報　文

平均値法の3次元への拡張とその流量測定への応用

正員　春日屋伸昌*

THE EXTENSION OF THE MEAN-VALUE METHOD TO THREE DIMENSIONS AND ITS APPLICATION TO DISCHARGE MEASUREMENT

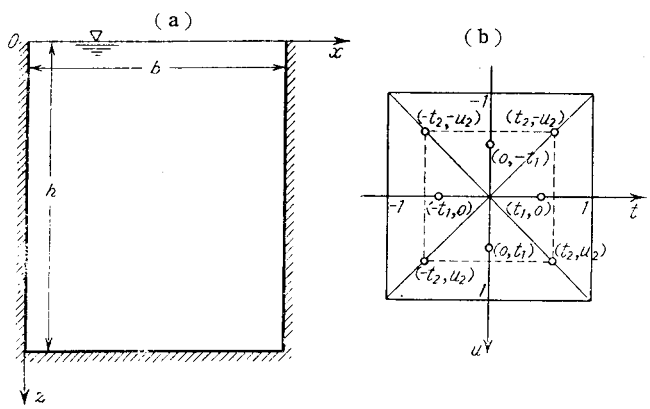
(JSCE Dec. 1955)

Nobumasa Kasugaya, C.E. Member

Synopsis The author considers about the method of calculation of the mean value of any function with two variables in rectangular domain, extending the mean-value method to three dimensions. His consideration comes to the conclusion that we can calculate the correct value of that by four points method (can be two types) or eight points method if the polynomial order of the function is the third or the fifth at most in this domain, respectively. Then he reduces the formulae for three types above mentioned. It is illustrated that we can obtain the satisfactory results, applying these formulae to the discharge measurement in an open channel with rectangular cross section, if we use the eight points method even when the flow is sufficiently turbulent, and especially the number of measuring points become merely five when the flow is symmetrical with respect to the vertical center line of the cross section.

要旨　平均値法を3次元に拡張して，領域が矩形であるとき，2変数函数のこの領域内での平均値を求める方式について考察し，函数がこの領域内で高々3次ならば4点法（この方式に2つある），高々5次ならば8点法となり，それぞれの公式を誘導した。この公式を矩形断面の開水路の流量測定に応用すれば，相当乱れた流れの場合でも8点法で十分であり，特に流れが断面の中心線に関して左右対称である場合にはわずか5点で十分満足すべき結果のえられることを示した。

図—1



1．3次元における平均値法公式の誘導

水面巾が b，水深が h である矩形断面の開水路の流量を測定するために，流速計を挿入すべき観測点の位置と流量算定式とについて考える。

いま，一方の岸に原点，水面巾に沿つて x 軸，深さに沿つて z 軸をとり，点 (x, z) の流速を $v=f(x,z)$ とすれば，流量 Q は，

$$Q=\int_0^h dz\int_0^b v\,dx \cdots\cdots(1)$$

そこで，つぎの変数変換，

$$x=(1+t)b/2,\ z=(1+u)h/2 \cdots\cdots(2)$$

を行い，横断面積を A とすれば，(1) 式は，

$$Q=\frac{bh}{4}\int_{-1}^{1}du\int_{-1}^{1}v\,dt=\frac{A}{4}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}v\,dt\,du \cdots\cdots(3)$$

ここに，流速 v は t,u の函数であつて，

$$v=f(x,z)=f\{(1+t)b/2,\ (1+u)h/2\}$$
$$=g(t,u) \cdots\cdots(4)$$

と書くことができる。

函数 $g(t,u)$ を t,u に関する Maclaurin の級数に展開すれば，

$$g(t,u)=g(0,0)+\frac{1}{1!}\left(t\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial u}\right)g(0,0)$$
$$+\frac{1}{2!}\left(t\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial u}\right)^2 g(0,0)+\cdots$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(t\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial u}\right)^m g(0,0)$$

* 中央大学助教授，工学部土木工学科教室

$$= \sum_{r,s=0}^{\infty} a_{r,s} t^r u^s \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

ここに，$a_{r,s}=\dfrac{{}_{r+s}C_r}{(r+s)!}\left(\dfrac{\partial^{r+s} g}{\partial t^r \partial u^s}\right)_{\substack{t=0\\u=0}}$.

(5) 式を (3) 式に入れて積分すれば，

$$Q=\frac{A}{4}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left\{\sum_{r,s=0}^{\infty} a_{r,s} t^r u^s\right\} dt du \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

さて，(6) 式の2重積分の限界はいずれも下限が -1，上限が $+1$ であるから，被積分函数の項のうち，t または u に関する奇数次を少なくとも1つ含む項（例えば，$t,u,tu,t^3,t^2u,tu^2,u^3,t^3u,tu^3,\cdots$ などの項）は1度目または2度目の定積分の結果0となり，定数項と，t および u に関する偶数次のみで構成されている項（例えば，$t^2,u^2,t^4,t^2u^2,u^4,\cdots$ などの項）は，その一般項 $a_{r,s}t^ru^s$ が，2度の定積分の結果，$a_{r,s}4/(r+1)(s+1)$ となる。

ゆえに，全断面平均流速を V_m とすれば，$V_m=Q/A$ であるから，(6) 式は，つぎのようになる。

$$V_m=a_{0,0}+\frac{a_{2,0}}{3}+\frac{a_{0,2}}{3}+\frac{a_{4,0}}{5}+\frac{a_{2,2}}{9}+\frac{a_{0,4}}{5} + \cdots \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

ここに，$a_{0,0}=g\ (0,0)$，$a_{2,0}=\dfrac{1}{2!}\left(\dfrac{\partial^2 g}{\partial t^2}\right)_{\substack{t=0\\u=0}}$,

$a_{0,2}=\dfrac{1}{2!}\left(\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}\right)_{\substack{t=0\\u=0}}$，$a_{4,0}=\dfrac{1}{4!}\left(\dfrac{\partial^4 g}{\partial t^4}\right)_{\substack{t=0\\u=0}}$,

$a_{2,2}=\dfrac{6}{4!}\left(\dfrac{\partial^4 g}{\partial t^2 \partial u^2}\right)_{\substack{t=0\\u=0}}$，$a_{0,4}=\dfrac{1}{4!}\left(\dfrac{\partial^4 g}{\partial u^4}\right)_{\substack{t=0\\u=0}},\cdots$

さて，平均値法の原理にしたがつて，(7) 式が，$-1\leqq t\leqq 1$，$-1\leqq u\leqq 1$ 内に適当に選んだ n 個の座標点 (t_1,u_1)，(t_2,u_2)，(t_3,u_3)，……，(t_n,u_n) における函数値 $v_1=f(x_1,z_1)=g(t_1,u_1)$，$v_2=f(x_2,z_2)=g(t_2,u_2)$，$v_3=f(x_3,z_3)=g(t_3,u_3)$，……，$v_n=f(x_n,z_n)=g(t_n,u_n)$ とこれらに乗じるべき係数 $R_1,R_2,R_3,\cdots\cdots,R_n$ とをもつて，つぎの形，

$$V_m=R_1v_1+R_2v_2+R_3v_3+\cdots+R_nv_n=\sum_{i=1}^{n}R_iv_i \cdots (8)$$

に近似的に等しくなるように，$t_i,u_i,R_i(i=1,2,3,\cdots,n)$ の値を選ぶことを考えよう。(5) 式より，

$$v_i=g(t_i,u_i)=\sum_{r,s=0}^{\infty}a_{r,s}t_i^r u_i^s\ (i=1,2,3,\cdots,n)\cdots (9)$$

であるから，これを (8) 式に入れると，

$$\begin{aligned}V_m&=\sum_{i=1}^{n}(R_i\sum_{r,s=0}^{\infty}a_{r,s}t_i^ru_i^s)=\sum_{r,s=0}^{\infty}(a_{r,s}\sum_{i=1}^{n}R_it_i^ru_i^s)\\&=a_{0,0}\sum_{i=1}^{n}R_i+a_{1,0}\sum_{i=1}^{n}R_it_i+a_{0,1}\sum_{i=1}^{n}R_iu_i\\&+a_{2,0}\sum_{i=1}^{n}R_it_i^2+a_{1,1}\sum_{i=1}^{n}R_it_iu_i\\&+a_{0,2}\sum_{i=1}^{n}R_iu_i^2+\cdots\cdots \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (10)\end{aligned}$$

(7) 式の右辺と (10) 式の右辺とを比較し，各 $a_{r,s}$ の係数を等しいとおけば，

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}R_i=1,\ \sum_{i=1}^{n}R_it_i=0,\ \sum_{i=1}^{n}R_iu_i=0,\\&\sum_{i=1}^{n}R_it_i^2=1/3,\ \sum_{i=1}^{n}R_it_iu_i=0,\\&\sum_{i=1}^{n}R_iu_i^2=1/3,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\}\cdots\cdots (11)$$

一般に，$\sum_{i=1}^{n}R_it_i^ru_i^s=0$（$r,s$ の少なくとも一方が奇数のとき）

$=1/(r+1)(s+1)$（r,s のいずれもが奇数でないとき，またはいずれも0のとき）

さて，(11)の連立方程式の数は一般に無限であるから，これらを同時に満足させる $t_i,u_i,R_i(i=1,2,3,\cdots n)$ は存在しない。そこで，上から適当な個数の方程式をとつてこれらを満足させる t_i,u_i,R_i の値を求めることとする。

そこで，図—1 (b) を見れば明らかなように，直交2軸 t,u は正方形の中心を通り辺に平行な軸であり，$v=g(t,u)$ の曲面形は全く任意でなんらの制約も受けていないから，図—1 (b) に示すように，もし，点 $(t_1,0)$ $(t_1>0)$ が (11) の連立方程式の根であるとすれば，これと u 軸に関して対称な点 $(-t_1,0)$ も(11)の根でなければならない。ところで，(11)を見ると，t と u とを交換しても方程式はなんら変わらないから，2点 $(t_1,0),(-t_1,0)$ が (11) の根ならば，2点 $(0,t_1),(0,-t_1)$ も (11) を満足する。すなわち，(11) を満足する点は少なくとも4つあつて，原点より等距離に各軸上に存在する。

ところで，(11)の根は，このように座標軸上の4つを1組とする点のみではない。上と同じ考察により，図—1 (b) に示すように，もし，点 (t_2,u_2) $(t_2>0, u_2>0)$ が (11) を満足するならば，これと u 軸に関して対称な点 $(-t_2,u_2)$ も (11) の根でなければならない。そうすると，点 $(-t_2,u_2)$ と t 軸に関して対称な点 $(-t_2,-u_2)$ もまた (11) の根であり，さらにこれと u 軸に関して対称な点 $(t_2,-u_2)$ も (11) の根でなければならない。ここで，$u_2=t_2$ とすれば，対角線上に対称的に存在する4点 $(t_2,t_2),(-t_2,t_2),(-t_2,-t_2),(t_2,-t_2)$ の1組も (11) の根となりうることがわかる。

以上述べた2組のほかに (11) を満足する点の存在しないことはただちにわかるから，根の種類をつぎの組に分類しよう。

I組; $(-t_1,0),(0,-t_1),(0,t_1),(t_1,0)$ $(t_1\neq 0)$

Ⅱ組; $(-t_2,-t_2),(-t_2,t_2),(t_2,-t_2),(t_2,t_2)(t_2 \neq 0)$

そこで，(11) における t,u の根は，これらのいずれかの組またはこれら2組の組合わせとなつて存在する。ゆえに，t,u の根の最小はⅠ組またはⅡ組の4点，つぎはⅠ組とⅡ組との8点である。

つぎに，係数 R_i について考察すると，(8) 式より明らかなように，R_i は v_i の重みともいうべきものであるから，$v=g(t,u)$ が任意の曲面形であることからして，例えば点 $(-t_1,0)$ における函数値 v_1 の重みを R_1 とするとき，この点と同じ組に属する点 $(0,-t_1)$ における函数値 v_2 の重みを R_1 と異なつた他の値とすべきなんらの理由も存在しない。すなわち，同じ組に属する4点における各函数値に乗じるべき係数 R_i はすべて同一でなければならない。そこで，Ⅰ組における係数をすべて R_1，Ⅱ 組における係数をすべて R_2 としよう。このようにして，われわれは(11)の未知数の数を減少させることができる。

まず，(11)の上より 10 個の方程式をとり，これらを満足する根を考えよう。

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}R_i=1,\ \sum_{i=1}^{n}R_it_i^2=\sum_{i=1}^{n}R_iu_i^2=1/3,\\&\sum_{i=1}^{n}R_it_i=\sum_{i=1}^{n}R_iu_i=\sum_{i=1}^{n}R_it_iu_i=\sum_{i=1}^{n}R_it_i^3\\&=\sum_{i=1}^{n}R_it_i^2u_i=\sum_{i=1}^{n}R_it_iu_i^2=\sum_{i=1}^{n}R_iu_i^3=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(12)$$

いま，$n=4$ として，Ⅰ組を採用し，かつ，上の考察にしたがつて簡単にすると，

$$4R_1=1,\ 2R_1t_1^2=1/3\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

となり，(12)において右辺が0となる7式はすべて満足されていることが容易にわかる。

(13)式より，$R_1=1/4,\ t_1=\sqrt{2/3}.$ ....(14)

ゆえに，(12)を満足する4点は，

$(-\sqrt{2/3},\ 0)$，$(0,-\sqrt{2/3})$，$(0,\ \sqrt{2/3})$，

$(\sqrt{2/3},\ 0)$ ....(15)

であつて，(2) 式により x,z の値になおすと，

$$\left.\begin{aligned}&x_1=(1-\sqrt{2/3})b/2=0.092\,b,\ z_1=h/2=0.500\,h\\&x_2=b/2=0.500\,b,\ z_2=(1-\sqrt{2/3})h/2=0.092\,h\\&x_3=b/2=0.500b,\ z_3=(1+\sqrt{2/3})h/2=0.908\,h\\&x_4=(1+\sqrt{2/3})b/2=0.908\,b,\ z_4=h/2=0.500\,h\end{aligned}\right\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

そこで，点 $(0.092\,b,\ 0.500\,h)$ に流速計を挿入して測定した流速を $v_{\substack{0.092\\0.500}}$（他も同様）とすれば，全断面平均流速 V_m は，

$$V_m=(1/4)(v_{\substack{0.092\\0.500}}+v_{\substack{0.500\\0.092}}+v_{\substack{0.500\\0.908}}+v_{\substack{0.908\\0.500}})\ \cdots\cdots(17)$$

さて，(17) 式の誤差 E はつぎのようにして評価される。

一般の曲面 $v=g(t,u)$ を (5) 式のように $t,\ u$ の無限ベキ級数に展開すれば，全断面平均流速は (7) 式の右辺のような無限級数の和として求められるが，(12) の連立方程式をたてることは，(7) 式の右辺と (10) 式の右辺とにおける $a_{0,0},a_{1,0},a_{0,1},a_{2,0},a_{1,1},a_{0,2}$ $a_{3,0},a_{2,1},a_{1,2},a_{0,3}$ の各係数をそれぞれ等しいとおいたことである。したがつて，$a_{0,3}$ のつぎの項以下すなわち $a_{4,0}$ の項以下は，(7) 式と (10) 式とで一般に等しくならない。この差が E にほかならないが，E の大体の値を評価するため，$a_{4,0},a_{3,1},a_{2,2},a_{1,3},a_{0,4}$ の5項についてのみ考え，両式におけるこれらの項の差の代数和として E を求めると，

(7)式では，

$$a_{4,0}/5+a_{2,2}/9+a_{0,4}/5\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(18)$$

(10)式では，

$$a_{4,0}\sum_{i=1}^{4}R_it_i^4+a_{3,1}\sum_{i=1}^{4}R_it_i^3u_i+a_{2,2}\sum_{i=1}^{4}R_it_i^2u_i^2$$
$$+a_{1,3}\sum_{i=1}^{4}R_it_iu_i^3+a_{0,4}\sum_{i=1}^{4}R_iu_i^4\ \cdots\cdots\cdots(19)$$

(19)式に(15)の結果を入れると，

$$\sum_{i=1}^{4}R_it_i^4=\sum_{i=1}^{4}R_iu_i^4=\{(2/3)^2+(2/3)^2\}/4=2/9,$$

$$\sum_{i=1}^{4}R_it_i^3u_i=\sum_{i=1}^{4}R_it_i^2u_i^2=\sum_{i=1}^{4}R_it_iu_i^3=0$$

となるから，

$$\begin{aligned}E&=\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{9}\right)a_{4,0}+\left(\frac{1}{9}-0\right)a_{2,2}+\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{9}\right)a_{0,4}\\&=-\frac{1}{45}(a_{4,0}+a_{0,4})+\frac{a_{2,2}}{9}\\&=-\frac{1}{45\cdot4!}\left(\frac{\partial^4g}{\partial t^4}+\frac{\partial^4g}{\partial u^4}\right)_{\substack{t=0\\u=0}}+\frac{6}{9\cdot4!}\left(\frac{\partial^4g}{\partial t^2\partial u^2}\right)_{\substack{t=0\\u=0}}\\&=-\frac{1}{1\,080}\left(\frac{\partial^4g}{\partial t^4}+\frac{\partial^4g}{\partial u^4}\right)_{\substack{t=0\\u=0}}+\frac{1}{36}\left(\frac{\partial^4g}{\partial t^2\partial u^2}\right)_{\substack{t=0\\u=0}}\end{aligned}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(20)$$

(20)式より明らかなように，$v=g(t,u)$が t,u に関する3次曲面またはそれ以下の次数の曲面（したがつて，$v=f(x,z)$ が x,z に関する高々3次の曲面）ならば，(17) 式は全く誤差をともなわないことがわかる。もし，$v=g(t,u)$ したがつて $v=f(x,z)$ が4次曲面ならば，その誤差は正しく(20)式で与えられるが，5次曲面であつても，その誤差は正しく (20) 式で与えられる。なぜならば，t,u に関する5次の項は2重積分の結果すべて0となつて，(7) 式の右辺には $a_{r,s}$ $(r+s=5)$ の項は含まれず，かつ，(10)式の右辺において，$\sum_{i=1}^{4}R_it_i^ru_i^s=0(r+s=5)$ となるからである。

以上は，Ⅰ組を採用したときの方式であるが，Ⅱ組

を採用するときには，(12)式より，

$$4R_2=1,\ 4R_2t_2{}^2=1/3$$

$$\therefore\ R_2=1/4,\ t_2=1/\sqrt{3}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(21)$$

ゆえに，求める4点は，

$$(-1/\sqrt{3},\ -1/\sqrt{3}),\ (-1/\sqrt{3},\ 1/\sqrt{3}),$$
$$(1/\sqrt{3},\ -1/\sqrt{3}),\ (1/\sqrt{3},\ 1/\sqrt{3})\cdots\cdots(22)$$

(2) 式により x,z の値になおすと，

$$\left.\begin{aligned}
&x_1=(1-1/\sqrt{3})b/2=0.211\,b,\quad z_1=(1-1/\sqrt{3})h/2=0.211\,h\\
&x_2=(1-1/\sqrt{3})b/2=0.211\,b,\quad z_2=(1+1/\sqrt{3})h/2=0.789\,h\\
&x_3=(1+1/\sqrt{3})b/2=0.789\,b,\quad z_3=(1-1/\sqrt{3})h/2=0.211\,h\\
&x_4=(1+1/\sqrt{3})b/2=0.789\,b,\quad z_4=(1+1/\sqrt{3})h/2=0.789\,h
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(23)$$

ゆえに，全断面平均流速 V_m は，

$$V_m=(1/4)(v_{\underset{0.211}{0.211}}+v_{\underset{0.789}{0.211}}+v_{\underset{0.211}{0.789}}+v_{\underset{0.789}{0.789}})\cdots\cdots(24)$$

(24)式における誤差 E は，

$$\sum_{i=1}^{4}R_it_i{}^4=\sum_{i=1}^{4}R_iu_i{}^4=\sum_{i=1}^{4}R_it_i{}^2u_i{}^2=4(1/4)(1/3)^2=1/9,$$

$$\sum_{i=1}^{4}R_it_i{}^3u_i=\sum_{i=1}^{4}R_it_iu_i{}^3=0$$

であるから，

$$E=\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)a_{4,0}+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\right)a_{2,2}+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)a_{0,4}$$
$$=\frac{4}{45}(a_{4,0}+a_{0,4})=\frac{4}{45\cdot4!}\left(\frac{\partial^4g}{\partial t^4}+\frac{\partial^4g}{\partial u^4}\right)_{\substack{t=0\\u=0}}$$
$$=\frac{1}{270}\left(\frac{\partial^4g}{\partial t^4}+\frac{\partial^4g}{\partial u^4}\right)_{\substack{t=0\\u=0}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(25)$$

I組の場合と同じように，$v=g(t,u)$ が t,u に関して高々3次曲面したがつて $v=f(x,z)$ が x,z に関して高々3次曲面ならば，(24)式は全く誤差をともなわず，4次曲面または5次曲面ならば，その誤差は正しく (25) 式で与えられる。

つぎに，(11)の上より 21 個の方程式をとり，これらを満足する根を求めよう。

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}R_i=1,\ \sum_{i=1}^{n}R_it_i{}^2=\sum_{i=1}^{n}R_iu_i{}^2=1/3,\\
&\sum_{i=1}^{n}R_it_i{}^4=\sum_{i=1}^{n}R_iu_i{}^4=1/5,\ \sum_{i=1}^{n}R_it_i{}^2u_i{}^2=1/9,\\
&\sum_{i=1}^{n}R_it_i=\sum_{i=1}^{n}R_iu_i=\sum_{i=1}^{n}R_it_iu_i=\sum_{i=1}^{n}R_it_i{}^3\\
&=\sum_{i=1}^{n}R_it_i{}^2u_i=\sum_{i=1}^{n}R_it_iu_i{}^2=\sum_{i=1}^{n}R_iu_i{}^3=\sum_{i=1}^{n}R_it_i{}^3u_i\\
&=\sum_{i=1}^{n}R_it_iu_i{}^3=\sum_{i=1}^{n}R_it_i{}^5=\sum_{i=1}^{n}R_it_i{}^4u_i=\sum_{i=i}^{n}R_it_i{}^3u_i{}^2\\
&=\sum_{i=1}^{n}R_it_i{}^2u_i{}^3=\sum_{i=1}^{n}R_it_iu_i{}^4=\sum_{i=1}^{n}R_iu_i{}^5=0
\end{aligned}\right\}\cdots(26)$$

$n=8$（I組とII組）とし，前述の考察にしたがつて(26)を簡単にすると，

$$\left.\begin{aligned}
&4R_1+4R_2=1,\ 2R_1t_1{}^2+4R_2t_2{}^2=1/3,\\
&2R_1t_1{}^4+4R_2t_2{}^4=1/5,\ 4R_2t_2{}^4=1/9
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(27)$$

となり，(26)において右辺が0となる 15 式はすべて満足されていることが容易にわかる。

(27)式を解くと，つぎの根がえられる。

$$t_1=\sqrt{7/15},\ t_2=\sqrt{7/9};\ R_1=10/49,\ R_2=9/196$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(28)$$

ゆえに，(26)を満足する8点は，

$$\left.\begin{aligned}
&(-\sqrt{7/15},\ 0),\ (0,\ -\sqrt{7/15}),\\
&(0,\ \sqrt{7/15}),\ (\sqrt{7/15},\ 0),\\
&(-\sqrt{7/9},\ -\sqrt{7/9}),\ (-\sqrt{7/9},\ \sqrt{7/9}),\\
&(\sqrt{7/9},\ -\sqrt{7/9}),\ (\sqrt{7/9},\ \sqrt{7/9})
\end{aligned}\right\}\cdots(29)$$

であつて，(2) 式により x,z の値になおすと，

$$\left.\begin{aligned}
&x_1=0.158\,b,\ z_1=0.500\,h\quad x_2=0.500\,b,\ z_2=0.158\,h\\
&x_3=0.500\,b,\ z_3=0.842\,h\quad x_4=0.842\,b,\ z_4=0.500\,h\\
&x_5=0.059\,b,\ z_5=0.059\,h\quad x_6=0.059\,b,\ z_6=0.941\,h\\
&x_7=0.941\,b,\ z_7=0.059\,h\quad x_8=0.941\,b,\ z_8=0.941\,h
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(30)$$

したがつて，全断面平均流速 V_m は，

$$V_m=(1/196)\{40(v_{\underset{0.500}{0.158}}+v_{\underset{0.158}{0.500}}+v_{\underset{0.842}{0.500}}+v_{\underset{0.500}{0.842}})$$
$$+9(v_{\underset{0.059}{0.059}}+v_{\underset{0.941}{0.059}}+v_{\underset{0.059}{0.941}}+v_{\underset{0.941}{0.941}})\}\cdots\cdots\cdots(31)$$

このときの誤差 E の大体の値を，(7) 式と(10) 式とにおける $a_{6,0},a_{5,1},a_{4,2},a_{3,3},a_{2,4},a_{1,5},a_{0,6}$ の7項について，それぞれの項の差の代数和として求めると，

(7) 式では，

$$a_{6,0}/7+a_{4,2}/15+a_{2,4}/15+a_{0,6}/7\cdots\cdots\cdots(32)$$

(10)式では，

$$a_{6,0}\sum_{i=1}^{8}R_it_i{}^6+a_{5,1}\sum_{i=1}^{8}R_it_i{}^5u_i+a_{4,2}\sum_{i=1}^{8}R_it_i{}^4u_i{}^2$$
$$+a_{3,3}\sum_{i=1}^{8}R_it_i{}^3u_i{}^3+a_{2,4}\sum_{i=1}^{8}R_it_i{}^2u_i{}^4$$
$$+a_{1,5}\sum_{i=1}^{8}R_it_iu_i{}^5+a_{0,6}\sum_{i=1}^{8}R_iu_i{}^6\cdots\cdots\cdots(33)$$

(33) 式に (29) の結果を入れると，

$$\sum_{i=1}^{8}R_it_i{}^6=\sum_{i=1}^{8}R_iu_i{}^6=2(10/49)(7/15)^3$$
$$+4(9/196)(7/9)^3=259/2025$$

$$\sum_{i=1}^{8}R_it_i{}^4u_i{}^2=\sum_{i=1}^{8}R_it_i{}^2u_i{}^4=4(9/196)(7/9)^3=7/81$$

$$\sum_{i=1}^{8}R_it_i{}^5u_i=\sum_{i=1}^{8}R_it_i{}^3u_i{}^3=\sum_{i=1}^{8}R_it_iu_i{}^5=0$$

となるから，

$$E=\left(\frac{1}{7}-\frac{259}{2\,025}\right)a_{6,0}+\left(\frac{1}{15}-\frac{7}{81}\right)a_{4,2}+\left(\frac{1}{15}-\frac{7}{81}\right)a_{2,4}$$
$$+\left(\frac{1}{7}-\frac{259}{2\,025}\right)a_{0,6}=\frac{212}{14\,175}(a_{6,0}+a_{0,6})$$
$$-\frac{8}{405}(a_{4,2}+a_{2,4})=\frac{212}{14\,175\cdot 6!}\left(\frac{\partial^6 g}{\partial t^6}+\frac{\partial^6 g}{\partial u^6}\right)_{\substack{t=0\\u=0}}$$
$$-\frac{8\cdot 15}{405\cdot 6!}\left(\frac{\partial^6 g}{\partial t^4\partial u^2}+\frac{\partial^6 g}{\partial t^2\partial u^4}\right)_{\substack{t=0\\u=0}}$$
$$=\frac{53}{2\,551\,500}\left(\frac{\partial^6 g}{\partial t^6}+\frac{\partial^6 g}{\partial u^6}\right)_{\substack{t=0\\u=0}}$$
$$-\frac{1}{2\,430}\left(\frac{\partial^6 g}{\partial t^4\partial u^2}+\frac{\partial^6 g}{\partial t^2\partial u^4}\right)_{\substack{t=0\\u=0}}\cdots\cdots\cdots\cdots(34)$$

(34)式より明らかなように，$v=g(t,u)$ が t,u に関して高々5次曲面したがつて $v=f(x,z)$ が x,z に関して高々5次曲面ならば，(31) 式は全く誤差をともなわず，6次曲面または7次曲面ならば，その誤差は正しく (34) 式で与えられる。

2. 矩形断面における流量測定

水面巾が b，水深が h であるような矩形断面の流量は，2次元における平均値法を応用して容易かつ正確に測定することができる[1]。このとき，水深は水面巾に沿つて一定であるから，横断流量曲線の次数は平均流速曲線の次数と同じになり，自然河川の場合にくらべて，横断流量曲線の次数は低く，したがつて水面巾に沿つてとるべき測定点の数は比較的少なくてすむはずである。自然河川の場合，利根川栗橋地先におけるように，水面巾が 300 m を越えるようなときでも，水面巾に沿つてとるべき測定点は7点で十分であり，しかもこの7点のうち，両岸に近い2点を省略し5点として十分満足すべき結果がえられる[2]。そこで，矩形のような整正断面では，水面巾に沿つてとるべき測定点の数は4つで十分ではないかと思われる。このように，2次元での平均値法を応用すれば，簡易に流量を測定しうるわけであるが，ここでは，3次元への平均値法の拡張を適用して流量を求める方式を掲げ，二三の例についてその精度を検討してみたいと思う。

いま，$v_{\substack{0.211\\0.789}}$ は，水面巾に沿つて一方の岸より（どちらの岸からでもよい）2割1分1厘，水深に沿つて水表面より（河底からでもよい）7割8分9厘の点の流速を表わすものとし，他も同様とすれば，全断面平均流速 V_m は，流速分布の曲面が高々3次ならば4点法（2つの方式がある），高々5次ならば8点法を用い，つぎの式で表わされる。

$$n=4\;;\;V_m=(1/4)(v_{\substack{0.211\\0.211}}+v_{\substack{0.211\\0.789}}+v_{\substack{0.789\\0.211}}+v_{\substack{0.789\\0.789}})\cdots\cdots\cdots\cdots(35)$$

$$V_m=(1/4)(v_{\substack{0.092\\0.500}}+v_{\substack{0.500\\0.092}}+v_{\substack{0.500\\0.908}}+v_{\substack{0.908\\0.500}})\cdots\cdots\cdots\cdots(36)$$

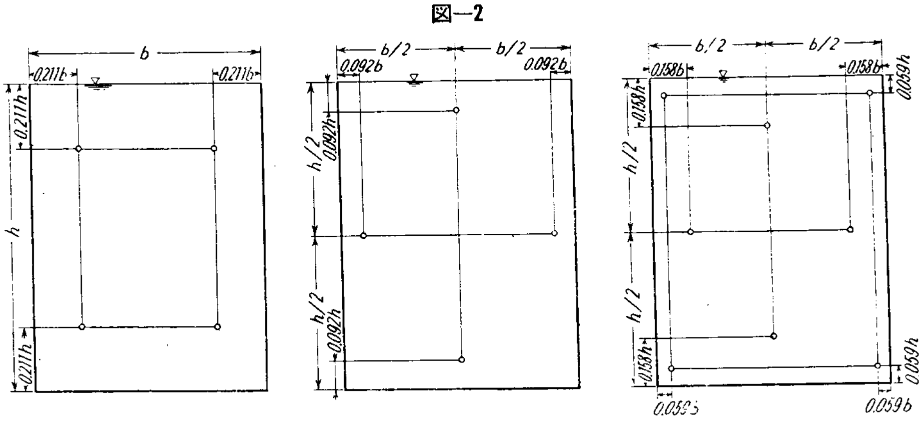
$$n=8\;;\;V_m=(1/196)\{40(v_{\substack{0.158\\0.500}}+v_{\substack{0.500\\0.158}}+v_{\substack{0.500\\0.842}}+v_{\substack{0.842\\0.500}})+9(v_{\substack{0.059\\0.059}}+v_{\substack{0.059\\0.941}}+v_{\substack{0.941\\0.059}}+v_{\substack{0.941\\0.941}})\}\cdots\cdots(37)$$

図—2 は，これらの公式に用いられる観測点を図示したものである。4点法の2つの方式のうちでは，観測点が中央部に近く，観測が容易である (35) 式の方が推奨される。

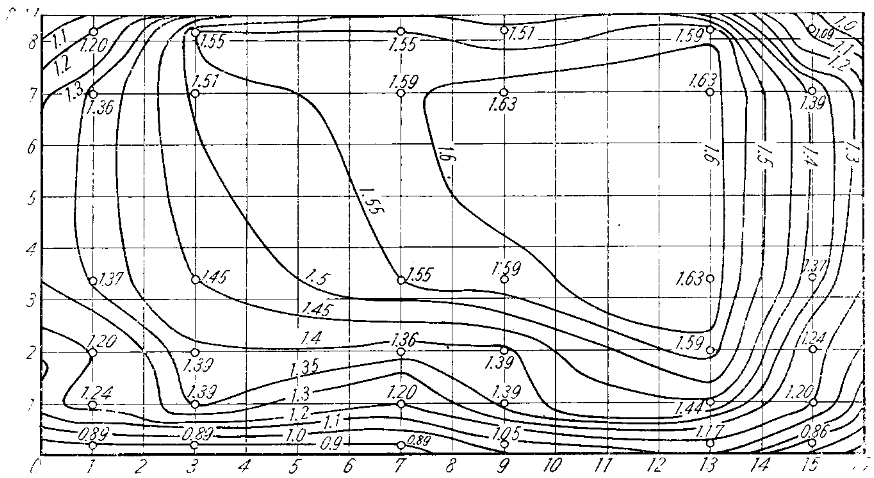
図—3 は，1900～1901 年に Cornell 大学水理実験室において，E.C. Murphy により実測された資料[3]の1つである。この実験の目的は鋭縁堰による流量と流速計を用いかつ種々な方法によつて測定される流量との比較研究であつて，ここに掲げた資料は，Series C, No. 14 の実験結果である。巾および水深は ft 単位，観測点に示した数字は，Small Price Meter によつて測定された流速を ft/sec 単位で示したものである。このとき，堰による全断面平均流速 V_m は，V_m ＝1.45 ft/sec と測定されている。

さて，図に示したように，等流速線は相当複雑であ

図—2



図—3



るから，流速曲面を3次としては近似度が悪い。そこで，高々5次として（37）式を用い全断面平均流速 V_m を求めてみよう。図—3の等流速線を利用して，つぎの各値（単位はft/sec）が読みとられる。

$v_{\substack{0.158\\0.500}}=1.45$，$v_{\substack{0.500\\0.158}}=1.61$，$v_{\substack{0.500\\0.842}}=1.32$，

$v_{\substack{0.842\\0.500}}=1.58$，$v_{\substack{0.059\\0.059}}=1.24$，$v_{\substack{0.059\\0.941}}=1.02$，

$v_{\substack{0.941\\0.059}}=1.11$，$v_{\substack{0.941\\0.941}}=1.02$

$\therefore\ V_m=1.42$，

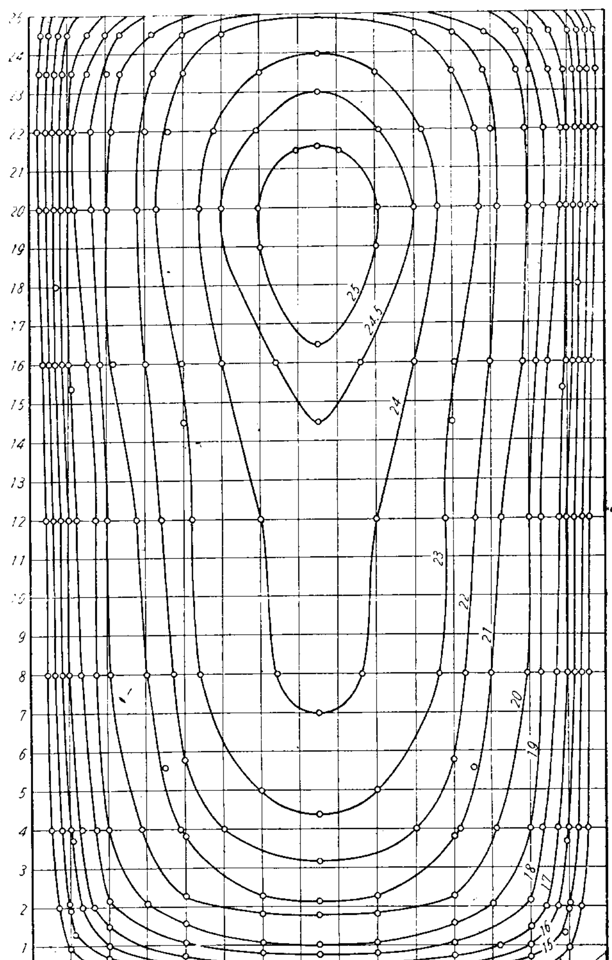
$E=(1.42-1.45)/1.45=-2.1\%$

このように，流速分布がかなり乱れているような場合でも8点法を用いれば，その誤差は測定誤差以内と考えられ，十分満足すべき結果がえられる（4点法の（35）式を用いると，$E=+5.5\%$となつた）。

水路壁の粗度が一様で，測定地点の前後に彎曲部がないような一様な整正断面の水路では，流速分布は断面の中心線に関して左右対称である場合が多い。Nikuradse は，円形，三角形，矩形の閉水路および矩形の開水路について流速分布を精密に測定し，断面形による流速分布の状態，2次流の影響などについて研究した[4]。図—4 はその資料の1つで，流速分布は断面の中心線に関して左右対称であるから，（37）式における観測点はさらに減少してわずかに5点となる。

全断面平均流速は，堰による測定値がないため知ることができない。そこで，図—4 を方眼紙上に画き，等流速線間の面積を目盛を

図—4



数えて計算した。その結果はつぎのとおりである。ここに，A_{14} は流速が 14 cm/sec である等流速線によつて囲まれた面積（cm^2）を表わし，他も同様である。ただし，A_0 は全断面積（cm^2）である。

$A_0=375.00$，$A_{14}=349.70$，$A_{15}=337.36$，$A_{16}=326.09$，$A_{17}=314.30$，$A_{18}=295.64$，$A_{19}=275.04$，$A_{20}=246.64$，$A_{21}=213.88$，$A_{22}=175.70$，$A_{23}=136.42$，$A_{24}=69.79$，$A_{24.5}=28.35$，$A_{25}=11.68$

そこで，例えば，A_{14} と A_{15} との間の流量は，$(A_{14}-A_{15})(15+14)/2=178.93(cm^3/sec)$ で求められ，他も同様である。ただし，A_0 と A_{14} との間の流量は，流速が水路壁で 0 で壁を離れると急激に増大するため，この間の流速の平均を 7 cm/sec としたのでは過小であるから，12 cm/sec とした。また，25 cm/sec の等流速線によつて囲まれた部分の流量は，流速の平均を 25.5 cm/sec として計算した。計算の結果，全断面平均流速 V_m は，$V_m=20.7$ cm/sec となつた。

さて，図—4 の等流速線を利用して，(37) 式の各観測点における流速（単位は cm/sec）を読みとると，

$v_{0.158 \atop 0.500}=20.5$，$v_{0.500 \atop 0.158}=25.2$，$v_{0.500 \atop 0.842}=22.6$，

$v_{0.059 \atop 0.059}=17.0$，$v_{0.059 \atop 0.941}=14.5$

$\therefore\ V_m=21.0,\ E=(21.0-20.7)/20.7=+1.4\%$

この場合にも十分満足すべ結果がえられる（4 点法の(35)式を用い，かつ，流速分布の対称性を考えて，左断面の点のみを用いて計算すると，$E=+4.8\%$ となつた）。

3. 結　語

（1） 平均値法を 3 次元に拡張すれば，3 次曲面まで誤差をともなわない 4 点法の式として，(35)式および (36) 式がえられる。この 2 つの方式のうちでは，実測が容易な (35) 式が推奨される。さらに，5 次曲面まで誤差をともなわない 8 点法の式として，(37)式がえられる。

（2） 矩形断面の開水路についての Murphy の実験資料に上の式を適用すると，8 点法で十分満足すべき結果がえられる。また，Nikuradse の実験資料のように，流れが断面の中心線に関して左右対称な場合には，わずか 5 点で十分満足すべき結果がえられる。

参 考 文 献

1) 春日屋伸昌：平均値法による流量算定式について，土木学会誌 第 38 巻 第 7 号.
2) 春日屋伸昌：平均値法の原理と流量測定への応用，中央大学七十周年記念論文集，昭和 30 年 11 月.
3) E.C. Murphy : Accuracy of Stream Measurements, 1904, p. 59～p. 100.
4) J. Nikuradse : Untersuchung über die Geschwindigkeitsverteilung in turbulenten Strömungen, Forschungsarbeiten des V.D.I., 1926, p. 281.

（昭.30.5.17）

三径間連続バリの支承沈下が曲げモーメントに与える影響について

正員　深　谷　俊　明*

THE BENDING MOMENT DUE TO THE SETTLEMENT OF SUPPORTS OF A THREE-SPAN CONTINUOUS BEAM

(JSCE Dec. 1955)

Toshiaki Fukaya, C.E. Member

Synopsis It is generally recognized that settling of supports of a three-span continuous beam bridge greatly effects the bending moment. However, inasmuch as the calculation to determine the influence of the settlement is comparatively complicated and not yet fully developed, designeers generally work up a plan on the assumption that supports are not subject to settlement.

On the otherhand, there are many cases where we must consider the settlement of supports in designing. Furthermore, when the settlement occurrs, the bending moments of bridge originally considered in designing should sometimes change, then we must correct the calculation and secure the safety of the bridge. In such consideration, the writer has tried to induce a general formula to figure out the bending moment due to

* 国鉄技師，施設局特殊設計室