

構造力学 (III)

曲面構造

横 尾 義 貫*

1. 緒 言

曲面構造は、円筒や球面その他いろいろな形状の曲面、あるいはその部分を探つて構造体の形としたものである。このような構造では、ちょうどアーチの場合のように、曲げモーメントが直応力にくらべて非常に小さいので、断面内の応力分布が板厚方向には一様に近くなり、断面の利用効率が非常に高いものである。したがって土木工学、建築工学、機械工学等いろいろな分野にその応用例を見出すことができる。例えば建築工学では、最近流行の、さまざまな形をした曲面屋根、土木工学の分野ではタンク、サイロさらに大きなものではアーチダム等もその例である。最近注目を浴びている原子炉の圧力容器、巨大な包容構造物もまた曲面構造である。

曲面構造は近代的構造として世人の注目を浴びていることは周知のとおりであるが、実はその原理は古くから知られていた。ローマ時代に始められたドームやヴォールトにさかのぼることができる。ヨーロッパでは古くから石、レンガが主要な構造材料であつて、いわゆるメーソンリー構造が発達したのであるが、この構造は引張りや曲げに対してはきわめて無力であるので、ハリとして用いることがむずかしいために、その必然的な結果としてアーチや曲面構造が発達したのである。古来の名建築・名橋に驚くほど大胆かつ巧妙な、それらの多くの例を見ることができる。近代の曲面構造はこの長い歴史に根ざした原理の理解を培養基として育つたものといふことができよう。

さて近代に至り鉄筋コンクリートが発明され、発展した結果、いままでのメーソンリーではただ積み重ねられた石であつたのが、あたかも「溶けた石」のように一体化して、さらに引張りや曲げにも耐える能力が得られたのである。おまけに鉄筋コンクリート構造は型鋼のように直材として生産されるものでなく、キャストして造られるので、さまざまな形態を自由にとることができる特色をもっている。曲面構造は鉄筋コンクリートのこれらの特色に適合したのとして近年非常な発達を見せ、大スパンをやすやすと架け渡すことができるようになつ

た。またメーソンリーの場合と異なり、引張り、曲げにも耐えるので、驚くほど薄肉となり、殻構造(英名 Shell, 独名 Schale)や膜構造(仏名 Uoile mince)等ともよばれているわけである。

近代の曲面構造の発展を促したのは、上に述べたように一つには古いメーソンリー構造以来の原理的な理解と、鉄筋コンクリートの特性とによるものであるが、もつとも大きな要素としては曲面構造理論の発達である。古い時代の構造技術者達は、原理的理解をもつていたとはいえ、それは経験と直感にもとづくものであつた(これはいまなお尊重すべきであるが)。近代の技術者は理論を武器として曲面構造を発展させたのである。曲面構造の理論は、まず1828年の G. Lamé および E. Clapeyron の円筒曲面についての薄膜理論によつてその端緒が開かれた。ついで重要な貢献をしたのは、前世紀末に現われた A.E. Love の名著“*A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*”に示された曲げ理論の展開である。

鉄筋コンクリート構造の発展により、曲面屋根が出現したのは、これらの諸理論よりはるかに早く、1920年代に入つてからであつた。Love によりすでに曲面構造の基礎的理論はほとんど完全に近く展開されていたのであるが、それはあまりに数理論であり、工学的に応用するにはなお多くの工夫が必要であり、工学的曲面理論が展開され始めたのはやはりこの頃であつた。その最初のものとして Zeiss-Didag 屋根(円筒屋根の一形式)を生んだ Dischinger および Finsterwalder による円筒曲面の曲げ理論があげられる。円筒曲面屋根はとくに薄膜理論では実状にほど遠く、どうしても曲げ理論の助けによらなければ正確なものをえられないので、その後も実用理論の研究が最近に至るまで盛んに行われ、現在では ASCE の数表による計算法等も現われている。

また球面、円筒タンク、円錐面等のような回転曲面の曲げ理論も十分研究され、実用的な段階に入つている。さらに任意形の曲面を解析するにはまず一般理論を立てる必要がある。近年ではこの方面の研究がつかまれ、Pucher の一般薄膜理論、Green および Zerna 等による一般曲げ理論等、その基礎理論は完成の域に達している。けれどもこれらの個々の場合を解析するには、多くの困難さが残されており、近似化の工夫や、数値計算法の展開の努力が必要である。

最近では曲面構造についても塑性解析の研究に手がつけられているが、むしろこれからの問題である。一方曲面構造については、設計の手段として模型実験がさかんに行われているのも注目すべきことであろう。解析の困難さをカバーする意味から、また鉄筋コンクリートという非均質な材料を用いるので、弾性理論にもとづいた解法の結果を吟味する意味から行われている。

* 正員 工博 京都大学教授, 防災研究所

2. 定 義

曲面構造 板厚がその他の寸法にくらべて十分な小さい薄肉曲面構造。

中心面 板厚を二等分する曲面。

断面力 壁板すなわち荷重, 断面力がその中心面に作用する平板の断面力と, 床板すなわち荷重が板面に鉛直に働らく平板の断面力の両種が同時に存在する。いま曲面が φ, θ をパラメーターとする直交曲線群で生成されているものとするとき, φ -曲線 ($\theta = \text{const.}$) および θ -曲線 ($\varphi = \text{const.}$) を含む断面に生ずる断面力としては次のごときものが考えられる。

面内力 (壁板系断面力)

直応力 N_φ, N_θ ; 面内せん断力 $N_{\varphi\theta}, N_{\theta\varphi}$

曲げ力 (床板系断面力)

曲げモーメント M_φ, M_θ ; ねじりモーメント $M_{\varphi\theta}, M_{\theta\varphi}$

横せん断力 Q_φ, Q_θ

厳密には曲面構造では $N_{\varphi\theta} \neq N_{\theta\varphi}$ および $M_{\varphi\theta} \neq M_{\theta\varphi}$ であるが, 十分近似的に $N_{\varphi\theta} = N_{\theta\varphi}$, $M_{\varphi\theta} = M_{\theta\varphi}$ とすることができる。

薄膜理論 曲面構造の断面応力は板厚方向にはほぼ一様に分布するのが特色である。いいかえれば上述の面内力が曲げ力にくらべて卓越している。そこで曲げ力を全く無視して面内力だけが作用するものと仮定した近似理論である。この理論では円筒曲面のような単曲面を屋根に用いた場合等はかなり実状と異なるが, 複曲面では第一次の応力見積りとして相当有効である。

曲げ理論 面内力, 曲げ力をともに考慮した厳密な理論である。一般に右边を荷重項とする8階の微分方程式となる。この一般解は二つの特解と, 荷重項を0とした式の解との和であるが, 前者は同じ荷重による薄膜理論解で近似的に代用するのが普通である。後者は周辺にある力あるいは変位を加えた状態を表わしている。しばしば周辺に特定の力を作用させた場合をあらかじめ解いておき, ラーメン解法における応力法に似た手法が用いられる。

3. 薄膜理論

薄膜理論 (Membran Theory) は前にも述べたように曲げ力を無視した曲面の近似理論である。いまここでは曲面として最もよく用いられる回転曲面 (円筒, 球面, 円錐面等) として記述を進めてゆこう。そして記号を下記のように定める (図-1 参照)。

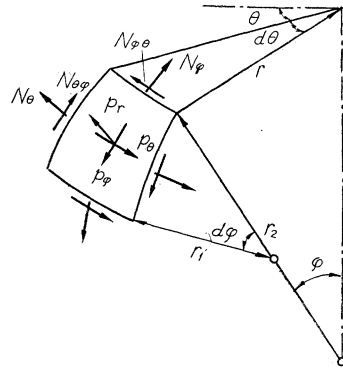
φ : 回転軸と曲面の法線との挟角

θ : 経線を含む平面の基準位置からの角

r : 緯円の半径

r_1 : 経線の曲率半径

図-1



r_2 : 緯円の切線をふくむ直截口の曲率半径 (法線の軸との交点までの長さ一致)

p_r, p_θ, p_φ : 荷重 (中心面の単位面積につき) の法線, 緯円, 経線方向成分

t : 板厚

u, v, w : 中心面上の点の緯円, 経線, 法線方向の変位成分

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = f', \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi} = f''$$

断面力は経線および緯円をふくむ断面に関しては, N_θ, N_φ および $N_{\varphi\theta} = N_{\theta\varphi}$ の三成分からなる。曲面上に微小片を切り出し, その釣合式をたてると, 次のような3コの釣合条件式が作られる。

$$\left. \begin{aligned} (rN_\varphi)' + r_1 N_{\varphi\theta} \varphi' - r_1 N_\theta \cos \varphi + p_\varphi r r_1 &= 0 \\ (rN_{\varphi\theta})' + r_1 N_\theta \varphi' + r_1 N_{\varphi\theta} \cos \varphi + p_\theta r r_1 &= 0 \\ \frac{N_\varphi}{r_1} + \frac{N_\theta}{r_2} &= p_r \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

断面力の三成分は, この3コの釣合条件式から定められるわけで, とくに適合条件を考慮する必要がない。このことは, トラスになぞらえれば, 内的に静定なトラスに相当するものだといえる。曲げ理論では後述するように適合条件をも考慮しなければ曲面の断面力は定まつてこない。この場合は内的に不静定なトラスに似ている。

さて荷重を θ についてフーリエ展開し, その n 項を

$$\left. \begin{aligned} p_\varphi &= p_{\varphi n} \cos n\theta, \quad p_\theta = p_{\theta n} \sin n\theta, \\ p_r &= p_{rn} \cos n\theta \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} (2)$$

とし, これに応ずる断面力

$$\left. \begin{aligned} N_\varphi &= N_{\varphi n} \cos n\theta, \quad N_\theta = N_{\theta n} \cos n\theta, \\ N_{\varphi\theta} &= N_{\theta\varphi n} \sin n\theta \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} (3)$$

としてみると, (1) において $\cos n\theta, \sin n\theta$ は落ちて, φ の関数 $p_{\varphi n}, p_{\theta n}, p_{rn}, N_{\varphi n}, N_{\theta n}, N_{\theta\varphi n}$ に関する3式がえられる。この第3式を用いて $N_{\theta n}$ を第1式, 第2式から消去すれば (1) は結局次のような $N_{\varphi n}, N_{\theta\varphi n}$ に関する連立微分方程式となる。

$$\left. \begin{aligned} N_{\varphi n}' + (1+r_1/r_2) \cot \varphi N_{\varphi n} + n \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{N_{\theta \varphi n}}{\sin \varphi} \\ = r_1 p_{rn} \cot \varphi - r_1 p_{\varphi n}, \\ N_{\theta \varphi n}' + 2 \frac{r_1}{r_2} \cot \varphi N_{\theta \varphi n} + n \frac{N_{\varphi n}}{\sin \varphi} \\ = n \cdot r_1 \frac{p_{rn}}{\sin \varphi} - r_1 p_{\theta n} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

問題はこの微分方程式の一般解を求めることになるわけだが、任意の曲面に対して解くことは困難で、球面・円錐面等について解きうるだけである。そこでいま球面を例にとつて説明を進めることにしよう。 $r_1=r_2=a$ とし、次のような置換え、すなわち

$$U_1 = N_{\varphi n} + N_{\theta \varphi n}, \quad U_2 = N_{\varphi n} - N_{\theta \varphi n} \dots (5)$$

とすると、(4)の2式の和、差を作り、 U_1 および U_2 に関する互いに独立な微分方程式にすることができる。すなわち

$$\left. \begin{aligned} U_1' + \left(2 \cot \varphi + \frac{n}{\sin \varphi} \right) U_1 \\ = -a \left(p_{\varphi n} + p_{\theta n} - \frac{n + \cos \varphi}{\sin \varphi} p_{rn} \right) \\ U_2' + \left(2 \cot \varphi - \frac{n}{\sin \varphi} \right) U_2 \\ = -a \left(p_{\varphi n} - p_{\theta n} + \frac{n - \cos \varphi}{\sin \varphi} p_{rn} \right) \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

これは積分できて、

$$\left. \begin{aligned} U_1 = \frac{\cot \frac{\varphi}{2}}{\sin^2 \varphi} \left[C_1 - a \int \left(p_{\varphi n} + p_{\theta n} - \frac{n + \cos \varphi}{\sin \varphi} p_{rn} \right) \sin^2 \varphi \tan^{\frac{\varphi}{2}} d\varphi \right] \\ U_2 = \frac{\tan \frac{\varphi}{2}}{\sin^2 \varphi} \left[C_2 - a \int \left(p_{\varphi n} - p_{\theta n} + \frac{n - \cos \varphi}{\sin \varphi} p_{rn} \right) \sin^2 \varphi \cot^{\frac{\varphi}{2}} d\varphi \right] \end{aligned} \right\} \dots (7)$$

となる。積分定数 C_1, C_2 が適当に定まれば、(7)より U_1, U_2 したがって $N_{\varphi n}, N_{\theta \varphi n}$ が定まり、(1)の第3式の関係から $N_{\theta n}$ も求められるわけである。

積分定数を求めるには頂点および裾における(回転軸が水平に置かれている場合は左右両端における)断面力に対する条件を考えればよろしい。

まず軸対称な応力状態とすれば、 $n=0$ の場合であるから(7)の2式は一致し積分定数は1コである。頂部が閉じた曲面では、この点で断面力したがって U が特異点を持たないように定めればよろしい。開口をもつときは、ここで N_{φ} が外力に等しくなる条件をおけば定まる。

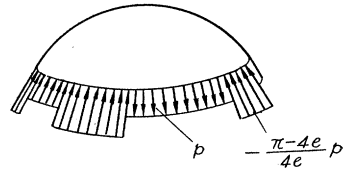
軸対称でない場合は、開曲面では $N_{\varphi n}, N_{\theta \varphi n}$ に対して頂および裾でそれぞれ1つの条件、または頂辺で2つの条件を与えればよろしい。閉曲面では $n=1$ のときは

頂で U_1, U_2 が特異点とならぬ条件から C_1, C_2 を求めることができる。 $n \geq 2$ の場合は、 C_2 の値にかかわらず頂で U_2 が特異点とならなくなるので、 U_1 が特異点とならない条件が1つたつだけである。したがって裾の支持条件を考慮しなければならない。

なお閉曲面の場合、頂で特異点をもたない条件のかわりに、 $\varphi = \varphi$ 緯円の断面力の合力と、これより上部の荷重合力との釣合いを考へても結局同じことである。

このようにして種々の荷重状態の解がえられるわけであるが、いまこ

図-2



に一例として球面が $\varphi = \varphi_0$ の裾辺で4本の支柱で支えられ、各支柱間の縁辺に荷重 P が作用する場合を示

てみよう(図-2参照)。曲面上には荷重が作用してないので、 $p_{\varphi n} = p_{\theta n} = p_{rn} = 0$ である。これを(7)に入れて $N_{\varphi n}, N_{\theta \varphi n}$ を求めると、

$$\left. \begin{aligned} N_{\varphi n} = \frac{U_1 + U_2}{2} = \frac{1}{2 \sin^2 \varphi} \left(C_{1n} \cot^{\frac{\varphi}{2}} \frac{\varphi}{2} + C_{2n} \tan^{\frac{\varphi}{2}} \frac{\varphi}{2} \right) \\ N_{\theta \varphi n} = \frac{U_1 - U_2}{2} = \frac{1}{2 \sin^2 \varphi} \left(C_{1n} \cot^{\frac{\varphi}{2}} \frac{\varphi}{2} - C_{2n} \tan^{\frac{\varphi}{2}} \frac{\varphi}{2} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

となる。ここに頂点($\varphi=0$)が特異点とならない条件から $C_{1n}=0$ である。支柱の幅を $a \sin \varphi_0 \cdot \epsilon$ とすると支持部の反力は $-P \frac{\pi - 4\epsilon}{4\epsilon}$ となる。裾における条件はフーリエ級数に展開すると、4の倍数の n を用いて次のようにかける。

$$(N_{\varphi})_{\varphi=\varphi_0} = \frac{2P}{\epsilon} \sum_{n=4,8,\dots}^{\infty} \frac{\sin n\epsilon}{n} \cos n\theta \dots (9)$$

一方(8)より $n=4, 8, \dots$ に対する $(N_{\varphi})_{\varphi=\varphi_0}$ がえられる。これを等置して

$$C_{2n} \frac{\tan^{\frac{\varphi_0}{2}}}{2 \sin^2 \varphi_0} = \frac{2P}{n\epsilon} \sin n\epsilon \quad n=4, 8, \dots (10)$$

として C_{2n} が定められる。この C_{2n} を用いて

$$\left. \begin{aligned} N_{\varphi} = -N_{\theta} = \frac{1}{2} \sum_{n=4,8,\dots}^{\infty} C_{2n} \frac{\tan^{\frac{\varphi}{2}}}{\sin^2 \varphi} \cos n\theta \\ N_{\theta \varphi} = -\frac{1}{2} \sum_{n=4,8,\dots}^{\infty} C_{2n} \frac{\tan^{\frac{\varphi}{2}}}{\sin^2 \varphi} \sin n\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

となる。

軸対称応力状態の場合は、 $p_{\theta}=0, N_{\theta \varphi}=0$ となり(1)は任意の回転面について解かれ、 N_{φ} は次式で与えられる。

$$N_\varphi = \frac{1}{r_2 \sin^2 \varphi} \left[\int r_1 r_2 (p_r \cos \varphi - p_\theta \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi + C \right] \dots \dots \dots (12)$$

N_θ はこの N_φ を用いて (1) の第3式より求められる。積分定数は先に述べたとおり閉曲面では $\varphi=0$ で特異点とならない条件から、あるいは全荷重と緯円断面力との釣合いから、開曲面では開口縁の N_φ に対する条件から定まる。

次には回転面の変形について述べよう。まず断面力とヒズミの関係すなわち弾性法則は壁板のとときと同じく

$$N_\theta = D(\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_\varphi), N_\varphi = D(\varepsilon_\varphi + \nu \varepsilon_\theta), N_{\theta\varphi} = D \frac{1-\nu}{2} r_{\theta\varphi} \dots \dots \dots (13)$$

ここに $D = Et/(1-\nu^2)$

で表わされる。

中心面の変位とヒズミの関係は幾何学的な関係から次式で与えられることになる。

$$\left. \begin{aligned} v' + w = r_1 \varepsilon_\varphi, u' + v \cos \varphi + w \sin \varphi = r_2 \varepsilon_\theta \sin \varphi \\ (r_2/r_1) u' \sin \varphi - u \cos \varphi + v' = r_2 r_{\theta\varphi} \sin \varphi \end{aligned} \right\} (14)$$

(13)を(14)に代入して積分すればよいわけであるが、一般にこの積分は困難である。いま軸対称変形状態とすれば任意の回転面に対して解くことができる。この場合は(14)において $u=v'=w=0, r_{\theta\varphi}=0$ であるから、 w を消去すると

$$v' - v \cot \varphi = r_1 \varepsilon_\varphi - r_2 \varepsilon_\theta \dots \dots \dots (15)$$

となる。(15)に(13)を代入して積分すれば

$$v = \left[\int \frac{1}{Et} (N_\varphi (r_1 + \nu r_2) - N_\theta (r_2 + \nu r_1)) \frac{d\varphi}{\sin \varphi} + C \right] \sin \varphi \dots \dots \dots (16)$$

がえられる。定数 C は剛体変位を意味するから 0 とおいてよい。 w は

$$w = r_2 \varepsilon_\theta - v \cot \varphi \dots \dots \dots (17)$$

より求められる。

以上回転面の変形について述べたが、終りに薄膜理論によれば、曲面の無ヒズミしたがって無応力の変形状態が剛体的変位以外にも存在することを指摘しておこう。薄膜理論は近似理論であり、このような変形は厳密には存在しないが、実際には非常に変形しやすい。主として曲げによつて、抵抗される状態を示していると解することができる。いま球面の場合を例にとり、(14)において $\varepsilon_\varphi = \varepsilon_\theta = r_{\theta\varphi} = 0$ とし、

$$u = u_n \sin n\theta, v = v_n \cos n\theta, w = w_n \cos n\theta \dots (18)$$

とした場合を解いてみると次のような解がえられる。

$$\left. \begin{aligned} v_n / \sin \varphi = A \tan^n \varphi / 2 + B \cot^n \varphi / 2 \\ u_n / \sin \varphi = A \tan^n \varphi / 2 - B \cot^n \varphi / 2 \\ w_n = -A \tan^n \varphi / 2 \cdot (n + \cos \varphi) \\ \quad + B \cot^n \varphi / 2 \cdot (n - \cos \varphi) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (19)$$

閉球面とすれば、第2項は $\varphi=0$ で特異点となるのでこれは除き、第1項のみを考えるとすると、 $n=0$ および $n=1$ ではこれらの変位は剛体変位を意味しているが、 $n \geq 2$ では、実変形を示している。

最後に任意形曲面の薄膜理論として Pucher の理論を紹介しよう。図-3 に示すごとく、直交坐標 xyz をと

図-3 (a)

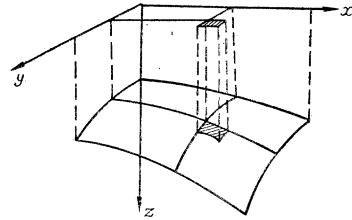
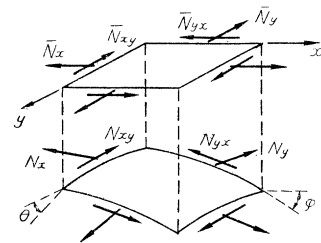


図-3 (b)



り、 $y = \text{const.}$ および $x = \text{const.}$ なる z に平行な平面が曲面と交わる線を x -線および y -線とよぶことにする。 x -線、 y -線の切線が水平面 xy となす傾角を φ, θ とする。 x -線、 y -線に働らく断面力をこの両線方向(斜交している)の成分に分ち $N_y, N_{yx}; N_x, N_{xy}$ とする。さらにこれを水平面 xy に投影し、かつ単位水平長について表わした断面力として次のごときものを定義する。

$$\begin{aligned} \bar{N}_x &= N_x \cos \varphi / \cos \theta, \bar{N}_y = N_y \cos \theta / \cos \varphi, N_{xy} \\ &= \bar{N}_{xy} \dots \dots \dots (20) \end{aligned}$$

このような断面力を用いて、 x, y および z 方向の釣合いを考えると結局下記のような釣合条件式がたてられる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{N}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{N}_{xy}}{\partial y} + p_x = 0 \\ \frac{\partial \bar{N}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{N}_y}{\partial y} + p_y = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (21)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{N}_x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \bar{N}_{xy} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \\ = -p_z + p_x \frac{\partial z}{\partial x} + p_y \frac{\partial z}{\partial y} \end{aligned} \right\} \dots (22)$$

ここに $\frac{\partial z}{\partial x} = \tan \varphi, \frac{\partial z}{\partial y} = \tan \theta; p_x, p_y, p_z$ は荷重の単位水平面積当りの x, y, z 方向成分である。

さて壁板の場合の Airy の応力関数にならつて ϕ なる関数を考え、

$$\left. \begin{aligned} \bar{N}_x &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \int p_x dx, & \bar{N}_y &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \\ & - \int p_y dy, & \bar{N}_{xy} &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \dots (23)$$

とおくと、これは(22)の第1,第2式は自ら満足している。これを第3式に代入すると

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \\ = -p_x + p_x \frac{\partial z}{\partial x} + p_y \frac{\partial z}{\partial y} + \int p_x dx \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \\ + \int p_y dy \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{aligned} \right\} \dots (24)$$

なる式がえられる。これが Pucher によつて導かれた薄膜

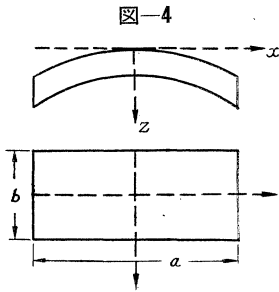


図-4

理論の一般的基本式である。この式を用いて推動曲面、コノイド曲面、双曲放物面等が解かれる。ここでは一例として、最も簡単なパラボラ推動曲面の例解を示しておこう(図-4 参照)。

曲面の方程式 $z = (x^2/h_1) + (y^2/h_2) \dots (24)$

荷重 $p_x = p_y = 0, p_z = p = \text{const.} \dots (25)$

とすると応力関数 Φ の基礎式(24)は

$$\frac{1}{h_1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -\frac{P}{2} \dots (26)$$

となる。境界条件として

$$\left. \begin{aligned} x = \pm \frac{a}{2} : N_x = 0 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \\ y = \pm \frac{b}{2} : N_y = 0 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \end{aligned} \right\} \dots (27)$$

これは境界上では $\Phi = 0$ としてもよい。応力関数 Φ では x, y の一次の項は不用であるから、(26)の特解としては

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \frac{ph_1}{4} \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right) \\ &= \frac{ph_1}{4} \frac{8b^2}{\pi^3} \left(\cos \frac{\pi y}{b} - \frac{1}{3^3} \cos \frac{3\pi y}{b} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{5^3} \cos \frac{5\pi y}{b} - \dots \right) \dots (28) \end{aligned}$$

(26)の齊次式の一般解は

$$\Phi_1 = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} C_n \cosh \frac{n\pi x}{c} \cos \frac{n\pi y}{b} \dots (29)$$

ここに $c = b\sqrt{h_1/h_2}$ である。境界条件 $x = \pm a/2$,

$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 = 0$ から

$$\frac{ph_1}{4} \frac{8b^2}{\pi^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{1}{n^3} + C_n \cosh \frac{n\pi a}{2c} = 0 \dots (30)$$

こうして C_n が定まる。 $y = \pm b/2$ の境界条件は始めからももちろん満足している。(23),(20)の關係を用いて断面力が求められる。

4. 近似曲げ理論

曲げ理論は、断面力の成分として、先に示したように壁板系4,床板系6合計10コを取扱うもので、はなはだやつかひである。これに対して3次元の釣合式6コが成立ち、これだけでは不足で、さらに変形の条件——適合条件を加えることによつて曲面の応力状態を規定できるものである。いわば内的に不穩定な構造である。

曲げ理論の問題点としては、まず各曲面に応じて基礎式を立てることである。円筒,球面,円錐面等とはもかくとして、複雑な曲面では基礎式をたてることさきわめてやつかひなことである。幾何学的な諸關係が直観的になかなか把握がたいからである。正しい關係式を求めようとするならば、円筒のように簡単なものでも非常にめんどろであり、例えば Flügge の著書(1934)と Timoshenko の著書(1940)の円筒曲面の曲げ理論式をくらべれば若干異なつてゐることからもわかるであろう。そこでどんな曲面に対しても正しく基本式を求めようように、一般曲面曲げ理論が近年盛んに研究され、ベクトル解析・テンソル解析等を用いてほとんど完成の域に達してゐる。

第二の問題点は、正しく式ができても解けないこと、また解けても複雑な骨の折れる計算となり実用的でないことである。そこで近似理論の研究も一方においてさかんである。本講では問題を近似理論に限るが、それでもその全貌を述べることはむづかしいので、円筒曲面について説明することにする。

座標は x 軸を母線方向にとり円弧角を φ とし $\frac{\partial f}{\partial \varphi} = f'$,

$a \frac{\partial f}{\partial x} = f''$ と記号する。曲面の厚さと半径の比 t/a はかなり小さいもので

あるが、いま1に対して $(t/a)^2$ の項までいれて $(t/a)^3$ をふくむ項以下を無視して、断面力

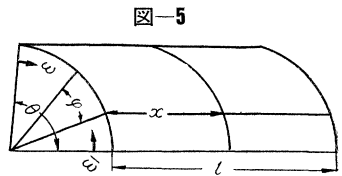


図-5

と変位との關係式を求めてみると次のごとくなる。この關係は Flügge の著(1934)などにもみられるとおりで、一応円筒面の最も嚴密な弾性則といえる。

$$\left. \begin{aligned} N_\varphi &= \frac{D}{a} (v' + w + \nu u') + \frac{K}{a^3} (w + w'') \\ N_x &= \frac{D}{a} (u' + \nu v' + \nu w) - \frac{K}{a^3} w'' \\ N_{\varphi x} &= \frac{D}{a} \frac{1-\nu}{2} (u' + v') + \frac{K}{a^3} \frac{(1-\nu)}{2} (u' + w'') \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} N_{x\varphi} &= \frac{D}{a} \frac{1-\nu}{2} (u' + v') + \frac{K}{a^3} \frac{(1-\nu)}{2} (v' - w'') \\ M_{\varphi} &= \frac{K}{a^2} (w + w'' + \nu w'') \\ M_x &= \frac{K}{a^2} (w'' + \nu w'' - u' - \nu v') \\ M_{\varphi x} &= \frac{K}{a^2} (1-\nu) \left(w'' + \frac{u'}{2} - \frac{v'}{2} \right) \\ M_{x\varphi} &= \frac{K}{a^2} (1-\nu) (w' - v') \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

$$\text{ここに } D = \frac{Et}{1-\nu^2} \quad K = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \dots\dots\dots (32)$$

上式において近似化をはかる。面内力の第1項は t/a をふくみ、第2項は t^3/a^3 を有するので、第2項は第1項に比して十分小さいからこれを無視する。また曲げ力については、曲りバリの理論からも推定されるように、 w の項に比して u, v の項は非常に小さいので、これを無視することにする。そうすると (31) は簡単化されて

$$\left. \begin{aligned} N_{\varphi} &= \frac{D}{a} (v' + w + \nu u') \\ N_x &= \frac{D}{a} (u' + \nu v' + \nu w) \\ N_{\varphi x} = N_{x\varphi} &= \frac{D(1-\nu)}{2a} (u' + v') \\ M_{\varphi} &= \frac{K}{a^2} (w'' + \nu w'') \\ M_x &= \frac{K}{a^2} (w'' + \nu w'') \\ M_{x\varphi} = M_{\varphi x} &= \frac{K(1-\nu)}{a^2} w' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (33)$$

となる。

釣合条件は正しく書くと(ただし荷重項をのぞいて)母線、円弧、法線方向の釣合から

$$\left. \begin{aligned} N_x' + N_{\varphi x}' &= 0 \\ N_{\varphi}' + N_x \varphi' - Q_{\varphi} &= 0 \\ Q_{\varphi}' + Q_x' + N_{\varphi} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (34)$$

モーメントの釣合から

$$\left. \begin{aligned} M_{\varphi}' + M_x \varphi' - aQ_{\varphi} &= 0 \\ M_x' + M_{\varphi x}' - aQ_x &= 0 \\ aN_x \varphi - aN_{\varphi x} + M_{\varphi x} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (35)$$

釣合式もまた近似化をはかり、(34) 第2式において Q_{φ} の影響はきわめて小さいと考えられるのでこれを無視し、(34) の第3式に (35) の第1, 第2式を用いて、 Q_{φ}, Q_x を消去すると次のごとくなる。なお (35) の第3式は (31) の関係から当初より満足されているものであり、考えなくてよい。

$$\left. \begin{aligned} N_x' + N_{\varphi x}' &= 0, & N_{\varphi}' + N_x \varphi' &= 0 \\ M_{\varphi}' + 2M_x \varphi' + M_x'' + aN_{\varphi} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (36)$$

一方適合条件として、(33) の第1, 2および3式から

u, v を消去すると次式をうる。

$$\begin{aligned} N_x'' + N_{\varphi}'' - \nu(N_{\varphi}'' + N_x'') - 2N_x \varphi''(1+\nu) \\ - w'' \cdot \frac{D(1-\nu^2)}{a} = 0 \dots\dots\dots (37) \end{aligned}$$

いま応力関数 ϕ を用いて

$$N_x = \phi'', \quad N_{\varphi} = \phi'', \quad N_x \varphi = -\phi' \dots\dots\dots (38)$$

とおくと、これは (36) の第1, 第2式を満足する。(38)

を (37) に代入すると

$$r^2 = a^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

なる記号を用いて

$$r^2 r^2 \phi - \frac{D(1-\nu^2)}{a} w'' = 0 \dots\dots\dots (39)$$

(36) の第3式に(33)の第4, 第5, 第6式を代入して

$$r^2 r^2 w + \frac{a^3}{K} \phi'' = 0 \dots\dots\dots (40)$$

いま

$$\left. \begin{aligned} f &= \left(\frac{a}{t} \right)^2 \sqrt{\frac{12(1-\nu^2)}{E}} \\ \psi &= w + if\phi \\ \varepsilon^2 &= \frac{t}{a\sqrt{12(1-\nu^2)}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (41)$$

とおくと、(39) および (40) は次式のような関数 ψ に関する式にまとめられる。

$$r^2 r^2 \psi - \frac{i}{\varepsilon^2} \psi'' = 0 \dots\dots\dots (42)$$

これが円筒曲面に関する Zerna の近似曲げ理論の基本式である。いま両端支持の円筒屋根のごとき場合を対象として、解を

$$\psi = C_{mn} e^{m\eta} \sin n\pi\xi \quad (n=1, 3, 5, \dots) \dots\dots (43)$$

ここに $\xi = x/l, \eta = \varphi/\theta, l$: 曲面長さ, θ : 曲面の開角とおく。

(43) を (42) に代入すると m を決定する特性方程式として

$$\begin{aligned} m^4 - 2 \left(\frac{n\pi\theta a}{l} \right)^2 m^2 + \left(\frac{\theta a}{l} \right)^4 (n\pi)^2 \\ \times \left[(n\pi)^2 + \frac{il^2 \sqrt{12(1-\nu^2)}}{at} \right] = 0 \dots\dots\dots (4.4) \end{aligned}$$

をうる。これより

$$m_{\frac{1}{2}} = \alpha_{\frac{1}{2}} \pm i\beta_{\frac{1}{2}}, \quad m_{\frac{3}{4}} = -\alpha_{\frac{1}{2}} \pm i\beta_{\frac{1}{2}}$$

$$\text{ただし } \alpha_{\frac{1}{2}} = r p_{\frac{1}{2}}, \quad \beta_{\frac{1}{2}} = r q_{\frac{1}{2}}, \quad r = \frac{n\theta a}{l}$$

$$p_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2} \left[\sqrt{\pi^2 \pm \frac{\pi\sqrt{2}}{\lambda}} + \frac{1}{\lambda^2} + \pi \pm \frac{1}{\lambda\sqrt{2}} \right]}$$

$$q_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2} \left[\sqrt{\pi^2 \pm \frac{\pi\sqrt{2}}{\lambda}} + \frac{1}{\lambda^2} - \pi \mp \frac{1}{\lambda\sqrt{2}} \right]}$$

$$\lambda = \frac{n}{l} \sqrt{\frac{ia}{\sqrt{12(1-\nu^2)}}}$$

..... (45)

(45) の m を (43) に代入し、実部および虚部に分けると w および $f\phi$ が求まるが、 $e^{\pm i\beta}$ を三角関数に変え、かつ η のかわりに縁辺より測り $\omega = \eta + 0.5$ および $\bar{\omega} = 1 - \omega$ を用ると w および $f\phi$ は、次のように 8 コの積分常数 $B_1 \sim B_8$ を含む式で表わされる。

$$w = [e^{-\alpha_1 \bar{\omega}} (B_1 \cos \beta_1 \bar{\omega} + B_2 \sin \beta_1 \bar{\omega}) + e^{-\alpha_2 \bar{\omega}} (B_3 \cos \beta_2 \bar{\omega} + B_4 \sin \beta_2 \bar{\omega}) + e^{-\alpha_1 \omega} (B_5 \cos \beta_1 \omega + B_6 \sin \beta_1 \omega) + e^{-\alpha_2 \omega} (B_7 \cos \beta_2 \omega + B_8 \sin \beta_2 \omega)] \sin n \pi \xi \dots (46)$$

$$f\phi = [e^{-\alpha_1 \bar{\omega}} (B_1 \sin \beta_1 \bar{\omega} - B_2 \cos \beta_1 \bar{\omega}) + e^{-\alpha_2 \bar{\omega}} (-B_3 \sin \beta_2 \bar{\omega} + B_4 \cos \beta_2 \bar{\omega}) + e^{-\alpha_1 \omega} (B_5 \sin \beta_1 \omega - B_6 \cos \beta_1 \omega) + e^{-\alpha_2 \omega} (-B_7 \sin \beta_2 \omega + B_8 \cos \beta_2 \omega)] \sin n \pi \xi \dots (47)$$

これを用いて断面力、変位もすべて $B_1 \sim B_8$ によつて定まる係数がかけられた、同上式とよく似た形の式として表わされる。ここでは紙面の都合上省略する。

さて同上の關係を用いて与えられた問題を解くには、まず荷重のかかつた場合の完全円管の解を求める。通常これは薄膜解をもつて代用する。例えば等分布荷重 p に対しては

$$p_x = 0 \quad p_\varphi = p \sin \varphi \quad p_r = -p \cos \varphi \dots (48)$$

p をフーリエ展開すると $p = pz \frac{4}{n\pi} \sin n \pi \xi$ ($n=1, 3, 5$)

このフーリエの各項につき薄膜解を求めると

$$\left. \begin{aligned} N_\varphi &= -pa \cdot \frac{4}{n\pi} \cdot \cos \varphi \sin n \pi \xi \\ N_{x\varphi} &= pl \frac{8}{n^2 \pi^2} \cdot \sin \varphi \cdot \cos n \pi \xi \\ N_x &= -p \frac{l^2}{a} \frac{8}{n^3 \pi^3} \cdot \cos \varphi \cdot \sin n \pi \xi \end{aligned} \right\} \dots (49)$$

で与えられる。いま縁辺位置を $\varphi_0 = \theta/2$ とすると、上式に $\varphi = \varphi_0$ を入れた値が縁辺に働いており、またそれに応じた変形を生じており、一般に縁辺条件を満足していない。

自由縁辺とすれば、 $(N_\varphi)_{\varphi=\varphi_0}$, $(N_{x\varphi})_{\varphi=\varphi_0}$ の値を打ち消すようにしなければならぬ。そこで上記の曲げ理論解をこの薄膜解に重ね合わせて、この目的にかなうように積分常数を定める。すなわち薄膜値に M , 曲げ理論値に B をつけて示すと、縁辺の条件は、各縁辺につきそれぞれ次のように 4 コかかれる。

- (i) $N_\varphi = N_\varphi^M + N_\varphi^B = 0$
- (ii) $N_{x\varphi} = N_{x\varphi}^M + N_{x\varphi}^B = 0$
- (iii) $M_\varphi = M_\varphi^B = 0$
- (iv) $V_\varphi = V_\varphi^B = Q_\varphi^B + M_{x\varphi}^B / a = 0$

これを立てることにより積分常数がすべて定まる。

あるいはあらかじめ N_φ^B , $N_{x\varphi}^B$, M_φ^B , V_φ^B などの単位量を種々の φ_0, l 等に対して解いた表を作成しておけば、ただちに解を求めることができる。このような応力法的な手法を用いる方法として ASCE Manual No. 31 の方法その他がある。

上記の曲げ理論の基礎式 (42) は、複素関数を用いて 4 階となつたが、実関数を用いるとして (40), (39) から ϕ を消去にすると w に関する 8 階の微分方程式となる。曲面の基礎式は一般にそうである。特性方程式も m に関する 8 次式となる。

曲げ理論解は一般に (46), (47) の解のように縁辺から減衰振動的に内部へ入るにつれて影響が小さくやつてゆくものである。そしてその減衰を支配する量 $e^{-\alpha \eta}$ の α なる値が大きければ減衰が大きく、影響は縁辺近くに局限されてくる。複曲面ではこのような傾向が強い。かかる場合には m の値もかなり大となり、特性式 m の最高次のもののみをとつた近似理論を作ることができる。円筒曲面屋根に対してもこのような主旨の近似理論として Schorer の方法がある。上記の方法は特性方程式を 8 階とした場合について示すと次の形式

$$(m^2 - \gamma)^4 + \lambda^4 = 0$$

である。ところでこれを $m^8 + \lambda^4 = 0$

とした場合が後者の方法である。この場合は $\alpha_1 = \beta_2$, $\alpha_2 = \beta_1$ となり解が相当楽になる。ただし精度は前者に若干おとる。

5. むすび

以上曲面について若干の事項にふれたが、その欠を補なう意味で参考書の紹介をしておこう。洋書ではかなり前からある本としては

Timoshenko: Theory of Plates and Shells, 1940

が有名である。最近刊としてとくに内容の充実したものとしては

Girkmann: Flächentragwerke, 1948

Flügge: Statik und Dynamik der Schalen, 1957 改訂版

これらは文献もよく引用記載されおり、勉強するのに都合がよい。ぜひこれらで本講の欠を補つて頂きたいと思ふ。また曲面の一般理論をかいた本としては

Green and Zerna: Theoretical Elasticity, 1954, Oxford.

がある。

邦文では

坪井・寺崎訳: フリゲ著; 曲面板の力学 [初版の訳]

坂 静雄著: 平面と曲面の構造

横尾・岡本・千原・鮎訳: ASCE 円筒シャーレの設計

坪井善勝著: 曲面板, 建築学大系, 「建築弾塑性学」

等が現在のところ見られる。

紙を螺旋状に巻きエンドレスパイプとした我国最初の新製品です。

規格表

(特許申請中)

内径(%)	50	100	150	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
内厚(%)	2.5	3.5	3.5	5.0	6.0	8.0	10.0	10.0	10.0	11.0	11.0	12.0

フジチューブ

建築・土木の円柱建造に最適のもので
す。フジチューブを立てその中にコン
クリートを流し込むだけで正確な円柱
が簡単に建造することが出来ます。

フジボイド

スラブの軽量化に使用されます。
スラブ又は壁体のコンクリート打ちの
際、フジボイドをせき板とせき板の中
間に排列し、その周囲にコンクリート
を流し込み、いわば継目なしのコンク
リートブロックを現場にて作成出来る
副期的な製品です。

フジエアダクト

従来より隧道用の空気調整用パイプは、鉄板製の
ものが用いられていますが、非常に重く且つチ
ントに多大の手間
を要しますが、フジ
エアダクトを使用
すれば軽量で取扱い
易く、而も価格が極
めて低廉であります。



隧道用エアーダクト施工の実況
(福島県只見線滝沢隧道工事)
鹿島建設施工



藤森建材株式会社

東京・東京都中央区日本橋通1の2 (大倉ビル) TEL (27) 6432~5

大阪・大阪市西区土佐堀通1の1 (大同ビル) TEL (44) 0225・7569

(カタログ・見本進呈)

