

表—4 各推定法による MPN の各種代表値の比較  
(単位 0.01 cc)

	$\lambda$ , 平均値	$\lambda_m$ , 最頻値	$\lambda_0$ , 中央値	$\lambda_{95}$
新推定法	147.0	77.0	118.0	294.0
Thomas 法	123.4	—	—	211.0
3 段階の稀釈率に対する MPN の算術平均法	146.06	—	—	—

はきわめて不良となることを付記したい。また参考までに、以上の推定結果を、やはり本例について第 2 節で述べた Thomas 法を適用した結果とともに一覧とすれば、表—4 のようになる。この表中最下行に示した値は、表—3 中の各番号ごとに 3 段階の稀釈率を適当に選び、これらについて MPN 表<sup>2)</sup>より求めた値を合計し、総数 31 で割った平均値である。

## 6. 結 語

(1) Thomas 法は、MPN 集団の平均値や 95% 非超過確率値しか推定できず、計算も面倒であるのにくらべ、われわれの方法では、MPN 集団の分布全体を推定し、従つて平均値のみならず中央値、最頻値などの代表値、その他任意の非超過確率値を求めることができる。元来個々の MPN は最頻値の性格を持つているから、その集団についての定性的代表値としても最頻値を用いるべきであり、これを求めうる点に本法の利点がある。また慣用の対数正規分布を活用したために、推定に当つて特殊な数表を用意する必要はなく、信頼度をしらべるのも容易である。(2) さらにこの特性を利用し、一般に市販されている対数確率紙で半図式的に分布、従つて各種代表値を推定し、また付記した副尺によつてただちに任意非超過確率と MPN との関係を読みうるような簡易推定法を提案したが、多数の実例について適用した結果、紙上の標本点はほとんど直線的に配置されたから、本法における

仮定の妥当性と、この簡易法の実用性とが同時に立証されたことになつた。平均値の近似推定に当つて特に用いた  $(0 \rightarrow \infty)$  型対数正規分布については、Thomas は一般細菌試験成績よりみてその適合性が悪いと述べているが<sup>3)</sup>、こうした一例をもつて大腸菌群の場合を律するのは早急であると思う。(3) 各種の上、下水処理、特に塩素滅菌、の効率を調べ、さらに疫学統計と照し合わせて水質上の安全度を判定し、さかのぼつては現行各水質の MPN 標準を根本的に再検討するような場合に、本論の成果は今後大いに利用できると思われる。

最後に、本研究推進に当り、文部省および厚生省の研究費より援助を受けたことを付記する。

## 参 考 文 献

- 1) Prescott, Winslow, McCrady : Water Bacteriology, 6th, Ed., pp. 131-141.
- 2) J.K. Hoskins : Most Probable Number for Evaluation of Coli-Aerogenes (Tests by Fermentation Tube Method, Reprint No. 1621, U.S. Public Health Repts., 49, 1940, pp. 393-405.
- 3) H.A. Thomas, Jr. : On Averaging Results of Coliform Tests, Jour., Boston Soc., Civ. Eng., Vol 39, No. 3, July 1952, pp. 253-270. (抄録, 本誌, 38 巻, 12 号, 昭.28, 12 月, pp. 546-7)
- 4) 水道協会 : 飲料水の判定標準とその試験方法, 昭.25, p.4.
- 5) 岩井重久 : Slade 型分布の非対称性の吟味及び 2, 3 の新解法, 土木学会論文集, 4 号, 昭.24. 6 月, pp. 84-104.
- 6) 岩井重久 : 濾過砂粒度の統計的解析とその濾過理論への応用, 1~4, 水道協会雑誌, 203, 204, 242, 243 号; 昭.26, 9, 10 月, 昭.29, 12 月, 昭.30, 1 月; pp. 24-34, 12-24, 9-15, 13-19 (昭.30.4.26)

## 箱桁の断面変形について

准員 小松定夫\*

### DEFORMATION OF THE CROSS-SECTION IN BOX GIRDER.

(JSCE Nov. 1955)

Sadao Komatsu C.E. Assoc. Member

**Synopsis** An approximate solution is obtained for the deformation of the cross-section in box girder subjected to a pure bending moment. Here it is assumed that the box girder is reinforced with equispaced rigid diaphragms. In order to evaluate the decrement of flexural rigidity due to distortion, some numerical results are given for the typical cross-sections having practical dimensions.

\* 大阪市立大学講師, 理工学部橋梁工学研究室

**要旨** 単純曲げモーメントを受ける箱桁の断面変形についての近似解を求め、さらに実用的断面寸法を有する箱桁に対する数値計算を実施して、横断面の変形にもとづく箱桁の曲げ剛性の減少量を評価する。ここでは箱桁が等間隔に配置された剛なる隔板で補強されているものと仮定しておく。

**1. 緒言**

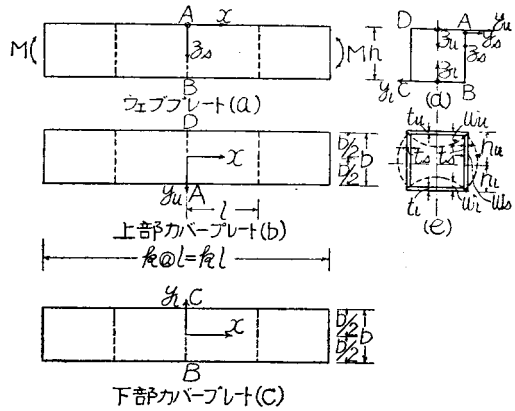
薄肉の曲り円管が曲げモーメントを受ける場合にはいわゆる初等ハリ理論によつて算定したタワミ量よりも大きいタワミを生ずる。この現象がいかなる原因によるものであるかということを実験的に究明したのは Th. v. Kármán<sup>1)</sup> である。曲げの引張及び圧縮応力が曲率半径方向の分力をもち、この分力のために横断面がほぼ楕円形に彎曲し、有効断面2次モーメントの減少をとめない、曲げ剛性が低下する。一方薄肉矩形断面の曲りバリに関し、有効断面2次モーメントを与える公式を導いた S.P. Timoshenko<sup>2)</sup> の論文がある。この公式の特別な場合として真直な箱桁では全く剛性が低下しないという結果がでる。しかし真直な箱桁においても曲げの状態においては、程度の差異はあつてもやはり曲りバリと同じく曲率半径方向の分力が作用して、断面変形が生ずるものと考えてよい。このような見地から E. Chwalla<sup>3)</sup> が真直な円管について論じている。また隔板のような横方向の防撓材を用いた場合に、このような影響をどの程度に防止できるか、そして縦強度に寄与するかどうかという点について太田友瀾<sup>4)</sup> の研究がある。これは理論の簡易化のためにウェブプレートは剛板であつて断面は2重対称と仮定している。

一般に橋桁においては、ウェブプレートがカバープレートに比してむしろ薄いので、ウェブプレートもカバープレートとともに一体となつて横断面内で彎曲していると考えるのが妥当である。よつてウェブの変形をも考慮に入れた場合には、ウェブの剛度に対する上下カバープレートの剛度の比、従つて板厚の比が彎曲の状態を支配する一要素であると考えられる。同じことが箱桁の幅と高さの比に対してもいえる。そこで既存の箱桁橋に使用されている寸法比、あるいは将来実用化されそうな寸法比の範囲で種々な値を与えて、断面2次モーメントの減少の様子を調べた。最後に隔板間隔と板厚との比、桁高と板厚の比が剛性に与える影響の程度を考察した。

**2. 座標系及び仮定**

桁高  $h$ 、幅  $b$  の箱桁の内部に間隔  $l$  で隔板が配置されている。ウェブプレート、上下カバープレートの厚さをそれぞれ  $t_w$ 、 $t_u$ 、 $t_l$  とする。いま 図-1 (a) (b)

図-1 座標系と断面寸法



(c)(d) に示すように各薄板について別個の直角座標系  $(x, y_s, z_s)$ ;  $(x, y_u, z_u)$ ;  $(x, y_l, z_l)$  を用いる。  $x$  軸は各板ともいづれも桁軸の方向に一致させる。  $y$ 、 $z$  軸は横断面方向に右手系をなすようにとつた。添字  $s$  はウェブに、 $u$ 、 $l$  は上下のプレートに関する量であることを示す。主題の単純曲げモーメントが桁の両端に作用すれば、上下カバープレートは  $z_u$  方向及び  $z_l$  方向にそれぞれ  $w_u$ 、 $w_l$  だけタワミ、ウェブは  $y_s$  方向に  $w_s$  だけタワむことになる。その変形の状態は 図-1 (e) のようになる。

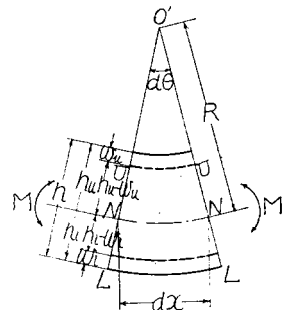
本文では箱桁の力学的特性を考慮して次のような仮定を設けることにした。

- (1) 隔壁は距離  $l$  で等間隔に配置されていて、かつ剛である。実際には隔壁にも面内応力が生じ、面内でヒズミをともなうが、各板のタワミ  $w$  に比して隔壁のヒズミは高次の微小量とみなせるので、そのための影響は無視する。
- (2) 横断面の変形後も上下カバープレートとウェブとは常に直角を保持している。
- (3) 各板は十分に薄いので板面に直角な垂直応力は0とする。
- (4) 桁の断面形状は重心を通る軸  $z_u$  に関し左右対称である。
- (5) 各薄板の横断面は常に平面保持に従う。

**3. 応力とヒズミ**

彎曲中の各薄板の応力状態を知るためにハリの微小要素  $dx$  について考える (図-2)。

図-2 微小要素の変形



桁の中立軸 NN の微小長さ  $dx$  は曲げの状態においても変化しない。いま NN の曲率半径を  $R$  とする。このとき桁軸にそって縦断面内で上部カバープレートの微小要素  $UU$  は  $w_u$  だけ変位し図-2 の点線の位置にくる。下部カバープレートの要素  $LL$  も  $w_l$  だけ変位している。このことを考慮してまず上部カバープレートの垂直応力については、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ux} &= E \alpha z_u - E(h_u - w_u)/R \\ \sigma_{uy} &= E \beta z_u \end{aligned} \right\} \dots\dots(1)$$

と書ける。添字  $x, y$  はそれぞれ  $x$  軸及び  $y$  軸方向の応力であることを表わす。また  $\alpha, \beta$  は座標  $z_u$  に無関係な常数である。この常数を含む項は板のタワミ  $w$  のために  $z_u$  に比例する平板としての応力を与えている。第2項は工学的ハリ理論にいう繊維応力の値で、中立軸から板中央面までの距離の減少を考慮したものである。薄板構造では一般に  $\sigma_z = 0$  と仮定できるので、平板のタワミ  $w$  と応力  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  とは周知の関係式で示される。 $\nu$  をポアソン比として

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{-Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \tau_{xy} = \frac{-Ez}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \\ \sigma_y &= \frac{-Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \end{aligned} \right\} \dots\dots(2)$$

上部カバープレートのタワミは桁の重心軸のタワミ  $\tilde{w}$  と横断面内の変形によるタワミ  $w_u$  との和と考えられ、式(2)中の  $w$  には

$$w = w_u + \tilde{w} \dots\dots(3)$$

が用いられる。従つて式(2)中の常数  $\alpha, \beta$  は

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{-1}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_u}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_u}{\partial y_u^2} \right) \\ \beta &= \frac{-1}{1-\nu^2} \left[ \frac{\partial^2 w_u}{\partial y_u^2} + \nu \left( \frac{\partial^2 w_u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} \right) \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots(4)$$

また周知の関係

$$\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} = -1/R \dots\dots(5)$$

と式(4)を式(1)に代入して

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ux} &= \frac{-Ez_u}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w_u}{\partial x^2} - \frac{1}{R} + \nu \frac{\partial^2 w_u}{\partial y_u^2} \right) - \frac{E}{R} (h_u - w_u), \\ \sigma_{uy} &= \frac{-Ez_u}{1-\nu^2} \left[ \frac{\partial^2 w_u}{\partial y_u^2} + \nu \left( \frac{\partial^2 w_u}{\partial x^2} - \frac{1}{R} \right) \right], \\ \tau_{uxy} &= \frac{-Ez_u}{1+\nu} \frac{\partial^2 w_u}{\partial x \partial y_u} \end{aligned} \right\} \dots\dots(6)$$

次に下部カバープレートについては板としての絶対タワミ  $w$  は

$$w = w_l - \tilde{w} \dots\dots(7)$$

であるから、一般関係式(2)を用いて

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{lx} &= \frac{-Ez_l}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w_l}{\partial x^2} + \frac{1}{R} + \nu \frac{\partial^2 w_l}{\partial y_l^2} \right) + \frac{E}{R} (h_l - w_l) \\ \sigma_{ly} &= \frac{-Ez_l}{1-\nu^2} \left[ \frac{\partial^2 w_l}{\partial y_l^2} + \nu \left( \frac{\partial^2 w_l}{\partial x^2} + \frac{1}{R} \right) \right], \\ \tau_{lxy} &= \frac{-Ez_l}{1+\nu} \frac{\partial^2 w_l}{\partial x \partial y_l} \end{aligned} \right\} \dots\dots(8)$$

式(6)と(8)とを比較してただちにわかるように  $R$  の前の符号のみが逆になつていて、他の部分の形は全く同じである。最後にウェブプレートについては、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{sx} &= \frac{-Ey_s}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_s}{\partial z_s^2} \right) - \frac{E}{R} (h_u - z_s) \\ \sigma_{sz} &= \frac{-Ey_s}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w_s}{\partial z_s^2} + \nu \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \right), \\ \tau_{sxz} &= \frac{-Ey_s}{1+\nu} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial z_s} \end{aligned} \right\} \dots\dots(9)$$

以上の応力によつて生ずるヒズミ  $\epsilon$  は一般化された Hook の法則によつて容易に求められる。さらに板が中立軸に平行な繊維面  $UU$  より傾いているための中央面の伸びによる2次のヒズミ  $\epsilon'$  が考えられる。そこで上部カバープレートに対して、

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{ux} &= -z_u \left( \frac{\partial^2 w_u}{\partial x^2} - \frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} (h_u - w_u), \\ \tau_{uxy} &= -2 z_u \frac{\partial^2 w_u}{\partial x \partial y_u}, \\ \epsilon_{uy} &= -z_u \frac{\partial^2 w_u}{\partial y_u^2} + \frac{\nu}{R} (h_u - w_u), \\ \epsilon_{ux'} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_u}{\partial x} \right)^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots(10)$$

下部カバープレートおよびウェブのヒズミに関しても同じように得られる。

#### 4. ヒズミエネルギーと境界条件

前節で得られた応力より断面力を計算し、板面に垂直な方向の釣合条件式より各薄板のタワミに関する基礎微分方程式を導けば、次のような結果となつた。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^4 w_u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_u}{\partial x^2 \partial y_u^2} + \frac{\partial^4 w_u}{\partial y_u^4} &= \frac{Et_u h_u}{D_u R^2} - \frac{Et_u h_u}{D_u R} \frac{\partial^2 w_u}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^4 w_l}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_l}{\partial x^2 \partial y_l^2} + \frac{\partial^4 w_l}{\partial y_l^4} &= \frac{Et_l h_l}{D_l R^2} + \frac{Et_l h_l}{D_l R} \frac{\partial^2 w_l}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial z_s^2} + \frac{\partial^4 w_s}{\partial z_s^4} &= -\frac{Et_s}{D_s R} (h_u - z_s) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots(11)$$

ここに  $D$  は板剛度を表わす。上部プレートについては桁軸方向に面内圧縮力  $Et_u h_u / R$  と等分布横荷重  $Et_u h_u / R^2$  を受ける板の微分方程式と一致している。下部プレートでは面内引張力  $Et_l h_l / R$  と等分布荷重  $Et_l h_l / R^2$  を受ける板に相当している。このような4枚の連続板を下記の境界条件によつて解けばタワミが

定まるが、本文の目的は局部的タワミ量でなく、桁全体の剛性の変化を知ることである。そこでこのような方程式を取扱うよりも直接的解法を選んだ方が解決への近道であると思われるので、最も代表的な Ritz 法を使うことにする。前節の応力とヒズミとからヒズミエネルギー  $V$  を算出すれば、

$$\begin{aligned}
 V = & \frac{1}{2} \int_0^l \int_{-b/2}^{b/2} \left\{ D_u \left[ \left( \frac{\partial^2 w_u}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w_u}{\partial y_u^2} \right)^2 \right. \right. \\
 & + 2 \nu \frac{\partial^2 w_u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_u}{\partial y_u^2} - 2 \frac{\nu}{R} \frac{\partial^2 w_u}{\partial y_u^2} - \frac{2}{R} \frac{\partial^2 w_u}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \\
 & + 2(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 w_u}{\partial x \partial y_u} \right)^2 \left. \right\} + \frac{Et_u}{R^2} (h_u - w_u)^2 \\
 & - \frac{Et_u}{R} h_u \left( \frac{\partial w_u}{\partial x} \right)^2 dx dy_u + \frac{1}{2} \int_0^l \int_{-b/2}^{b/2} \left\{ D_l \right. \\
 & \left[ \left( \frac{\partial^2 w_l}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w_l}{\partial y_l^2} \right)^2 + 2 \nu \frac{\partial^2 w_l}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_l}{\partial y_l^2} + 2 \frac{\nu}{R} \frac{\partial^2 w_l}{\partial y_l^2} \right. \\
 & + \frac{2}{R} \frac{\partial^2 w_l}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} + 2(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 w_l}{\partial x \partial y_l} \right)^2 \left. \right] \\
 & + \frac{Et_l}{R^2} (h_l - w_l)^2 + \frac{Et_l}{R} h_l \left( \frac{\partial w_l}{\partial x} \right)^2 dx dy_l \\
 & + \int_0^l \int_0^h \left\{ D_s \left[ \left( \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w_s}{\partial z_s^2} \right)^2 + 2 \nu \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_s}{\partial z_s^2} \right. \right. \\
 & + 2(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial z_s} \right)^2 \left. \right\} + \frac{Et_s}{R^2} (h_u - z_s)^2 \\
 & - \frac{Et_s}{R} (h_u - z_s) \left( \frac{\partial w_s}{\partial x} \right)^2 dx dz_s \dots\dots\dots (12)
 \end{aligned}$$

エネルギー極小の原理にもとづき、 $w$  の変分  $\delta w$  に対して  $\delta V = 0$  なるような  $w_u, w_l, w_s$  の値を求めるといふ変分問題と考へて、変分計算を施せば Euler の微分方程式として既述の 3 つの方程式 (11) がえらる。

境界条件としては板の幾何学的関係および隣接板との連続の状態から次のようにいえる。

$$\left. \begin{aligned} w_u = 0, \quad \partial w_u / \partial x = 0 \quad (x = 0, l); \\ w_u = 0 \quad (y_u = \pm b/2) \end{aligned} \right\} \dots\dots (13)$$

$$\left. \begin{aligned} w_l = 0, \quad \partial w_l / \partial x = 0 \quad (x = 0, l); \\ w_l = 0 \quad (y_l = \pm b/2) \end{aligned} \right\} \dots\dots (14)$$

$$\left. \begin{aligned} w_s = 0, \quad \partial w_s / \partial x = 0 \quad (x = 0, l); \\ w_s = 0 \quad (z_s = 0, h) \end{aligned} \right\} \dots\dots (15)$$

連続条件として仮定 (2) に従い隅角部のタワミ角を等しくおくと

$$- \left[ \frac{\partial w_u}{\partial y_u} \right]_{y_u = b/2} = \left[ \frac{\partial w_s}{\partial z_s} \right]_{z_s = 0} \dots\dots\dots (16)$$

$$\left[ \frac{\partial w_l}{\partial y_l} \right]_{y_l = -b/2} = - \left[ \frac{\partial w_s}{\partial z_s} \right]_{z_s = h} \dots\dots\dots (17)$$

また隅角部のモーメントの釣合条件より

$$\begin{aligned} D_u \left[ \frac{\partial^2 w_u}{\partial y_u^2} + \nu \frac{\partial^2 w_u}{\partial x^2} \right]_{y_u = b/2} - \frac{D_u \nu}{R} \\ + D_s \left[ \frac{\partial^2 w_s}{\partial z_s^2} + \nu \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \right]_{z_s = 0} = 0 \dots\dots\dots (18)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_l \left[ \frac{\partial^2 w_l}{\partial y_l^2} + \nu \frac{\partial^2 w_l}{\partial x^2} \right]_{y_l = -b/2} + \frac{D_l \nu}{R} \\ + D_s \left[ \frac{\partial^2 w_s}{\partial z_s^2} + \nu \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \right]_{z_s = h} = 0 \dots\dots\dots (19)
 \end{aligned}$$

各板の  $x=0$ , 及び  $x=l$  における条件は、隔板で狭まれた各区間とも  $x$  方向に对称の状態に変形することによりえられる。上記 (13)~(19) 式の境界条件を満足する代りに安全側の近似解として、各板の周辺を全部単純支持として、独立に 3 つの方程式 (11) を解けば文献 5) の図表がそのまま利用できて簡略に計算できる。しかし本文では境界条件にできるかぎり忠実であることをねがつて、下記のような座標函数を採用する。

5. タワミの近似解

タワミの近似解としては幾何学的境界条件 (13)~(17) 式を完全に満足する座標函数の有限個の組合せを用いた。

$$\begin{aligned} w_u = & \sum_{m=1}^p \sum_{n=1}^q A_{mn} b (-1)^{n-1} \left( 1 - \cos \frac{2m\pi x}{l} \right) \\ & \cos \frac{(2n-1)\pi}{b} y_u \\ w_l = & \sum_{m=1}^p \sum_{n=1}^q A_{mn} b (-1)^{n-1} \left( 1 - \cos \frac{2m\pi x}{l} \right) \\ & \cos \frac{(2n-1)\pi}{b} y_l \\ w_s = & \sum_{m=1}^p \sum_{n=1}^q A_{mn} h \left( 1 - \cos \frac{2m\pi x}{l} \right) \\ & \sin \frac{(2n-1)\pi}{h} z_s \\ & \dots \dots \dots (20)
 \end{aligned}$$

解 (20) に用いた座標函数は個々に力学的境界条件 (18), (19) を満足しない。しかしエネルギーを極小にする条件より未定係数  $A_{mn}$  の値を決定することによつて  $w$  に自然に満足されるので、このような自然境界条件は座標函数 1 つずつについては、必ずしも満足される必要がない<sup>6)</sup>。周知の式

$$\partial V / \partial A_{mn} = 0 \dots\dots\dots (21)$$

から  $A_{mn}$  に関する連立方程式を次のようにえられた。

$$\begin{aligned} \left( \frac{D_u + D_l}{2b} + \frac{D_s}{h} \right) l \sum_{m=1}^p (2k-1)^4 \pi^4 A_{mk} \\ + \left( \varphi_{rk} - \frac{\nu r}{R} \right) A_{rk} = a_k \quad (k=1, 2, \dots, q) \dots\dots\dots (22)
 \end{aligned}$$

$\sum'$  は  $m=r$  の項を除外した場合の和を意味する。

また

$$\begin{aligned} \varphi_{r,k} &= 4r^4\pi^4[(D_u+D_l)b^3+2D_s h^3]/l^3 \\ &+ 3l(2k-1)^4\pi^4[(D_u+D_l)b+2D_s h]/4 \\ &+ 2r^2(2k-1)^2\pi^4[(D_u+D_l)b+2D_s h]/l \\ \psi_r &= Er^2\pi^2[b^3(t_u h_u - t_l h_l) + t_s h^3(h_u - h_l)]/l \\ \alpha_k &= 2\nu l(2k-1)\pi(D_l - D_u)/R + 2Elb^2(t_u h_u \\ &+ t_l h_l)/R^2(2k-1)\pi \end{aligned}$$

特に式 (22) において  $l \rightarrow \infty$  とすれば、

$$\left(\frac{D_u+D_l}{2b} + \frac{D_s}{h}\right) \sum_{m=1}^p (2k-1)^4 \pi^4 A_{mk} \left(1 + \frac{\delta_{mr}}{2}\right) = \alpha_k \quad (22)'$$

ここに  $\delta_{mr}$  は Kronecker の  $\delta$  である。この場合  $A_{mn}$  は一定値をもつ。これは中間に隔板のない桁になる。

次に式 (22) において  $l \rightarrow 0$  とすれば  $A_{mn} \rightarrow 0$  となり薄板のタワミは完全に防止される。ちょうど隔板が密に入つた場合にほかならない。

### 6. 有効断面 2 次モーメント

初等ハリ理論においては外力モーメント  $M$  と曲率半径  $R$  との間に次のような比例関係が存在している。

$$M = EI/R \quad (23)$$

この関係が箱桁においても成立するものかどうかについて考察する。いま桁の隔板間の区間数を  $f$  とすれば全ヒズミエネルギーは  $fV$  となる。よつて Castigliano の定理より両端の相対的タワミ角  $\theta$  として

$$M = fdV/d\theta$$

この  $\theta$  は  $\theta = fl/R$  であるから両式より

$$M = \frac{1}{l} \frac{dV}{d\left(\frac{1}{R}\right)}$$

ところで  $V$  のなかに含まれる  $A_{mn}$  も  $R$  の函数であるから

$$dV/d\left(\frac{1}{R}\right) = \partial V/\partial\left(\frac{1}{R}\right) + \partial V/\partial A_{mn} \cdot dA_{mn}/d\left(\frac{1}{R}\right)$$

右辺第 2 項は式 (21) によつて消滅するので結局

$$M = \frac{1}{l} \frac{\partial V}{\partial(1/R)} \quad (24)$$

式 (24) 中の  $\partial/\partial(1/R)$  は式 (12) に現われている  $1/R$  のみについて微分することを意味する。式 (24) に式 (12) を用いて

$$\begin{aligned} M &= \frac{EI}{R} + \left\{ \int_0^l \int_{-b/2}^{b/2} \left[ D_u \left( -\frac{\partial^2 w_u}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 w_u}{\partial y_u^2} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{2Et_u h_u}{R} w_u - \frac{Et_u h_u}{2} \left( \frac{\partial w_u}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy_u \right. \\ &\quad \left. + \int_0^l \int_{-b/2}^{b/2} \left[ D_l \left( \frac{\partial^2 w_l}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_l}{\partial y_l^2} \right) - \frac{2Et_l h_l}{R} w_l \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{Et_l h_l}{2} \left( \frac{\partial w_l}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy_l - \int_0^l \int_0^h Et_s (h_u - z_s) \right. \end{aligned}$$

$$\left. \times \left( \frac{\partial w_s}{\partial x} \right)^2 dx dz_s \right\} / l$$

上式の  $w_u, w_l, w_s$  中には既知常数  $A_{mn}$  を含む式 (20) を代入し

$$M = EI_e/R \quad (25)$$

とかける。ここに  $I_e$  は有効断面 2 次モーメントと名づけられるべき量で次式により与えられる。

$$\begin{aligned} I_e &= I - \frac{2\nu}{E} R(D_l - D_u) \sum_{m=1}^p \sum_{n=1}^q A_{mn} (2n-1)\pi \\ &\quad - 4b^2(t_u h_u + t_l h_l) \sum_{m=1}^p \sum_{n=1}^q A_{mn} / (2n-1)\pi \\ &\quad - R[(t_u h_u - t_l h_l)b^3 + t_s h^3(h_u - h_l)] \\ &\quad - \sum_{m=1}^p \sum_{n=1}^q A_{mn}^2 m^2 \pi^2 / 2l^2 = I(1-\mu) \end{aligned} \quad (26)$$

右辺の  $\mu$  は断面 2 次モーメント減少率と定義される。

### 7. 橋桁の断面 2 次モーメント減少率

いま材料鋼のヤング率を  $2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ 、比例限度  $\sigma_p$  を  $2500 \text{ kg/cm}^2$  と仮定し、比例限度における  $t_s/R$  の値を考えると、

$$t_s/R = 2\sigma_p/E\eta = 5000/2.1 \times 10^6 \eta \quad (27)$$

ここに  $\eta = h/t_s$  とおき、上下対称断面としておく。一般に式 (22) 及び (26) よりわかるように  $R$  の減少につれて  $\mu$  は増大する。そして本文では弾性限度内について論じているのであるから、式 (27) の応力時に生ずる断面 2 次モーメント減少率  $\mu$  は弾性範囲内の最大値をとる。従つてこのときの  $\mu$  がどの程度の量であるかが問題になる。そこで  $\sigma_p$  が生ずる場合  $\mu$  の値が桁の寸法比によつてどのように変化するかを調べよう。まず簡単な略算式をうるため式 (26) の  $m=n=1$  の項のみをとつて整頓すれば、

$$\mu = \frac{576 \kappa^4 (1-\nu^2) \eta^4 \zeta^2 t_s^2}{(3\kappa\zeta+1)R^2\pi^6[8(\eta/\xi)^4(\kappa^3\zeta^3+1)+4(\eta/\xi)^2(\zeta^3\kappa+1)+1.5(\zeta^3/\kappa+1)]} \quad (28)$$

ここに  $\xi = l/t_s, \zeta = t_u/t_s = t_l/t_s, \kappa = b/h$

桁の寸法は上記のように多くの因子からなるが一応実用桁を対称にして、 $\kappa=0.7, \zeta=2$  及び  $\kappa=2, \zeta=1.5$  の 2 種類の断面を仮定し、 $\xi, \eta$  の 2 変数の函数とみなして  $\mu$  を求めると、それぞれ

$$\mu = 5.7082 \times 10^{-7} \eta^2 / [29.952(\eta/\xi)^4 + 26.4(\eta/\xi)^2 + 18.643] \quad (29)$$

$$\text{及び } \mu = 1.1126 \times 10^{-5} \eta^2 / [224(\eta/\xi)^4 + 31(\eta/\xi)^2 + 4.0313] \quad (30)$$

一般に式 (28) によつて任意断面の箱桁の  $\mu$  を実用

的に簡略計算できる。ここでは前記の  $\kappa$ ,  $\xi$  の値につき,  $\eta=1200, 1000, 800, 600, 500, 400, 300, 200, 100$ , の各値に対して  $\mu$  と  $\xi$  のグラフを作った。それらを 図-3 および 図-4 に示す。

両者を比較して  $b/h$  が大きい後の方が桁違いに大きい  $\mu$  の値をとる。そして隔板が変形を防止する効

図-3 隔板間隔に対する断面 2 次モーメント減少率の関係

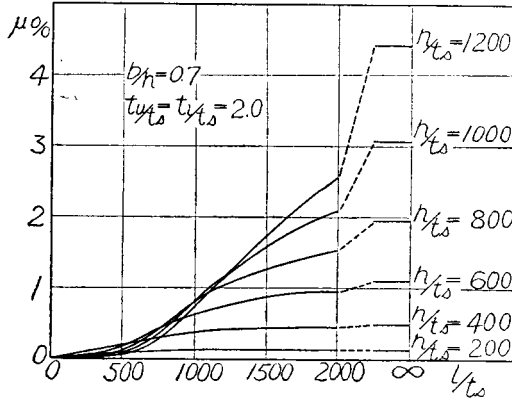


図-4 隔板間隔と断面 2 次モーメント減少率との関係

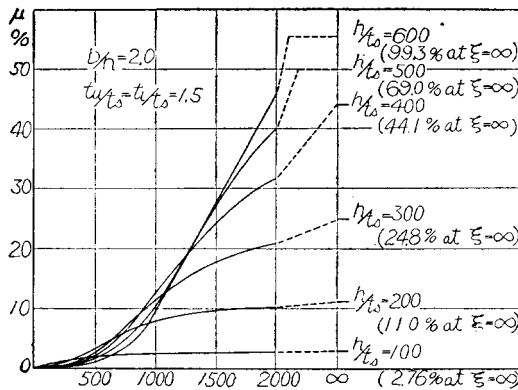
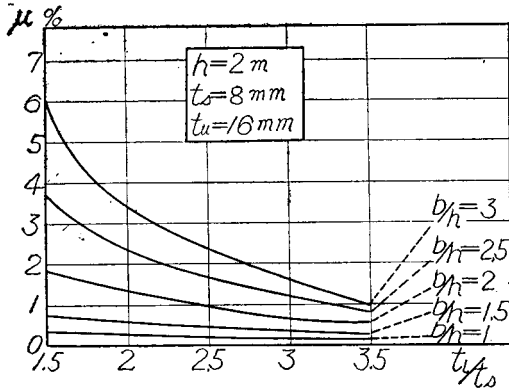


図-5 下部カバープレートとウェブの板厚比に対する断面 2 次モーメント減少率の関係



果が明白に認められる。いずれも  $\xi < 600$  程度で有効であつて、隔板のない場合に比し  $\mu$  がきわめて小さいことが顕著にうかがわれる。一般に実用式 (28) を使つて  $\mu$ - $\xi$  曲線を描くことにより、実際に隔板間隔をいかに定めるべきかについて一つの基準がえられると思う。

次に  $l=8\text{ m}$ ,  $h=2\text{ m}$ ,  $t_s=8\text{ mm}$ ,  $t_w=16\text{ mm}$ , の場合に  $t_f/t_s$  及び  $b/h$  の種々な値に対する  $\mu$  の変化の状態を 図-5 に示した。 $R=2 \times 10^5\text{ cm}$  と仮定したが、これに相当する最大縁応力は  $1050 \sim 1300\text{ kg/cm}^2$  の範囲である。図から明らかなように  $b \leq h$  の場合には  $\mu$  の悪影響は全く考慮しなくてよい程度の微量である。しかし幅の広い箱桁では断面変形の防止について十分留意せねばならない。

実際の箱桁においては、座屈防止などのため隔板以外に、さらに細い補剛材が縦横に入れられるので変形は一層小さくなるであろう。このような事実に基づいた理論の展開は、各薄板を直交異方性板に換算して本文と同じ概念のもとに同じような誘導過程によつて容易に行われる。将来箱桁の進歩につれて桁高及び桁幅が増大し、板厚が薄くなる傾向があるので  $\mu$  の値がより以上に大きくなるであろう。ことに隔板間隔は座屈計算式を基準にしても定まらない。何となればある一定以上の  $l$  をもつプレートに対しては座屈応力が一定値をとり  $l$  の影響が入らないからである。この意味で隔板間隔の決定には断面防止の観点により出された本公式が有用である。なお最大応力が降伏点に達するくらいまで曲げモーメントが増加し、いわゆる塑性領域に入れば、 $\mu$  の値は急激に増大することが予想される。近年極限設計法が注目されるようになったが、このような場合には本問題はますます重要視されねばならないと思う。

8. 結 言

- (1) 単純曲げモーメントを受ける箱桁が断面変形するためにおこる曲げ剛性の減少量に対する近似解を得た。
- (2) 曲げモーメントと曲率との関係は初等ハリ理論にいう正比例が成立せず、曲げモーメントの増加につれて曲率は加速度的に大きくなる。
- (3) 実在橋桁の断面寸法の範囲で、比例限度内の応力を生ずる通常の曲げモーメントに対しては、 $b \leq h$  の場合断面 2 次モーメントの減少量は微小である。しかし  $b > h$  になると実用設計計算においても、このための悪影響は全然無視するわけにはいかない。
- (4) 隔板を等間隔に配置した場合に断面変形を防ぐ効果を種々の 桁高 : 板厚 の値に対して調べた。

(5) 代表的断面に対してカバープレートとウェブとの板厚比、桁高と桁幅との比が $\mu$ の値に与える影響を調べた。

以上を総合して隔板間隔算定の一計算基準がえられた。この研究は昭和 29 年文部省科学研究助成補助金の交付を受けたものであることを付記する。

なお京都大学教授小西博士の御指導を賜わつたことに対し心から感謝する次第である。最後に図面作成に協力していただいた堤 良彦氏に対し謝意を表す。

## 参 考 文 献

- 1) Th. v. Kármán : "Über die Formänderung dünnwandiger Rohre." Z.V.D.I., Vol 55, 1911, s. 1889.
- 2) S. P. Timoshenko : "Bending stresses in

curved tubes of rectangular cross-section." Trans. ASME, Vol. 45, 1923, pp 135-140.

- 3) E. Chwalla : "Reine Biegung schlanker, dünnwandiger Rohre mit gerader Achse.", ZAMM, Bd. 13, Heft I, 1933, s. 48-53.
- 4) 太田友彌 : 横構成材を有つ薄肉中空梁の撓みについて, 機械工学, 第 2 巻第 7 号, 1934. 9.
- 5) H.D. Conway Ithaca : "Bending of rectangular plates subjected to a uniformly distributed lateral load and to tensile or compressive forces in the plane of the plate." Trans. ASME, Vol. 71, 1949, pp 301-309.
- 6) K. Marguerre : "Neuere Festigkeitsprobleme des Ingenieurs." 1950, s. 79.

(昭.30.5.12)

# 高効率!!

## 古河のエア-コンプレッサー ハンドハンマー

ポータブル  
エア-コンプレッサー

ハンドハンマー

**古河鋳業 足尾製作所**

本社・東京営業所 東京丸の内 TEL (27) 1401~10  
 販 売 店 福岡・大阪・名古屋・仙台・札幌  
 工 場 高 崎・小 山・足 尾