

構 造 力 学 (IV)

階差法とその構造力学への応用

成 岡 昌 夫*

1. 数値積分法とその重要性

微分方程式はわれわれの周辺によく現われる。たとえば、対象を構造力学にとつても、ハリ(薄い平板)が曲げを受ける場合の中立線(中立面)のタワミ曲線(曲面)の微分方程式、あるいはハリ・薄い平板の自由タワミ振動の微分方程式などは、非常に関係が深い。微分方程式が工学を研究するための武器として用いられる場合には、普通の場合その解が要求される。もちろん解の数値が必ずしも必要なわけではないが、たいいていの場合数値を計算して問題の性質を明らかにする必要がある。

このような場合に解の数値を計算するには、解析的の解式(analytical solution)をあらかじめ導き、それにもとづいて間接的に数値を計算するか、あるいは始めから解析的解法によらず、数値積分法によつてこれらの方程式を解き、直接に数値的の解(numerical solution)をうるか、二つの方法のいずれかを選ばなければならない。

しかし微分方程式で解析的の解のえられる場合は、一般にはごく少なく、たとえ解が得られたとしても、数値を計算する場合、思いがけない困難にぶつかることが少なくない。

たとえば、両端回転端の変断面圧縮材のタワミ曲線の微分方程式は、 $EI(x)(d^2y/dx^2) + Py = 0$ であつて、慣性モーメントを、部材の midpoint に原点とつて、 $I(x) = I_c - (I_c - I_e)(2x/l)^n$ として解くことが、従来から研究されている。 $n=1$ の場合には、Bessel の微分方程式となり、解は Bessel 関数で与えられる。この解を境界条件式に代入して座屈条件式を定め、座屈荷重を求める。この場合、Bessel 関数の微係数の公式を知っていること、Bessel 関数の表が手元にあること、の二つが必要である。もし公式集と関数表が手元にないときには、解けないことになる。

このような場合に対しても、なんらかの方法で numerical solution をうるように努力すればよい。工学の方面では、種々の解法が考えられているが、変分法(Variational method)と階差法(Difference equation method)

が便利に使われている(階差のことを差分と現在は呼んでいるようであるが、昔のとおり述語を用いることにする)。

変分法を利用するためには、ハリ・棒・板などのヒズミ エネルギー式を知つており、かつ Ritz の方法を適用する必要があるのに反し、階差法は微分方程式を階差方程式に変換して解くだけで、頭脳の労力が不要である。土木工学の諸問題の解法として、階差法がきわめて便利に利用できることが多く、また、この方法によらなければ実際的には解けない問題も多いが、この方法は解析的解法のはなばなしがなく、実際的であるという点で、とかく軽視されてきた傾向がある。

構造力学の一般の著書には階差法の記述がなく、また等方性板に関する著書においても、階差法はごく簡単に取り扱われて、実際の応用に不便を感じることが多い。この意味において必要なカ所をとり出して記述し、参考に供したいと思う。

2. 階差法と階差方程式

微分方程式を解いて解析的な解式が得られると、ある任意の点 (x, y) における関数値 $w(x, y)$ が求められる。しかし、この解析的解を用いて曲線をかく場合、すべての点における関数値を計算する必要はなく(これはむしろ不可能である)、たいいていは、必要とみられる点における関数値——普通には、 x, y 軸に平行に有限な等間隔に選んだ直線群の交点における関数値——を計算すればよい。

微分方程式は、ある点における関数値とそれに無限に近い関数値との相互関係を表わしている。しかし以上の考え方に従い、単に終局の曲線をかく目的に用いるならば、ある点の関数値とそれと有限の間隔にある点との関係さえ求められるとよい。

微分方程式の中に含まれる微分商は、内挿法における階差商において増分を無限に小さくつた極限に相当する。従つて、微分方程式の中の微分商を階差商で代用し、階差方程式をつくる。元来、階差とは有限な間隔にある関数値のいくつかの組合せであるから、これら関数値を未知数とする連立方程式が得られる。これを解けば、もとの微分方程式の解——さきに述べた意味における——が近似的に得られるはずである。これを階差法という。

この連立方程式は、求めようとする関数値の数だけ必要であるから、一般には未知数の多い連立方程式を解くことが必要である。この点が階差法の欠点とされていたものである。しかし連立方程式の解法に工夫をこらせばたいした問題でなく、また electronic computer の最近の発達にもなつて、この欠点は完全に解消できる。†

たとえば、与えられた点 $x = x_0$ において、微分方程式

* 正員 工博 京都大学教授, 工学部土木工学教室

$$(d^2y/dx^2) + y + 1 = 0$$

を階差方程式におおそう。まず x の増分を h とし、 $x = x_0$ を中心とした Stirling の内挿式

$$y = y_0 + u(d y_{-1} + d y_0)/2 + (u^2/2)d^2 y_{-1} + \dots$$

$$u = (x - x_0)/h$$

を x について 2 回微分すると、次のようになる。

$$(d^2y/dx^2)_0 = d^2 y_{-1}/h^2 + \dots = (y_1 - 2y_0 + y_{-1})/h^2 + \dots$$

この第 1 項だけとつて、微分商 (d^2y/dx^2) のかわりに階差商 $(d^2 y_{-1}/h^2)$ を用いると、

$$(d^2y/dx^2)_{x=x_0} \doteq (y_1 - 2y_0 + y_{-1})/h^2$$

となり、 $(y)_{x=x_0} = y_0$ であるから、上の微分方程式は、 $y_1 - 2y_0 + y_{-1} + h^2 y_0 + h^2 = 0$ となり、結局、階差方程式 $y_1 - (2 - h^2)y_0 + y_{-1} + h^2 = 0$

が得られる。この式は、 $x = x_0$ なる点を中心にしてつくられたものであるが、さらに、 $x = x_1, x = x_2, \dots$ を中心にしてつくと、

$$y_2 - (2 - h^2)y_1 + y_0 + h^2 = 0,$$

$$y_3 - (2 - h^2)y_2 + y_1 + h^2 = 0, \dots$$

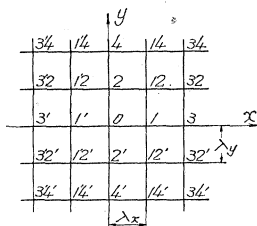
となる。この連立多元 1 次方程式を解いて、 y_1, y_2, \dots を知るわけである。もつとも、この場合、境界条件として、 y_0, y_1, y_2, \dots などの間に若干の関係式が必要であるが、これらはもちろん、あらかじめ与えられているのである。

以上は、常微分方程式を例にとつて説明したが、偏微分方程式の場合でも、同様に考えることができる。要は、微分商をいかに階差商で表わすかにある。以下これを列記しよう。

3. Rectangular Network における微分商の階差商による表示

$w(x, y)$ なる関数を考え、 xy 平面に図-1 のような rectangular network を設けるものとする。微分商は階差商によつて次のように表示される。

図-1



$$i) \left. \begin{aligned} (\partial w / \partial x)_0 &= (w_1 - w_{1'}) / 2 \lambda_x \} \dots \dots \dots (3.1) \\ (\partial w / \partial y)_0 &= (w_2 - w_{2'}) / 2 \lambda_y \} \end{aligned} \right\}$$

$$ii) \left. \begin{aligned} (\partial^2 w / \partial x^2)_0 &= (w_1 - 2w_0 + w_{1'}) / \lambda_x^2 \\ (\partial^2 w / \partial y^2)_0 &= (w_2 - 2w_0 + w_{2'}) / \lambda_y^2 \\ (\partial^2 w / \partial x \partial y)_0 &= (-w_{1'2} + w_{12} + w_{1'2'} - w_{12'}) / 4 \lambda_x \lambda_y \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3.2)$$

$$iii) \left. \begin{aligned} (\partial^3 w / \partial x^3)_0 &= (w_3 - 2w_1 + 2w_{1'} - w_{3'}) / 2 \lambda_x^3 \\ (\partial^3 w / \partial y^3)_0 &= (w_4 - 2w_2 + 2w_{2'} - w_{4'}) / 2 \lambda_y^3 \\ (\partial^3 w / \partial x^2 \partial y)_0 &= \{w_{12} + w_{1'2} - w_{12'} - w_{1'2'} - 2(w_2 - w_{2'})\} / 2 \lambda_x^2 \lambda_y \\ (\partial^3 w / \partial x \partial y^2)_0 &= \{w_{12} + w_{12'} - w_{1'2} - w_{1'2'} - 2(w_1 - w_{1'})\} / 2 \lambda_x \lambda_y^2 \end{aligned} \right\} (3.3)$$

$$iv) \left. \begin{aligned} (\partial^4 w / \partial x^4)_0 &= (w_3 - 4w_1 + 6w_0 - 4w_{1'} + w_{3'}) / \lambda_x^4 \\ (\partial^4 w / \partial y^4)_0 &= (w_4 - 4w_2 + 6w_0 - 4w_{2'} + w_{4'}) / \lambda_y^4 \\ (\partial^4 w / \partial x^2 \partial y^2)_0 &= \{4w_0 - 2(w_1 + w_{1'} + w_2 + w_{2'}) + (w_{1'2} + w_{12} + w_{1'2'} + w_{12'})\} / \lambda_x^2 \lambda_y^2 \\ (\partial^4 w / \partial x^3 \partial y)_0 &= \{-w_{3'2} + w_{32} + w_{3'2'} - w_{32'} - 2(-w_{1'2} + w_{12} + w_{1'2'} - w_{12'})\} / 4 \lambda_x^3 \lambda_y \\ (\partial^4 w / \partial x \partial y^3)_0 &= \{-w_{1'4} + w_{14} + w_{1'4'} - w_{14'} - 2(-w_{1'2} + w_{12} + w_{1'2'} - w_{12'})\} / 4 \lambda_x \lambda_y^3 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3.4)$$

従つて、 $\lambda_x = \lambda_y = \lambda$ (square network) の場合、 $d^2 w$, $d^4 w$ は、次のように表わされる。

$$(\nabla^2 w)_0 = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_0 = \{(w_1 + w_{1'} + w_2 + w_{2'}) - 4w_0\} / \lambda^2 \dots \dots \dots (3.5)$$

$$(\nabla^4 w)_0 = \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right)_0 = \{20w_0 - 8(w_1 + w_{1'} + w_2 + w_{2'}) + 2(w_{1'2} + w_{12} + w_{1'2'} + w_{12'}) + (w_3 + w_{3'} + w_4 + w_{4'})\} / \lambda^4 \dots \dots (3.6)$$

これらを、図-2, 3 のように表わす。

図-2

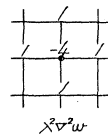
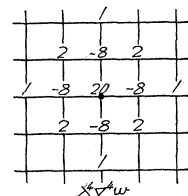


図-3



応用例 等方性板のタワミ曲面の微分方程式は式のようにである。

$$\nabla^4 w = p/N$$

ここで、 w : タワミ、 p : 分布荷重の強度、 N : 板剛度である。この 4 階の偏微分方程式を、二つの二階の偏微分方程式に書き改めると、次のようになる。

$$\nabla^2 M = -p, \quad \nabla^2 w = -M/N$$

ここに、 M : 曲げモーメント和 $= (M_x + M_y) / (1 + \nu)$ である。

図-1 のような rectangular network を用いることとし、 $\alpha = \lambda_y / \lambda_x$ として、上の二つの微分方程式を階差方程式で表わすと、次のようになる。

$$2(1 + \alpha)M_0 - \alpha(M_1 + M_{1'}) - (M_2 + M_{2'}) = p_0 \lambda_y^2 \dots \dots \dots (3.7)$$

$$2(1 + \alpha)w_0 - \alpha(w_1 + w_{1'}) - (w_2 + w_{2'}) = (M_0/N) \lambda_y^2 \dots \dots \dots (3.8)$$

式 (3.7) における M_1, M_1', M_2, M_2' についても、式 (3.8) に類似の式をたて、これらを式 (3.7) に代入すると、

$$w_0[6\{\alpha + (1/\alpha)\}] - 4\{(1+\alpha)(w_1 + w_1') + [1 + (1/\alpha)](w_2 + w_2')\} + 2(w_1' + w_1 + w_2 + w_2') + \alpha(w_3 + w_3') + (1/\alpha)(w_4 + w_4') = p_0 \lambda^4 / N \dots (3.9)$$

この式は、上述のような二段の操作をしなくても、式 (3.4) を直接用いて直接求めることもできる。

もし、 $\alpha=1$ (square network の場合) ならば、上式は次のようになり、式 (3.5), (3.6) と同様になる。

$$4M_0 - (M_1 + M_1' + M_2 + M_2') = p_0 \lambda^2 \dots (3.10)$$

$$4w_0 - (w_1 + w_1' + w_2 + w_2') = (M_0/N) \lambda^2 \dots (3.11)$$

$$20w_0 - 8(w_1 + w_1' + w_2 + w_2') + 2(w_1' + w_1 + w_2 + w_2') + (w_3 + w_3' + w_4 + w_4') = p_0 \lambda^4 / N \dots (3.12)$$

4. 等方性矩形板のワタミに対する微分方程式、断面力および境界条件の階差法による表示

等方性板のワタミ曲面の微分方程式 $\nabla^4 w = p/N$ は、square network では、式 (3.12) あるいは、図-3 で $(p_0/N) \lambda^4$ とおいたもので表わされる。このような式を各点についてたて、適当に境界条件を代入して、階差方程式をつくる。この連立方程式を解いて、ワタミ w が得られる。このようにして求めたワタミ w から、断面力は次のように表わすことができる。

(1) 曲げモーメントおよびねじりモーメント

$$\left. \begin{aligned} (M_x)_0 &= -N \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_0 = \frac{N}{\lambda^2} \cdot \\ &\quad \{-w_1 + 2w_0 - w_1' + \nu(-w_2 + 2w_0 - w_2')\} \\ (M_y)_0 &= -N \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_0 = \frac{N}{\lambda^2} \cdot \\ &\quad \{-w_2 + 2w_0 - w_2' + \nu(-w_1 + 2w_0 - w_1')\} \\ (M_{xy})_0 &= -(1-\nu)N \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_0 = \frac{(1-\nu)N}{4\lambda^2} \cdot \\ &\quad (w_1' - w_1 - w_2' + w_2) \end{aligned} \right\} (4.1)$$

(2) セン断力

$$\left. \begin{aligned} (Q_x)_0 &= -N \left(\frac{\partial \nabla^2 w}{\partial x} \right)_0 = \frac{N}{2\lambda^3} \{w_3' + (w_1' + w_2') - (w_1 + w_2) - w_3\} \\ (Q_y)_0 &= -N \left(\frac{\partial \nabla^2 w}{\partial y} \right)_0 = \frac{N}{2\lambda^3} \{w_4' + (w_1' + w_2') - (w_1 + w_2) - w_4\} \end{aligned} \right\} \dots (4.2)$$

(3) 反力

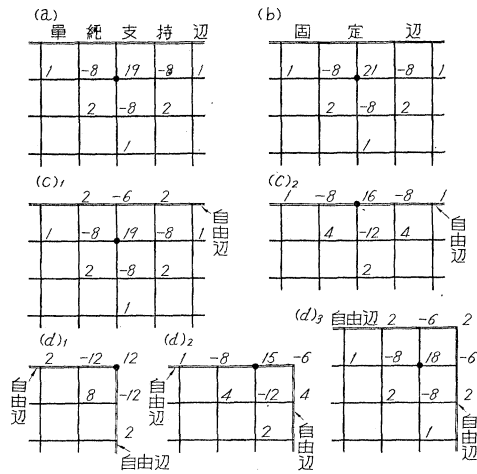
$$\left. \begin{aligned} (R_x)_0 &= -N \left\{ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right\}_0 = -\frac{N}{2\lambda^3} \cdot \\ &\quad \{w_3' + (6-2\nu)(w_1 - w_1') + (2-\nu) \cdot \\ &\quad (w_1' + w_2' - w_1 - w_2) - w_3\} \\ (R_y)_0 &= -N \left\{ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right\}_0 = -\frac{N}{2\lambda^3} \cdot \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} &\{w_4' + (6-2\nu)(w_2 - w_2') + (2-\nu) \cdot \\ &(w_1' + w_2' - w_1 - w_2) - w_4\} \end{aligned} \right\} \dots (4.3)$$

さて、辺 $y=0$ における点 0 の境界条件、すなわち図-1 における辺 3101'3' における点 0 の境界条件を階差法で表わそう。

a) 単純支持 単純支持の条件は、 $w=0, M_y=0$ である。すなわち、式 (4.1) において、まず $w_0=0$ とおけば、 $M_y=0$ となるためには、 $w_2' = -w_2$ でなければならない。すなわち、単純支持の条件は、 $w_0=0, w_2' = -w_2$ である。これを考慮して、式 (3.12) を変形すると、図-4(a) のようになる。

図-4



b) 固定 固定の条件は $w=0, (\partial w / \partial y)_0 = 0$ である。式 (3.1) より、 $(\partial w / \partial y)_0 = 0$ となるためには、 $w_2' = w_2$ とならなければならない。すなわち、固定の条件は、 $w_0=0, w_2' = w_2$ となる。これを考慮して式 (3.12) を変形すると、図-4 (b) のようになる。

c) 自由 自由の条件 $M_y=0, R_y=0$ である。この二つの条件をおりこんで、 $\nu=0$ と仮定して、式 (3.12) を変形すると、図-4(c) のようになる。

d) 自由隅 この場合には、 $M_x=0, R_x=0, M_y=0, R_y=0$ のほかに、 $M_{xy}=0$ の条件が必要である。式 (3.12) は、注目する点の位置に応じて、図-4 (d) のようになる。

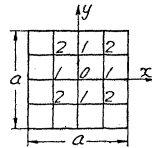
以上のように、単純支持辺、固定辺、自由辺の近傍の点および自由辺上および自由隅上では、与えられた境界条件をおりこんだ階差式を用いると便利である。

5. 階差法による計算の精度

階差法による計算を行う場合、network の間隔 λ を細かくすれば、当然よい結果が得られるが、連立方程式の解法に要する時間とにらみあわせて、適当な間隔をきめ

なければならぬ。もつとも、現在のように electronic computer が使用できると、間隔を相当細かくとつてよい。つぎに二、三の例を示そう。

図-5



a) 周辺単純支持，等分布荷重 q

満載の正方形板 (図-5) 図-5 のように， $\lambda=a/4$ に選り，各点に 0, 1, 2 の番号をつける。式 (3.10) を用いて，

$$4M_1 - 4M_0 = -qa^2/16, \quad 2M_2 - 4M_1 + M_0 = -qa^2/16, \\ -4M_2 + 2M_1 = -qa^2/16,$$

これを解いて，

$$M_0 = (9/2)(qa^2/64), \quad M_1 = (7/2)(qa^2/64), \\ M_2 = (11/4)(qa^2/64),$$

次に，式 (3.11) を用いて，

$$4w_1 - 4w_0 = -(9/2)K, \quad 2w_2 - 4w_1 + w_0 = -(7/2)K, \\ -4w_2 + 2w_1 = -(11/4)K$$

ただし， $K=qa^4/16 \cdot 64N$ である。

これを解いて，

$$w_0 = (66/16)K, \quad w_1 = (48/16)K, \quad w_2 = (35/16)K$$

すなわち，板中央においては，次のようになる。

$$w_0 = 66 qa^4/16 \cdot 64 N = 0.00403 qa^4/N \\ M_x = M_y = M_0(1+\nu)/2 = 0.65 M_0 = 0.0457 qa^2 \\ (\text{ただし，}\nu=0.3 \text{ とする})$$

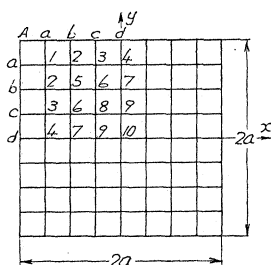
あるいは，直接式，(3.12) および図-4 より， w_0, w_1, w_2 に関する三元連立方程式を求め，これらを解いて，タワミを求め，これより， M_x, M_y を求めてもよい。

解析的解法による値は，それぞれ， $0.00406 qa^4/N, 0.0479 qa^2$ であつて，誤差はタワミについては 1% 以下，曲げモーメントについては 4.5% である。曲げモーメントはタワミの二次微係数で表わされるから，曲げモーメントの誤差はタワミの誤差より一般に大きい。しかし，4% ぐらいの誤差は実用上それほど問題でなく，従つて，周辺単純支持のような場合，すなわち反曲点，反曲線がない場合には，分割数が少なく，すなわち，network はあらくてよい。

また，さきに述べたように，計算の目的がタワミの計算にあるならば，分割数は少なくてもよいが，曲げモーメント，せん断力の計算まで必要ならば，分割数をタワミのみの計算に必要な分割数よりも，さらに大きくすべきである。

b) 周辺固定，等分布荷重 q 満載の正方形板 (図-6) 図-6 のよう

図-6



に $\lambda=a/4$ ，すなわち一辺の長さ $2a$ を 8 等分して network を組み，図のように番号をつけ，10 元 1 次連立方程式 (図-3 および 図-4 (b) の係数を使い，上のように二段にわけて解かない) を解いて，次の値をうる。

	階差法	解析法	誤差
w_{10}	$0.0228 qa^4/N$	$0.02022 qa^4/N$	12.8%
$M_{x,10}$	$0.07212 qa^2$	$0.07077 qa^2$	1.9%
$M_{x,d}$	$-0.18947 qa^2$	$-0.2052 qa^2$	-7.6%

$M_{x,10}$ の誤差が小さいのは，計算の結果，たまたま誤差が小さくなつただけのことであり， $M_{x,d}, w_{10}$ の誤差は相当大きい。これが 8 等分の場合であるから，固定辺のある場合は，単純支持辺の場合にくらべて，network を細かくすべきである。細分数によつて中央点のタワミ w_{20} がどんなにかかわるかを示せば次のようである (カッコ内は計算者)。

$$\lambda=a/2 \text{ (4等分)} \quad w=0.0288 qa^4/N \text{ (Nadai)}$$

$$\lambda=a/4 \text{ (8等分)} \quad w=0.0228 qa^4/N \text{ (Marcus)}$$

$$\lambda=a/5 \text{ (10等分)} \quad w=0.0219 qa^4/N \text{ (Nielsen)}$$

$$\lambda=a/6 \text{ (12等分)} \quad w=0.0214 qa^4/N \text{ (広川誠三郎)}$$

6. 高精度階差法

いままで述べた階差法では，精度を高めるためには， λ を小さく，方程式の数を多くする以外に方法がない。これに対して L. Collatz の方法を用いると，同じ方程式の数で，精度のより高い結果が得られる。たとえば， $(dw/dx)_0, (d^2w/dx^2)_0, (d^3w/dx^3)_0, (d^4w/dx^4)_0$ は，式 (3.1)~(3.4) からわかるように，それぞれ，その点を中心とする 2, 3, 4, 5 点の w の値で表わされている。これらを，もつと多くの点の w の値で表わすと，微分商をよりよく階差商で表わすことができ，従つて，この階差商を用いた階差方程式は，もとの微分方程式をより正確に表わすことになる。その結果，たとえ network があらくても，よりよい結果が得られることになる。この方面の研究は，L. Collatz, 日高博士によつて完成されたので，これを次に列挙しよう。

- $(dw/dx)_0$ 。 図-7 (a) に示す。
- $(d^2w/dx^2)_0$ 。 図-7 (b) に示す。
- $(d^3w/dx^3)_0$ 。 図-7 (c) に示す。
- $(d^4w/dx^4)_0$ 。 図-7 (d) に示す。

図-7

$$12\lambda \frac{dw}{dx} \text{ (a)} \quad \begin{array}{ccccccc} & & 1 & -8 & & 8 & -1 \\ & & \bullet & & \bullet & & \bullet \end{array}$$

$$60\lambda \frac{d^2w}{dx^2} \quad \begin{array}{ccccccc} & & -1 & 9 & -45 & & 45 & -9 & 1 \\ & & \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet \end{array}$$

$$360\lambda \frac{d^3w}{dx^3} \quad \begin{array}{ccccccc} & & -3 & -32 & 168 & -672 & & 672 & -168 & 32 & -3 \\ & & \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet \end{array}$$

$$12\lambda \frac{d^4w}{dx^4} \text{ (b)} \quad \begin{array}{ccccccc} & & -1 & 16 & -32 & 16 & -1 \\ & & \bullet & & \bullet & & \bullet \end{array}$$

$$180\lambda \frac{d^2w}{dx^2} \quad \begin{array}{ccccccc} & & 2 & -27 & 270 & -420 & 270 & -27 & 2 \\ & & \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet \end{array}$$

$$8\lambda \frac{d^3w}{dx^3} \text{ (c)} \quad \begin{array}{ccccccc} & & 1 & -8 & 13 & & -13 & 8 & -1 \\ & & \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet \end{array}$$

$$6\lambda \frac{d^4w}{dx^4} \text{ (d)} \quad \begin{array}{ccccccc} & & -1 & 12 & -32 & 56 & -32 & 12 & -1 \\ & & \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet \end{array}$$

図-8

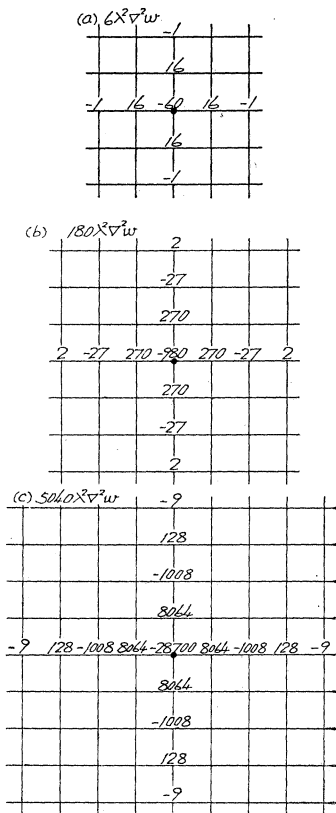
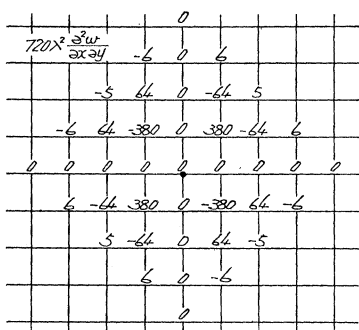


図-9



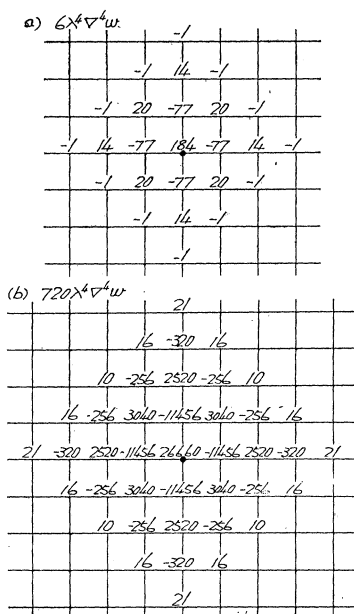
- e) $(\nabla^2 w)$. 図-8 (a), (b), (c) に示す。
- f) $(\partial^2 w / \partial x \partial y)$. 図-9 に示す。
- g) $(\nabla^4 w)$. 図-10 (a), (b) に示す。

【計算例】

a) 両端回転端、断面二次モーメント一定の柱の座屈荷重 基礎となる微分方程式は $EI(d^2y/dx^2) + Py = 0$ で問題は、 $P = k(\pi^2 EI/l^2)$ の係数 k を求めることである。この固有値 k を、普通階差法、高精度階差法で計算すると次表のようである。

正しい値は、 $k = \pi^2 = 9.8696 \div 9.87$ であつて、 $\lambda = 1/3$ でも高精度階差法によれば誤差は1%強である。

図-10



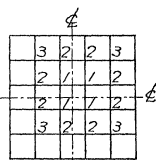
λ	1/3	1/4	1/5
普通	9.00	9.37	9.55
高精度	9.75	9.85	9.853
方程式の数	1	2	2

b) 周辺固定の等方性正方形板の自由タワミ振動の固有値 問題は無次元表示したタワミ曲面の微分方程式

$$\nabla^4 w - kw = 0, \quad k = \rho p^2 a^4 / N$$

を、 $x = \pm 1/2$ で $w = \partial w / \partial x = 0$, $y = \pm 1/2$ で $w = \partial w / \partial y = 0$ の境界条件のもとで k を求めることである。いま基本振動系のみを考えることにする。たとえば図-11のように $\lambda = 1/5$ とし、図のように点を定めて計算する。 λ を変えて計算した結果は、次表のようである。

図-11



λ	未知数	k	k/π^4	誤差(%)
1/4	3	1236.636 3	12.695 3	4.15
1/5	3	1267.179 6	13.008 8	2.15
1/6	6	1279.337 3	13.133 7	1.21
1/7	6	1285.138 6	13.193 2	0.76
1/9	10	1290.186 7	13.245 1	0.38

上述の誤差は、友近博士が解析的に計算した値、 $k/\pi^4 = 13.2948$ に対する誤差である。

この場合は、高精度階差法によつて、周辺固定、 $\lambda = 1/5$ でも比較的正しい値が得られたのであつて、普通階差法で $\lambda = 1/5$ とした計算では、誤差ははるかに大きい。なおこのように λ を順次に小さくして求めた多くの値から正しい値を推定できる。

以上二つの計算例からわかるように、固定の境界条件

の場合には、周辺単純支持の境界条件の場合よりも、network を細かくとらなければならない。

7. Triangular Network による $r^4 w = p/N$ の表示

いままでは rectangular あるいは square network を考えてきたが、triangular network あるいは skew network も考えられる。まず 図-12 に示すような平行四辺形板を triangular network で解くこととし、記号を次のように定める。

$$A = \alpha/\lambda_x, \quad B = \beta/\lambda_x, \quad C = (\lambda_y/\lambda_x)^2 - AB, \\ D = (1-\nu)(C+AB), \quad J = (\lambda_y/\lambda_x)^3 (E_1 I_1 / \lambda_x N)$$

triangular network による $r^4 w = p/N$ の表示を述べよう。

図-12

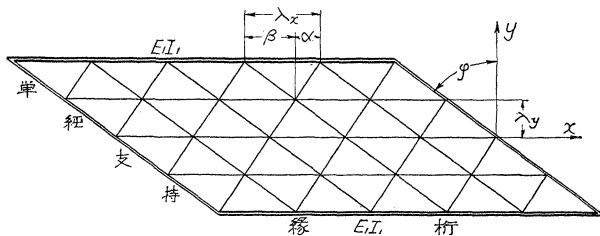


図-13

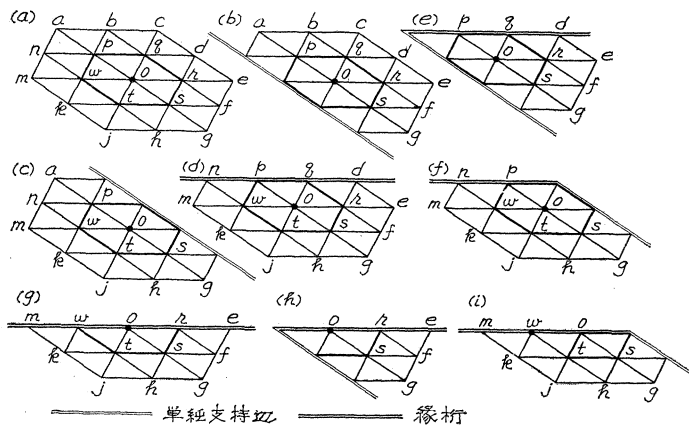


図-13 のような triangular network を用いることにすれば次のようになる。なお p は板に作用する分布荷重、 q は縁桁に作用する線荷重である。

a) 一般の内点 (図-13(a))

$$p_0 \lambda_y^4 / N = 2 w_0 (2 + A^2 + B^2 + 3 C^2 + 4 C) - 2 (w_p + w_s) \cdot \\ (2 A + 2 AC - BC) - 2 (w_q + w_t) \cdot \\ (2 B + 2 BC - AC) - 2 (w_r + w_w) (2 C + 2 C^2 - AB) \\ + (w_a + w_g) A^2 + (w_c + w_j) B^2 + (w_e + w_m) C^2 \\ + 2 (w_b + w_h) AB + 2 (w_d + w_k) BC + 2 (w_f + w_n) AC \\ \dots \dots \dots (7.1)$$

b) 左の単純支持斜辺に隣接する内点 (図-13(b))

$$p_0 \lambda_y^4 / N = w_0 (4 + 2 A^2 + B^2 + 8 C + 5 C^2) - (w_p + w_s) \cdot \\ (4 A + 4 AC - BC) - 2 w_q (2 B + 2 BC - AC) \\ - 2 w_r (2 C + 2 C^2 - AB) + (w_a + w_g) A^2 + w_c \cdot B^2 \\ + w_e \cdot C^2 + 2 w_b \cdot AB + 2 w_d \cdot BC + 2 w_f \cdot AC \dots (7.2)$$

c) 右の単純支持斜辺に隣接する内点 (図-13(c))

$$p_0 \lambda_y^4 / N = w_0 (4 + 2 A^2 + B^2 + 8 C + 5 C^2) - (w_p + w_s) \cdot \\ (4 A + 4 AC - BC) - 2 w_t (2 B + 2 BC - AC) - 2 w_w \cdot \\ (2 C + 2 C^2 - AB) + (w_a + w_g) A^2 + w_j \cdot B^2 + w_m \cdot C^2 \\ + 2 w_h \cdot AB + 2 w_k \cdot BC + 2 w_n \cdot AC \dots \dots \dots (7.3)$$

d) 縁桁に隣接する内点 (図-13(d))

$$p_0 \lambda_y^4 / N = w_0 (4 + A^2 + B^2 + 8 C + 6 C^2) - w_p (2 A + 2 AC \\ + 2 AD - BC - BD) - w_q (2 B + 2 BC + 2 BD - AC \\ - AD) - (w_r + w_w) (4 C + 4 C^2 - AB) - 2 w_t (2 B \\ + 2 BC - AC) - 2 w_s (2 A + 2 AC - BC) + w_n (AC + \\ AD) + w_d (BC + BD) + (w_e + w_m) C^2 \\ + 2 w_f \cdot AC + w_g \cdot A^2 + 2 w_h \cdot AB \\ + w_r \cdot B^2 + 2 w_k \cdot BC \dots \dots \dots (7.4)$$

e) 鋭角隅部の内点 (図-13(e))

$$p_0 \lambda_y^4 / N = w_0 (4 + A^2 + 8 C + 5 C^2) \\ - w_p (2 A + 2 AC + 2 AD - BD) \\ - w_q (2 B + 2 BC + 2 BD - AC - AD) \\ - w_r (4 C + 4 C^2 - AB) - w_s (4 A \\ + 4 AC - BC) + w_d (BC + BD) \\ + w_e \cdot C^2 + 2 w_f \cdot AC + w_g \cdot A^2 \dots (7.5)$$

f) 鈍角隅部の内点 (図-13(f))

$$p_0 \lambda_y^4 / N = w_0 (4 + A^2 + B^2 + 8 C + 5 C^2) \\ - w_w (4 C + 4 C^2 - AB) - w_p (2 A \\ + 2 AC + 2 AD - BC) - 2 w_t (2 B \\ + 2 BC - AC) - w_s (4 A + 4 AC \\ - BC) + w_g \cdot A^2 + 2 w_h \cdot AB + w_j \cdot B^2 \\ + 2 w_k \cdot BC + w_m \cdot C^2 + w_n (AC + AD) \\ \dots \dots \dots (7.6)$$

g) 一般の縁点 (図-13(g))

$$(q_0 \lambda_y^3 / N) + (p_0 \lambda_y^4 / 2 N) = w_0 (A^2 + B^2 \\ + 4 D + 6 CD + 6 J - 3 D^2) - (w_w \\ + w_r) (2 D + 4 CD + 4 J - 2 D^2 - AB) \\ - w_t (2 B + 2 BC + 2 BD - AC - AD) - w_s (2 A \\ + 2 AC + 2 AD - BC - BD) + (w_e + w_m) (CD + J \\ - 0.5 D^2) + w_f (AC + AD) + w_g \cdot A^2 + 2 w_h \cdot AB \\ + w_j \cdot B^2 + w_k (BC + BD) \dots \dots \dots (7.7)$$

h) 鋭角隅部の縁点 (図-13(h))

$$(q_0 \lambda_y^3 / N) + (p_0 \lambda_y^4 / 2 N) = w_0 (A^2 + 4 D + 5 CD \\ + 5 J - 2.5 D^2 - BD) - w_r (2 D + 4 CD + 4 J - 2 D^2 \\ - AB) + w_e (CD + J - 0.5 D^2) - w_s (2 A + 2 AC \\ + 2 AD - BD) + w_f (AC + AD) + w_g \cdot A^2 \dots (7.8)$$

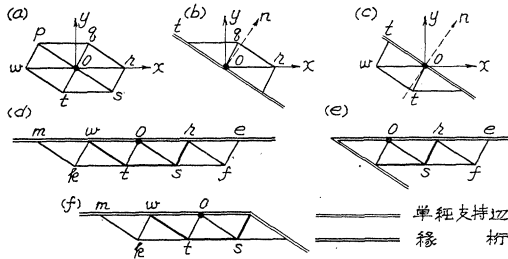
i) 鈍角隅部の縁点 (図-13(i))

$$(q_0 \lambda_y^3 / N) + (p_0 \lambda_y^4 / 2 N) = w_0 (A^2 + B^2 + 4 D + 5 CD$$

$$\begin{aligned}
 &+5J+BD-2.5D^2-w_w(2D+4CD+4J-2D^2 \\
 &-AB)-w_s(2A+2AC+2AD-BC)-w_t(2B \\
 &+2BC+2BD-AC-AD)+w_o \cdot A^2+2w_h \cdot AB \\
 &+w_j \cdot B^2+w_k(BC+BD)+w_m(CD+J-0.5D^2) \\
 &\dots\dots\dots(7.9)
 \end{aligned}$$

w がきまると, M_x, M_y, M_{xy} は次式によつて計算できる。

図-14



a) 一般の内点 (図-14 (a) 参照)

$$\begin{aligned}
 (M_x)_0 &= -(N/\lambda_y^2) [(D+\nu C)(w_w-2w_o+w_r) \\
 &+ \nu A(w_p-2w_o+w_s) + \nu B(w_q-2w_o+w_t)] \\
 (M_y)_0 &= -(N/\lambda_y^2) [(C-D)(w_w-2w_o+w_r) \\
 &+ A(w_p-2w_o+w_s) + B(w_q-2w_o+w_t)] \\
 (M_{xy})_0 &= -\{(1-\nu)N/2\lambda_x\lambda_y\} [(w_q+w_t-w_p \\
 &-w_s) + (B-A)(w_w-2w_o+w_r)] \\
 &\dots\dots\dots(7.10)
 \end{aligned}$$

b) 左の単純支持辺上の点 (図-14 (b))

$$\begin{aligned}
 (M_x)_0 &= -(M_y)_0 = \{(1-\nu)N/\lambda_x\lambda_y\} (w_q-w_r) \sin 2\varphi \\
 (M_{xy})_0 &= \{(1-\nu)N/\lambda_x\lambda_y\} (w_r-w_q) \cos 2\varphi \\
 (M_{\max})_0 &= -(M_{\min})_0 = (M_{nt})_0 \\
 &= \{(1-\nu)N/\lambda_x\lambda_y\} (w_r-w_q) \\
 &\dots\dots\dots(7.11)
 \end{aligned}$$

c) 右の単純支持辺上の点 (図-14 (c))

$$\begin{aligned}
 (M_x)_0 &= -(M_y)_0 = \{(1-\nu)N/\lambda_x\lambda_y\} (w_t-w_w) \sin 2\varphi \\
 (M_{xy})_0 &= \{(1-\nu)N/\lambda_x\lambda_y\} (w_w-w_t) \cos 2\varphi \\
 (M_{\max})_0 &= -(M_{\min})_0 = (M_{nt})_0 \\
 &= \{(1-\nu)N/\lambda_x\lambda_y\} (w_w-w_t) \\
 &\dots\dots\dots(7.12)
 \end{aligned}$$

d) 縁桁上的一般点 (図-14 (d))

$$\begin{aligned}
 (M_x)_0 &= -\{(1-\nu^2)N/\lambda_x^2\} (w_w-w_o+w_r) \\
 (M_y)_0 &= 0 \\
 (M_{curb})_0 &= -(E_1 I_1 / \lambda_x^2) (w_w-2w_o+w_r) \\
 (M_{xy})_0 &= -\{(1-\nu)N/4\lambda_x\lambda_y\} [2(1+C-D)(w_r \\
 &-w_w) + 2A(w_t-w_f) + 2B(w_k-w_s) + (D-C) \\
 &(w_e-w_m)] \\
 &\dots\dots\dots(7.13)
 \end{aligned}$$

e) 鋭角隅部の縁桁上の点 (図-14 (e))

$$\begin{aligned}
 (M_x)_0 &= \{(1-\nu^2)N/\lambda_x^2\} (2w_o-w_r) \\
 (M_y)_0 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (M_{curb})_0 &= (E_1 I_1 / \lambda_x^2) (2w_o-w_r) \\
 (M_{xy})_0 &= -\{(1-\nu)N/4\lambda_x\lambda_y\} [2w_r-2A \cdot w_f-2B \cdot \\
 &(w_o+w_s) + (D-C)(w_o-2w_r+w_e)] \\
 &\dots\dots\dots(7.14)
 \end{aligned}$$

f) 鈍角隅部の縁桁上の点 (図-14 (f))

$$\begin{aligned}
 (M_x)_0 &= -\{(1-\nu^2)N/\lambda_x^2\} (w_w-2w_o) \\
 (M_y)_0 &= 0 \\
 (M_{curb})_0 &= -(E_1 I_1 / \lambda_x^2) (w_w-2w_o) \\
 (M_{xy})_0 &= \{(1-\nu)N/4\lambda_x\lambda_y\} [2w_w-2A \cdot w_t+2B \cdot \\
 &(w_s-w_k) + (D-C)(w_m-2w_w+w_o)] \\
 &\dots\dots\dots(7.15)
 \end{aligned}$$

以上は任意の triangular network の場合であるが, 正三角形の network の場合には, 式の形が非常に簡単になり, 図-13 のおのおのの場合に対して次のようになる。

a) 一般の内点 (図-13 (a)), (図-15 (a))

$$\begin{aligned}
 (4p_o \lambda_y^4 / N) &= 42w_o - 10(w_p+w_q+w_r+w_s+w_t+w_w) \\
 &+ 2(w_b+w_d+w_f+w_h+w_k+w_n) + (w_a+w_c+w_e \\
 &+ w_g+w_j+w_m) \dots\dots\dots(7.16)
 \end{aligned}$$

b) 左の単純支持斜辺に隣接する内点 (図-13 (b)), (図-15 (b))

$$\begin{aligned}
 (4p_o \lambda_y^4 / N) &= 40w_o - 11(w_p+w_s) - 10(w_q+w_r) \\
 &+ 2(w_b+w_d+w_f) + (w_a+w_c+w_e+w_g) \dots(7.17)
 \end{aligned}$$

c) 右の単純支持斜辺に隣接する内点 (図-13 (c)), (図-15 (c))

$$\begin{aligned}
 (4p_o \lambda_y^4 / N) &= 40w_o - 11(w_p+w_s) - 10(w_w+w_t) \\
 &+ 2(w_h+w_k+w_n) + (w_d+w_g+w_j+w_m) \dots(7.18)
 \end{aligned}$$

d) 縁桁に隣接する内点 (図-13 (d)), (図-15 (d))

$$\begin{aligned}
 (4p_o \lambda_y^4 / N) &= 40w_o - 11(w_w+w_r) - (13-3\nu) \cdot \\
 &(w_p+w_q) / 2 - 10(w_s+w_t) + (5-3\nu)(w_d+w_n) / 2 \\
 &+ 2(w_f+w_h+w_k) + (w_e+w_g+w_j+w_m) \dots(7.19)
 \end{aligned}$$

e) 鋭角隅部の内点 (図-13 (e)), (図-15 (e))

$$\begin{aligned}
 (4p_o \lambda_y^4 / N) &= 38w_o - (15-3\nu)w_p / 2 - (13-3\nu) \cdot \\
 &w_q / 2 - 11(w_r+w_s) + (5-3\nu)w_d / 2 + 2w_f+w_e+w_g \\
 &\dots\dots\dots(7.20)
 \end{aligned}$$

f) 鈍角隅部の内点 (図-13 (f)), (図-15 (f))

$$\begin{aligned}
 (4p_o \lambda_y^4 / N) &= 39w_o - (8-3\nu)w_p - 11(w_s+w_w) \\
 &- 10w_t + 2(w_h+w_k) + w_g+w_j+w_m + (5-3\nu)w_n / 2 \\
 &\dots\dots\dots(7.21)
 \end{aligned}$$

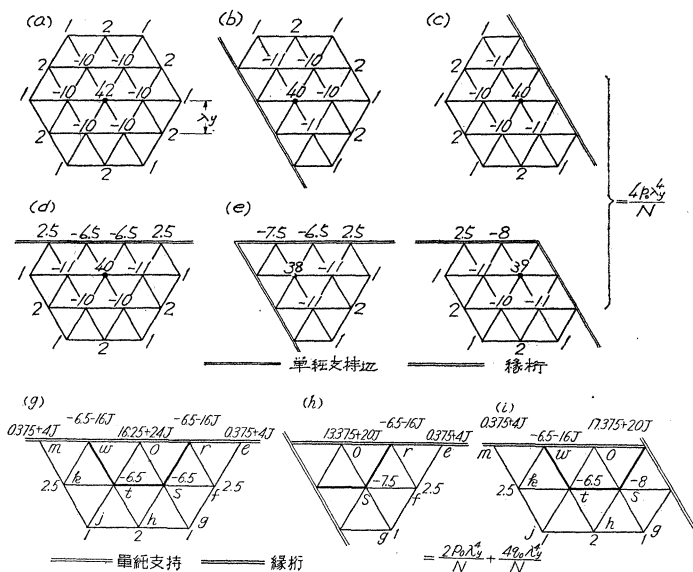
g) 一般の縁点 (図-13 (g)), (図-15 (g))

$$\begin{aligned}
 (2p_o \lambda_y^4 / N) + (4q_o \lambda_y^3 / N) &= \{2+21(1-\nu)-4.75 \cdot \\
 &(1-\nu^2) + 24J\}w_o - \{12(1-\nu)-4.5(1-\nu)^2 \\
 &+ 16J-1\}(w_w+w_r) + \{1.5(1-\nu)+4J-1.125 \cdot \\
 &(1-\nu)^2\}(w_e+w_m) - (13-3\nu)(w_t+w_s) / 2 \\
 &+ 2w_h + (5-3\nu)(w_f+w_k) / 2 + w_g+w_j \dots(7.22)
 \end{aligned}$$

h) 鋭角隅部の縁点 (図-13 (h)), (図-15 (h))

$$(2p_o \lambda_y^4 / N) + (4q_o \lambda_y^3 / N) = \{18(1-\nu) - (45/8) \cdot$$

図-15



$$(1-\nu)^2 + 20J + 1]w_o - \{12(1-\nu) - 4.5(1-\nu)^2 + 16J - 1\}w_r + \{1.5(1-\nu) - (9/8)(1-\nu)^2 + 4J\}w_e - \{6 + 1.5(1-\nu)\}w_s + \{1 + 1.5(1-\nu)\}w_f + w_g \dots (7.23)$$

(i) 鈍角隅部の縁点 (図-13(i), 図-15(i))

$$(2p_o \lambda_y^4 / N) + (4q_o \lambda_y^3 / N) = \{2 + 21(1-\nu) - (45/8) \cdot (1-\nu)^2 + 20J\}w_o - \{12(1-\nu) - 4.5(1-\nu)^2 + 16J - 1\}w_w - \{5 + 3(1-\nu)\}w_s - \{5 + 1.5(1-\nu)\}w_t + \{1 + 1.5(1-\nu)\}w_k + \{1.5(1-\nu) - (9/8)(1-\nu)^2 + 4J\}w_m + 2w_h + w_g + w_j \dots (7.24)$$

この係数の若干を、図-15 に示す。ただし、 $\nu=0$ と仮定してある。

また、曲げモーメントは次式によつて求められる。

$$\left. \begin{aligned} (M_x)_o &= -(M_y)_o = \\ & \{3(1-\nu) N / 4 \lambda_y^2\} (w_q - w_r) \\ (M_{xy})_o &= (M_y)_o / \sqrt{3} \\ & \dots \dots \dots (7.26) \end{aligned} \right\}$$

c) 右の単純支持辺上の点 (隅角部を除く, 図-16(c))

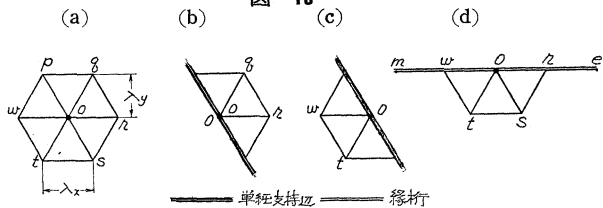
$$\left. \begin{aligned} (M_x)_o &= -(M_y)_o \\ & = \{3(1-\nu) N / 4 \lambda_y^2\} (w_t - w_w) \\ (M_{xy})_o &= (M_y)_o / \sqrt{3} \\ & \dots \dots \dots (7.27) \end{aligned} \right\}$$

d) 縁桁上の点 (図-16(d))

$$\left. \begin{aligned} (M_x)_o &= \{3(1-\nu^2) N / 4 \lambda_y^2\} \cdot \\ & (2w_o - w_w - w_r) \\ (M_y)_o &= 0 \\ (M_{xy})_o &= \{1/\sqrt{3}(1-\nu) N / 32 \lambda_y^2\} \cdot \\ & \{(1+3\nu)(w_e - w_m) + 2(5+3\nu) \\ & (w_w - w_r) + 16(w_s - w_t)\} \\ & \dots \dots \dots (7.28) \end{aligned} \right\}$$

V.P. Jensen は、斜角 30°, 45°, 60°, (幅員)/(長さ) が 1/2 で、二斜辺で単純支持され、他の二辺で自由である平行四辺形板に、等分布荷重が満載される場合の解析を行つている。この研究には単一の集中荷重が作用する場合が含まれておらず、斜桁橋の支点近くの床板の計算には不十分である。この点にかんがみ、成岡と永井は、周辺単純支持の平行四辺形板について、斜角 30°, 45°, 60° の三つの場合に対して、曲げモーメントおよびタワミの影響係数を求め、これを利用して、斜桁橋に第一等橋の設計荷重・輪荷重 1 コが作用する場合の斜辺近くの床板の曲げモーメントが斜角によつてどんなにかかわるかを詳細にしらべた。この計算には継電器式の Facom-128 が使用された。この論文は Bauingenieur に近く掲載されるはずである。

図-16

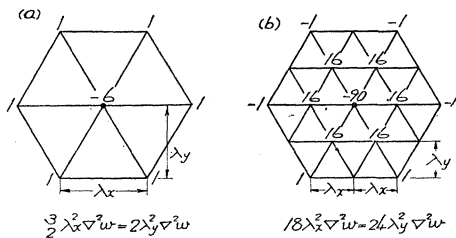


a) 一般の内点 (図-16(a))

$$\left. \begin{aligned} (M_x)_o &= (N/4 \lambda_y^2) \{6(1+\nu)w_o - (3-\nu)(w_w + w_r) \\ & - 2\nu(w_p + w_q + w_s + w_t)\} \\ (M_y)_o &= (N/4 \lambda_y^2) \{6(1+\nu)w_o + (1-3\nu)(w_w + w_r) \\ & - 2(w_p + w_q + w_s + w_t)\} \\ (M_{xy})_o &= \{1/\sqrt{3}(1-\nu) N / 4 \lambda_y^2\} (w_p + w_s - w_q - w_t) \\ & \dots \dots \dots (7.25) \end{aligned} \right\}$$

b) 左の単純支持辺上の点 (隅部を除く, 図-16(b))

図-17



ついでに、図-17 に $r^2 w$ の正三角形の network による表示を示す。(a) は基本的なもの、(b) は高精度のものを示す。

8. Skew Network による $r^2 w = p/N$ の表示

Illinois 大学の N.M. Newmark 教授は、スラブを有

する直桁橋 (right slab-and I beam bridge) を、可撓性のハリで与えられた等方性連続矩形板とみなして解析的に解き、多くの場合の影響係数を算出し、直桁橋の解析に多くの貢献をした。また直桁橋は直交異方性板理論によつて解くことができる。しかし斜桁橋の解析については、今日までみるべきものがなかつたといつてもさしつかえない。しかし最近における electronic computer のめざましい発達にもない、階差法による計算が容易となつたので斜桁橋も解きうるようになった。すなわち N.M. Newmark 教授は、 $v^4 w = p/N$ を、**図-18**

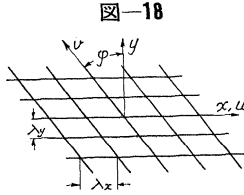
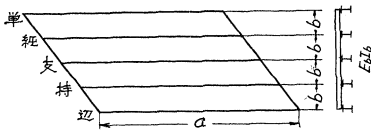
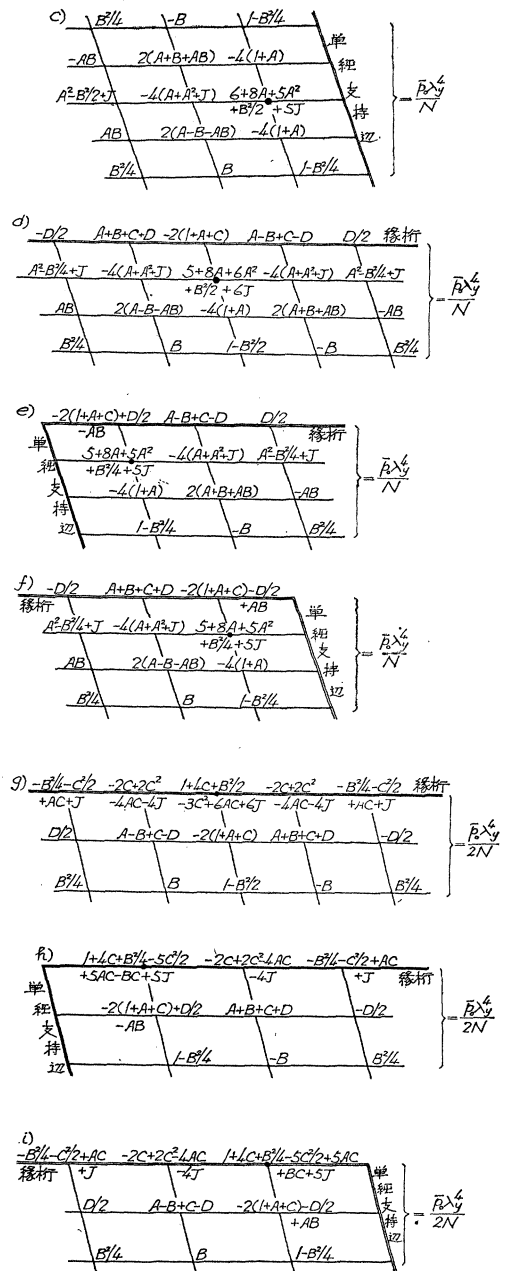
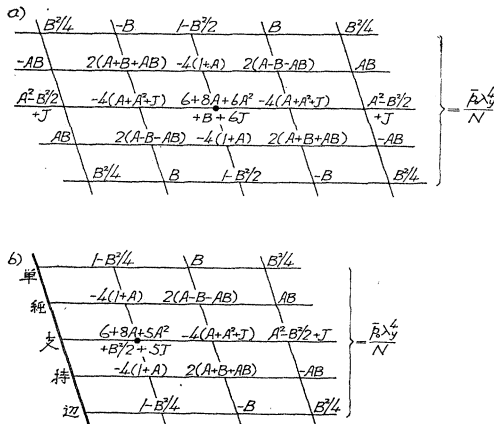


図-19



のような skew network で表わすことを試み、**図-19** のような曲げゴワサ $E_b I_b$ の等しい5本の主桁の斜桁橋を、 $b/a=0.1, 0.2$; $H=1, 2, 5, 10$, $\varphi=30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ の場合について解いて、床板の曲げモーメント、桁のタワミ、曲げモーメントの影響係数を求めている。計算には ILLIAC (Univ. of Illinois Automatic Computer) で行ない、32元と31元の対称マトリックスの逆マトリックスを計算したものである。階差式の誘導は省略し、結果のみを示す。さきの triangular network の場合と同様に、一般の内点、左(右)の単純支持辺に隣接する内点、縁桁に隣接する内点、左右の単純支持斜辺と縁桁に隣接する内点、縁桁上の点、左(右)の単純支持辺に隣接し、かつ縁桁上にある点に対するものを**図-20**に示す。

図-20



ただし、多くの符号が用いられているが、その内容は次のようである (q : 線荷重, P : 集中荷重)。

$$K = \lambda_y / \lambda_x, \quad B = K \tan \varphi, \quad A = B^2 + K^2 = K^2 / \cos^2 \varphi$$

$$C = (1 - \nu) K^2, \quad D = (A + C) B, \quad J = K^4 (E_b I_b / N \lambda_y)$$

$$\bar{I}_0 = p_0 + (q_0 / \lambda_y) + (P_0 / \lambda_x \lambda_y) = p_0 + (q_0 / \lambda_y) + (K P_0 / \lambda_y^2)$$

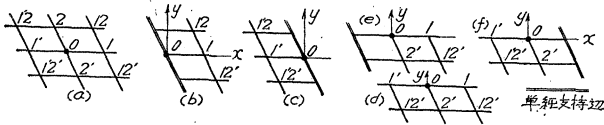
(0 が一般の内点の場合)

$$\bar{I}_0 = p_0 + (q_0 / 0.5 \lambda_y) + (P_0 / 0.5 \lambda_x \lambda_y) = p_0 + (2 q_0 / \lambda_y)$$

+ (2 K P_0 / \lambda_y^2) (0 が縁桁上の点の場合)

もし、注目する点が **図-19** に示す主桁上でない場合には、 $J=0$ とすればよい。

図-21



これらの階差方程式を解いて、 w が得られる。この w から、床板の曲げモーメント、ハリの曲げモーメントが次式によつて計算できる。

a) 床板の曲げモーメント

i) 一般の内点 (図-21 (a)) :

$$\left. \begin{aligned} (M_x)_0 &= -N\{(K^2 + \nu B^2)(w_1' - 2w_0 + w_1) \\ &\quad + \nu(w_2 - 2w_0 + w_2') + 0.5\nu B(-w_1' \\ &\quad + w_{12} + w_1' - w_{12}')\}/\lambda y^2 \\ (M_y)_0 &= -N\{(B^2 + \nu K^2)(w_1' - 2w_0 + w_1) \\ &\quad + (w_2 - 2w_0 + w_2') + 0.5B(-w_1' \\ &\quad + w_{12} + w_1' - w_{12}')\}/\lambda y^2 \\ (M_{xy})_0 &= -NC\{B(w_1' - 2w_0 + w_1) + 0.25\cdot \\ &\quad (-w_1' + w_{12} + w_1' - w_{12}')\}/K\lambda y^2 \end{aligned} \right\} (8.10)$$

ii) 左の単純支持辺上の点 (図-21 (b)) :

$$\left. \begin{aligned} (M_x)_0 &= -(M_y)_0 = -NC \sin 2\varphi (w_{12}' - w_{12})/2K\lambda y^2 \\ (M_{xy})_0 &= NC \cos 2\varphi (w_{12}' - w_{12})/2K\lambda y^2 \end{aligned} \right\} (8.11)$$

iii) 右の単純支持辺上の点 (図-21 (c)) :

$$\left. \begin{aligned} (M_x)_0 &= -(M_y)_0 = -NC \sin 2\varphi (w_{12}' - w_{12}')/2K\lambda y^2 \\ (M_{xy})_0 &= NC \cos 2\varphi (w_{12}' - w_{12}')/2K\lambda y^2 \end{aligned} \right\} (8.12)$$

iv) 縁桁上の一般点 (図-21 (d)) :

$$\left. \begin{aligned} (M_x)_0 &= -(1 - \nu^2)NK^2(w_1' - 2w_0 + w_1)/\lambda y^2 \\ (M_y)_0 &= 0 \\ (M_{xy})_0 &= -NC\{B(w_1' - 2w_0 + w_1) + 0.5\cdot \\ &\quad (-w_1' + w_1 + w_1' - w_{12}')\}/K\lambda y^2 \end{aligned} \right\} (8.13)$$

v) 左の単純支持辺に隣接する縁桁上の点 (図-21 (e)) :

$$\left. \begin{aligned} (M_x)_0 &= -(1 - \nu^2)NK^2(-2w_0 + w_1)/\lambda y^2 \\ (M_y)_0 &= 0 \\ (M_{xy})_0 &= -NC\{B(-2w_0 + w_1) + 0.5\cdot \\ &\quad (w_1 - w_{12}')\}/K\lambda y^2 \end{aligned} \right\} \dots (8.14)$$

vi) 右の単純支持辺に隣接する縁桁上の点 (図-21 (f)) :

$$\left. \begin{aligned} (M_x)_0 &= -(1 - \nu^2)NK^2(-2w_0 + w_1')/\lambda y^2 \\ (M_y)_0 &= 0 \\ (M_{xy})_0 &= -NC\{B(w_1' - 2w_0) + 0.5\cdot \\ &\quad (-w_1' + w_1' - w_{12}')\}/K\lambda y^2 \end{aligned} \right\} \dots (8.15)$$

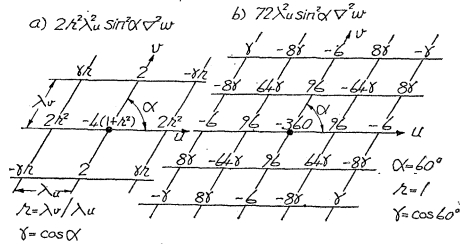
b) 桁の曲げモーメント

一般の内点 0 が桁上にくる場合には、

$$(M_b)_0 = -K^2 E_b I_b (w_1' - 2w_0 + w_1)/\lambda y^2 \dots (8.16)$$

以上は、 $\nu'w$ を問題としたが、 ν^2w の skew network による表示は、図-22 のようである。ただし、(a) は普通階差式であり、(b) は高精度階差式である。

図-22



9. 直交異方性板のタワミ曲面の微分方程式の Skew Network による表示

さきに述べたように、直交異方性板理論が直桁橋の解析に有効な手段であることが一般に認められているので、斜単桁橋を、直交異方性である平行四辺形板(相対する二斜辺で単純支持され、他の二辺で自由)と考えることができる。成岡と米沢は、このような考え方のもとに、rectangular network を用いて、ごく単純な載荷状態について、階差法による計算を行つた(Bauing., 32 (1957), S. 391)。しかし、平行四辺形板では、やはり skew network を用いることが好ましい。成岡、大村、西島、深田らは、直交異方性板のタワミ曲面の微分方程式

$$B_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + B_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p$$

を、 $\kappa = H/\sqrt{B_x B_y} = 1$ および $0 \leq \kappa < 1$ の場合において skew network により表示することを試み、上述の 9 つの場合に対する階差式を得た。また、これを用いて、種々の κ 、 $K = \lambda_y/\lambda_x$ 、 φ 、 B_x/B_y の場合に対して、タワミおよび曲げモーメントの影響係数を electronic computer で計算し、一般の直交異方性である平行四辺形板の解析および斜桁橋の設計に寄与しようとしている。階差式の詳細は紙数の都合で省略する。

10. むすび

構造力学における階差法の応用を、主として、板の場合について述べた。階差法による解法は、結局、連立多元一次方程式の解法に帰する。この点については、最近種々の解法が提案されており、Crout 法、簡略 Doolittle 法、平方根法、共役傾斜法などがおもなものである。これらについては、森口繁一・高田 勝：数値計算法、岩波講座、現代応用数学第 13 巻を参照されたい。

紙数の関係で、文献を省略したが、これについては他の機会に述べることにする。