	-72.4	-143.5	98%	-122.5	69%
$\sigma_x^o$ kg/cm <sup>2</sup>	-103.5	-289.7	180%	-261.4	152%	-230.6	122%	-90.2	-15%	447.7	451.7	1%	385.6	-14%
$\sigma_x^u$ kg/cm <sup>2</sup>	932.6	911.7	-2%	822.9	-12%	725.9	-22%	929.0	1%					

を表-3 に示す。

(E) 図-3 (a) の鋼床板半無限板の自由縁に正弦線荷重  $p=p_0 \sin(\pi x/l)$  が作用する場合 (図-3 (f))、および部分的等分布荷重が作用する場合 (図-3 (g)) 自由縁中央のタワミ、軸方向力、曲げモーメントおよび曲げ応力を表-4 に示す。

### 8. 計算例 (その2)

図-4 (a) のような鉄筋コンクリート床板 ( $n=5.25$ ) を考える。鉄筋コンクリート床板の厚さは 20 cm で、160 cm 間隔に  $100 \times 10$ ,  $600 \times 8$ ,  $250 \times 32$  の I 断面が床板と合成されていて、床板を補剛していると考えられる。



この断面の性質は次のようである。

$$\begin{aligned}
 F_x^b &= 2\,453 \text{ cm}^2/\text{m}, & F_x^e &= 467.2 \text{ cm}^2/\text{m}, \\
 F_y^b &= 2\,000 \text{ cm}^2/\text{m}, \\
 W_x^{bo} &= 72\,940 \text{ cm}^3/\text{m}, & W_x^{eu} &= 4\,472 \text{ cm}^3/\text{m}, \\
 W_y^{bu} &= 6\,667 \text{ cm}^3/\text{m}, & W_y^{bo} &= 6\,667 \text{ cm}^3/\text{m},
 \end{aligned}$$

図-4 (a) の構造の無限板あるいは半無限板に種々の荷重が載荷される場合を示すと、次のようである。

(A) 無限板の中央に  $P=1\text{t}$  が作用する場合 (図-4 (b))  $x=l/2$  線上のタワミ, 断面力を示すと, 表-5 のようである。

表-5 図-4 (a) の無限板の中央に  $P=1\text{t}$  が作用する場合の  $x=l/2$  線上のタワミ, 軸方向力, 曲げモーメント

	厳密解	Huber 解 $\kappa=0.22$	厳密解		Huber 解 $\kappa=0.22$	厳密解		Huber 解 $\kappa=0.22$
	$w$	$w$	$N_x$	$M_x$	$M_x$	$N_y$	$M_y$	$M_y$
0	0.7792	0.7943	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
0.1	0.6311	0.6431	0.1023	0.4113	0.4177	0.0311	0.0166	0.0173
0.2	0.4134	0.4194	0.0053	0.2384	0.2410	0.0070	-0.0091	-0.0090
0.3	0.2301	0.2301	-0.0529	0.1297	0.1293	-0.0114	-0.0159	-0.0164
0.4	0.1066	0.1018	-0.0767	0.0595	0.0565	-0.0261	-0.0144	-0.0151
0.5	0.0363	0.0294	-0.0729	0.0194	0.0153	-0.0360	-0.0099	-0.0106
0.6	0.0031	-0.0039	-0.0548	0.0014	-0.0033	-0.0407	-0.0057	-0.0061
0.7	-0.0089	-0.0144	-0.0342	-0.0050	-0.0088	-0.0408	-0.0027	-0.0029
0.8	-0.0106	-0.0141	-0.0172	-0.0057	-0.0084	-0.0377	-0.0010	-0.0010
0.9	-0.0085	-0.0102	-0.0054	-0.0044	-0.0059	-0.0330	-0.0002	-0.0001
1.0	-0.0058	-0.0060	0.0018	-0.0029	-0.0034	-0.0281	0.0001	0.0002

単位: タワミ,  $10^{-6}l^2(\text{m})$  (ただし,  $l$  は  $\text{m}$  で表わす), 他は表-1 に同じ

表-6 図-4 (a) の半無限板の自由縁の中央に  $P=1\text{t}$  が作用する場合の  $x=l/2$  線上のタワミ, 軸方向力, 曲げモーメント

	厳密解	Huber 解 $\kappa=0.22$	厳密解		Huber 解 $\kappa=0.22$	厳密解		Huber 解 $\kappa=0.22$
	$\delta$	$\delta$	$N_x$	$M_x$	$M_x$	$N_y$	$M_y$	$M_y$
0	2.7729	2.8442	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	0	0
0.1	1.5486	1.5842	0.1465	0.9196	0.9333	-0.1792	-0.1078	-0.1097
0.2	0.7426	0.7503	-0.1612	0.4064	0.4058	-0.1897	-0.0894	-0.0919
0.3	0.2722	0.2612	-0.2566	0.1464	0.1371	-0.2034	-0.0638	-0.0667
0.4	0.0394	-0.0193	-0.2378	0.0188	0.0045	-0.2096	-0.0385	-0.0411
0.5	-0.0502	-0.0704	-0.1671	-0.0295	-0.0443	-0.2035	-0.0134	-0.0210
0.6	-0.0674	-0.0823	-0.0906	-0.0377	-0.0492	-0.1868	-0.0076	-0.0082
0.7	-0.0563	-0.0641	-0.0311	-0.0304	-0.0375	-0.1638	-0.0017	-0.0015
0.8	-0.0389	-0.0402	0.0061	-0.0203	-0.0232	-0.1381	0.0007	0.0012
0.9	-0.0240	-0.0211	0.0254	-0.0119	-0.0119	-0.1133	0.0013	0.0019
1.0	-0.0143	-0.0085	0.0330	-0.0067	-0.0047	-0.0919	0.0011	0.0015

単位: タワミ,  $10^{-6}l^2(\text{m})$  (ただし,  $l$  は  $\text{m}$  で表わす), 他は表-1 に同じ

表-7 図-4 (a) の構造の半無限板の自由縁に  $p=p_0 \sin(\pi x/l)$ ,  $p_0=5\text{t/m}$ ,  $l=12.0\text{m}$  の線荷重がのる場合の自由縁中央の値

	単位	厳密解	M.T. Huber 解			
			$\kappa=0.22$		$\kappa=0.30$	
			計算値	誤差	計算値	誤差
$w$	cm	1.139	1.169	3%	1.084	-5%
$M_x$	tm/m	45.98	47.16	3%	43.80	-5%
$N_x$	t/m	31.49	-64.7			
$\sigma_x^{bo}$	kg/cm <sup>2</sup>	-50.2	-64.7	29%	-60.0	20%
$\sigma_x^{eu}$	kg/cm <sup>2</sup>	1.096	1.055	-4%	980	-11%

(B) 無限板の中央に  $p=p_0 \sin(\pi x/l)$  の線荷重が作用する場合 (図-4 (c))  $x=l/2$  線上のタワミ, 断面力の値は, K. Trenko, Bauing., 29 (1954), S. 376 に出ている。

(C) 半無限板の自由縁の中央に  $P=1\text{t}$  が作用する場合 (図-4 (d))  $x=l/2$  線上のタワミ, 断面力を, 表-6 に示す。

(D) 半無限板の自由縁に  $p=p_0 \sin(\pi x/l)$  の正弦線荷重が作用する場合 (図-4 (e)) 自由縁の中央のタワミ, 断面力, 応力を 表-7 に示す。

### 9. 計算例 (その3)

$x, y$  二方向に補剛された鉄筋コンクリート床板 ( $n=5.25$ ) 構造を 図-5 (a) に示す。断面の性質は次のようである。

$$\begin{aligned}
 F_x^b &= 2\,280 \text{ cm}^2/\text{m}, & F_x^e &= 434.3 \text{ cm}^2/\text{m}, \\
 F_y^b &= 2\,206 \text{ cm}^2/\text{m}, & F_y^e &= 420.2 \text{ cm}^2/\text{m}, \\
 W_x^{bo} &= 49\,360 \text{ cm}^3/\text{m}, & W_x^{eu} &= 1\,939 \text{ cm}^3/\text{m}, \\
 W_y^{bo} &= 40\,380 \text{ cm}^3/\text{m}, & W_y^{eu} &= 1\,453 \text{ cm}^3/\text{m},
 \end{aligned}$$

(A) 無限板の中央に  $P=1\text{t}$  が作用する場合 (図-5

表-8 図-5 (a) の無限板の中央に  $P=1\text{ t}$  が作用する場合の、 $x=l/2$  線上の  
タワミ、断面力の値

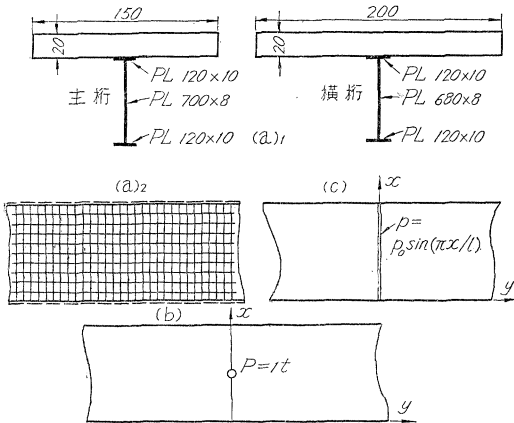
$y/l$	厳密解		Huber 解		厳密解		Huber 解	
	$w$	$w(\kappa=0.10)$	$N_x$	$M_x$	$M_x(\kappa=0.10)$	$N_y$	$M_y$	$M_y(\kappa=0.10)$
0	0.787	0.793	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
0.1	0.735	0.739	0.0594	0.2948	0.2957	0.0754	0.0973	0.0978
0.2	0.636	0.638	0.0275	0.2130	0.2130	0.0494	0.0318	0.0318
0.3	0.524	0.523	0.0065	0.1620	0.1616	0.0322	-0.0025	-0.0029
0.4	0.412	0.408	-0.0103	0.1237	0.1225	0.0193	-0.0226	-0.0231
0.5	0.310	0.304	-0.0207	0.0920	0.0906	0.0069	-0.0334	-0.0341
0.6	0.221	0.213	-0.0273	0.0658	0.0640	-0.0033	-0.0379	-0.0386
0.7	0.147	0.140	-0.0294	0.0444	0.0423	-0.0123	-0.0378	-0.0384
0.8	0.091	0.083	-0.0281	0.0273	0.0252	-0.0190	-0.0346	-0.0350
0.9	0.048	0.041	-0.0245	0.0161	0.0125	-0.0233	-0.0297	-0.0299
1.0	0.018	0.012	-0.0197	0.0077	0.0037	-0.0255	-0.0242	-0.0241

単位: タワミ,  $10^{-6} l^2(\text{m})$  (ただし  $l$  は  $\text{m}$  で表わす), 他は 表-1 に同じ

表-9 図-5 (a) の無限板の中央に  $p=p_0 \sin(\pi x/l)$ ,  $p_0=10\text{ t/m}$ ,  $l=15\text{ m}$  の  
線荷重が作用する場合の板中央のタワミ、断面力および応力

	単位	厳密解	Huber 解					
			$\kappa=0.10$		$\kappa=0.30$		$\kappa=1.00$	
			計算値	誤差	計算値	誤差	計算値	誤差
$w$	cm	0.1683	0.1695	1%	0.1559	-7%	0.1257	-25%
$M_x$	tm/m	10.85	10.96	1%	10.08	-7%	8.18	-25%
$N_x$	t/m	3.83						
$\sigma_x^0$	kg/cm <sup>2</sup>	-20.3	-22.2	9%	-20.4	0%	-16.6	-18%
$\sigma_x^u$	"	568	566	0%	520	-8%	422	-26%
$M_y$	tm/m	9.50	9.59	1%	8.82	-7%	7.15	-25%
$N_y$	t/m	3.48						
$\sigma_y^0$	kg/cm <sup>2</sup>	-22.0	-23.8	8%	-21.8	-1%	-17.7	-19%
$\sigma_y^u$	"	662	660	0%	607	-8%	492	-26%

図-5



(b)  $x=l/2$  線上のタワミ、断面力を、表-8 に示す。

(B) 無限板の中央に  $p=p_0 \sin(\pi x/l)$ ,  $p_0=10\text{ t/m}$ ,  $l=15\text{ m}$  の正弦線荷重が作用する場合(図-5 (c)) 板中央のタワミ、断面力および曲げ応力を表-9 に示す。

### 10. 近似解法

補剛材が一方方向にのみ存在し、かつ  $v=0$  と仮定できる場合には、式(14)と(15)より、次式が求められる。

$$\left(\frac{l}{n\pi}\right)^3 \frac{d^3 f}{dy^3} - \left[2+2\left\{\frac{1}{1-\mu} + (1+\mu)\rho\right\}\right] \left(\frac{l}{n\pi}\right)^4 \frac{d^4 f}{dy^4} + \left[\lambda+4\left\{\frac{1}{1-\mu} + (1+\mu)\rho\right\}\right] \left(\frac{l}{n\pi}\right)^2 \frac{d^2 f}{dy^2} - \left[2\left\{\frac{1}{1-\mu} + (1+\mu)\rho\right\}\lambda - 24(1+\mu)(1-\mu^2)\rho^2 r^2\right] f = 0 \dots (20)$$

上式を解いて、 $f$  が求められると、

$$w(x,y) = f(y) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

$$u(x,y) = \left\{ \left(\frac{l}{n\pi}\right)^3 \frac{d^3 f}{dy^3} - 2\left(\frac{l}{n\pi}\right)^2 \frac{d^2 f}{dy^2} + \lambda \left(\frac{n\pi}{l}\right) f \right\} \frac{\cos(n\pi x/l)}{12(1-\mu^2)(\rho r/t)} \dots (21)$$

から、変位  $w, u$  を求めることができる。

この近似解法による値を、表-1, 3, 4 に併記してある。これによると、このような場合には、 $v=0$  と仮定してもよいことがわかる。

### 11. 有限板の場合の解法

以上に示した計算例は、いずれも、無限板あるいは半無限板の場合であつて、これらの場合には、 $y=\infty$  で  $f=0$  とおくことができるので、積分常数はさきほどの例でわかるとおり、4コとなり、計算式は簡単になる。しかし、有限板の場合には、事情はそう簡単でなく、8

つの積分常数すべてを処理することが必要である。

たとえば 図-6, 7 のように,  $x, y$  の二方向に補剛され,  $x=0$  および  $x=l$  の二辺で単純に支持された矩形板の他の二辺を自由とし, 板の中央に集中荷重, あるいは  $y=0$  の辺に線荷重が作用する場合には,  $f$  の方程式としては,  $x$  の正の側のみ考えるとよく, 積分常数は 8 コとなり, 次の条件式を用いる。

$$y=0: df/dy=0, d\phi/dy=0, \psi=0,$$

$$Q_y = -(1/2) \cdot (2P/l) \cdot \sin(n\pi/2)$$

$$y=b: M_y=0, N_y=0, T_y=0, Q_y=0$$

しかし集中荷重あるいは線荷重が,  $y$  の任意の位置に作用する場合には, その荷重の左右についてそれぞれ  $f$  の式をたてる必要が生ずることとなり, 積分常数は計 16 コとなる。しかし, 境界条件として  $4 \times 2=8$ , 連続条件として 8 コあるから, 条件式は合計 16 コとなり, 解けるわけである。

たとえば, 荷重が中央にのる場合についてその積分常数を求める式を示しても, ぼう大な紙面を要するので割愛し, 次に著者の行なつた 2 つの計算例を示す。

(A) 鋼床板 (図-6) 土木学会誌第 40 巻第 8 号参照。さきに, この鋼床板の中心に  $P=5.6t$  の作用する

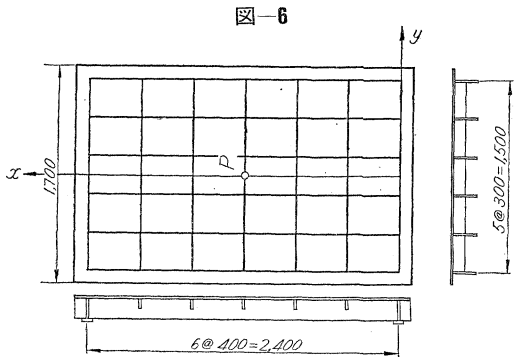


表-10 直交異方性鋼床板  $x=l/2$  線上のタワミ (単位 1/100 mm)

y	Huber 解			厳密解
	$\kappa=0.4$	$\kappa=1/6$	$\kappa=0$	
0	185	196	207	158
15	177	186	195	150
45	140	141	141	104
75	100	89	76	47

場合について,  $\kappa=0, \kappa=0.4$  に対する Huber 解による計算値を示したが, ここでは, 上述の厳密解による値を示そう。計算の基礎となる数値は,

$$\bar{F}_x = 1.59890 \text{ cm}^2/\text{cm}, \quad \bar{F}_y = 1.29890 \text{ cm}^2/\text{cm},$$

$$S_x = 4.00000 \text{ cm}^3/\text{cm}, \quad S_y = 0.90000 \text{ cm}^3/\text{cm},$$

$$\bar{J}_x = 41.46658 \text{ cm}^4/\text{cm}, \quad \bar{J}_y = 5.20825 \text{ cm}^4/\text{cm},$$

$$\bar{J}_T = 0.09158 \text{ cm}^4/\text{cm}, \quad \mu = 0.3$$

であつて,  $x=l/2, y=0, 15, 45, 75 \text{ cm}$  の点のタワミを求めると, 表-10 のようである。

表-10 の Huber 解も上述の解もともに集中荷重に対するものであるが, 載荷点付近のタワミについては  $\kappa=1$  の方が好ましいように思われる。しかし, この実例から, 他の鋼床板の実験例よりして, Huber 解における  $\kappa$  の値を推察してきめることが, いかにか乱暴であるかわかると思う。

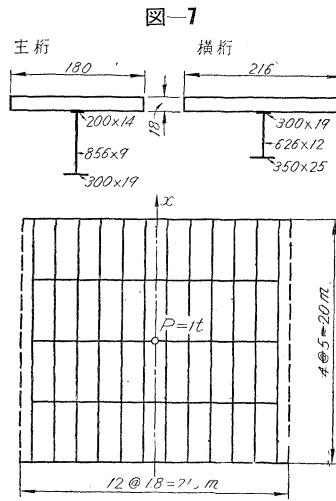
(B) 合成格子桁橋 (図-7) 主桁 12 本, 横桁 3 本よりなる合成格子桁橋を, 鉄筋コンクリート床板を鋼桁で補剛したものとみなして計算を行なう。主桁および横桁の断面は, 表-7 に示すとおりで,  $n=7$  とする。計算に必要な数値は次のようである。

$$\bar{F}_x = 24.30261 \text{ cm}^2/\text{cm}, \quad \bar{F}_y = 25.11666 \text{ cm}^2/\text{cm},$$

$$S_x = 384.91941 \text{ cm}^3/\text{cm}, \quad S_y = 333.04728 \text{ cm}^3/\text{cm},$$

$$\bar{J}_x = 31738.42282 \text{ cm}^4/\text{cm}, \quad \bar{J}_y = 21643.67077 \text{ cm}^4/\text{cm},$$

$$\bar{J}_T = 486.00000 \text{ cm}^4/\text{cm} \quad \mu = 0$$



$P=1t, l=20m$  とし  $x=l/2, y=0, 0.9, 2.7, 4.5, 6.3, 8.1, 9.9m$  の点のタワミを求めると, 表-11 のようである。この表には  $\kappa=0, 0.4, 1.0$  と仮定した場合の Huber 解による値, および F. Leonhardt の格子桁理論による荷重横分布数を用いて計算したタワミの

表-11 図-7 の合成格子桁の中心に集中荷重  $P$  の作用する場合の,  $x=l/2$  線上のタワミ (cm)

(単位  $10^{-6}P: P\text{-kg}$ )

y (m)		0	0.9	2.7	4.5	6.3	8.1	9.9
Huber 解	$\kappa=0$	21.51	20.94	17.67	13.45	8.40	3.77	-0.73
	$\kappa=0.4$	17.52	17.11	14.70	11.70	8.76	6.41	4.36
	$\kappa=1.0$	15.33	14.97	13.02	10.77	8.77	7.14	5.73
厳密解		12.95	12.80	11.75	10.07	8.08	5.96	3.87
格子桁理論			18.19	16.04	12.58	8.68	4.43	0.28



値もあわせて示してある。

この場合にも、厳密解は  $\kappa=1.0$  と仮定した場合と、比較的良好一致していることが注目に値しよう。これはやや意外の感がしないでもないが、計算結果をそのままのせておく。

以上二つの計算例では、 $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  の値を比較しなければならぬが、この計算はタワミの計算に比べてさらにぼう大となるので、次回にゆずりたい。

鋼床板の計算では、一般には相対する二辺で単純に支持され、他の相対する二辺で無限である無限板の解を利用しているので、無限板あるいは半無限板の解で十分であると思われる。しかし一般の有限板の場合には、上述のようになって、計算がぼう大となることはやむを得ない。

## 12. むすび

以上、A. Pflüger の理論および K. Trenks の無限板あるいは半無限板に対する計算結果を紹介し、あわせて、有限板の中心に集中荷重の作用する場合の計算の例を示した。

St. Venant のネジリコワサに対する  $\kappa$  の値は、計算例(その1)では  $\kappa=0.05$ 、(その2)では  $\kappa=0.22$ 、(その3)では  $\kappa=0.10$  である。表によれば、(その1)では  $\kappa$  の値がもう少し大きい方がよく、その他ではそのままでもよさそうである。従つて、構造方法に支配されるこ

とが考えられる。また、いずれの場合でも、 $\sigma_x^0$ ,  $\sigma_y^0$  が Huber 解といちじるしく異なることは注目に値する。

有限板の解法は複雑をきわめ、簡単に扱えない欠点がある。鋼床板(図-6)、合成格子桁(図-7)のタワミのみの計算結果によれば、 $\kappa=1$  に近い方がよいことになり、単に、構造方法の相違を念頭におかず、他の実例の  $\kappa$  の値をまねることが、きわめて冒険であることを示している。

直交異方性板の研究が盛んになつている現在、拙文が多少なりとも参考になるところがあれば幸甚である。なお、有限板に対する計算例は竹下貞雄君(京大土木工学科、昭 33.3 卒)をわづらわした。ここに謝意を表する。

## 参 考 文 献

- 1) 成岡: 土木学会誌, 41-10 (昭 31.10), p. 1
- 2) Y. Guyon: Annales des Ponts et Chaussees, 1946, p. 553
- 3) Ch. Massonet: Publ. IABSE., 10 (1950), p. 147
- 4) P.B. Morice and G. Little: Structural Engineering, 32 (1954), p. 83.
- 5) 田原・斎掛・国広: Proc. of the Symposium on the Stress Measurements for Bridge and Structures, 1957, p. 116 (Japan Society for the Promotion of Science, Tokyo)
- 6) A. Pflüger; Ing. Archiv, 16 (1947), S. 111.
- 7) K.Trenks: Beitrag zur Berechnung orthogonal anisotroper Rechteckplatten, von der Fakultät für Bauwesen an der Technischen Hochschule Hannover zur Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs genehmigte Dissertation.
- 8) K. Trenks: Bauing., 29(1954), S. 372.


## 西 独 道 路 技 師 ド ル シ ュ 氏 来 日

日本道路公団では、名古屋・神戸間高速自動車道路の線形計画決定のため、西独ウィースバーデン所在の設計事務所責任者クサヘル・ドルシュ氏を招へいた。

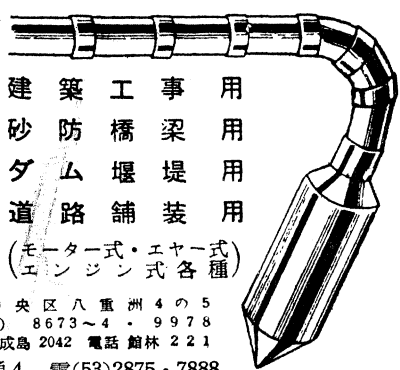
氏はトッド博士とともにアウトバーン建設にあつた権威者であり、次の事項を調査した。

- (1) 名古屋・神戸間高速道路計画路線の通過する地域の地形の現地調査を行なう。
- (2) 現地の地形・特殊事情を勘案して
  - a) 公園の設計基準(案)およびこれの現地への適用方法を検討
  - b) 公園の計画中の各インターチェンジの形式および設計の検討
  - c) 公園の計画による平面線形および縦断線形の検討

なお同氏は、7月6日来日し、8月4日帰国し、本国で報告書をまとめることになつている。



コンクリート  
パイプ



建築工事用  
砂防橋梁用  
ダム堰堤用  
道路舗装用

(モーター式・エアー式)  
エンジン式各種

三笠産業株式会社

西部地区総発売元 三笠建設機械株式会社

本社 東京都中央区八重洲4の5  
営業所 TEL (28) 8673~4・9978  
工場 群馬県館林市成島2042 電話 館林 221

大阪市西区立売堀北通4 電(53)2875・7888



# アスタイル



最も広く使用されている床材です



藤森建材株式会社

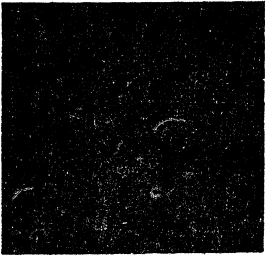


# ビニアスタイル



これが20.5世紀の床材です

フジチューブ



フジボイド

フジエアーダクト

東京 東京都中央区日本橋通1の2  
(大倉ビル)  
電話 東京(27) 6432-5  
大阪 大阪市西区土佐堀通1の1  
(大同生命ビル)  
電話 土佐堀(44) 0225・7569