

参 考 文 献

- 1) 村 幸雄・荒木正夫：ダム放水管の設計法に関する一考察，土木学会誌，第40巻2号，昭30—2
- 2) 村 幸雄・荒木正夫：堰堤放水管に関する研究(1)，建設省土木研究所報告，第88号，昭29—9
- 3) Corps of Engineers, U.S. Army: Flood-Control Conduits for Detroit Dam, Waterways Experiment Station, Technical Memorandum No. 2-302, 1949.
- 4) Nippert, H.: Über den Strömungsverlust in gekrümmten Kanälen, Forsch. Arb. a. d. Geb. d. Ingenieurwesens, 320, 1929.
- 5) 荒木正夫：彎曲底面開水路を流れる不等速定流の—解法，土木学会誌，第39巻9号，昭29—9.

(昭.30.3.1)

開水路の垂直流速曲線に及ぼす 諸因子間の相関性について

正 員 春 日 屋 伸 昌*

THE CORRELATIONS AMONG SEVERAL FACTORS HAVING INFLUENCES UPON THE TYPE OF THE VERTICAL VELOCITY CURVE IN OPEN CHANNELS.

(JSCE Oct. 1955)

Nobumasa Kasugaya, C.E. Member

Synopsis The author studies on the correlations among the thread of mean velocity or the thread of maximum velocity, on the vertical velocity curve in open channels, and several factors having influences upon them, which are the roughness of bed, the water depth, the water surface gradient and the ratio of surface velocity to mean velocity (k), and concludes that the value of k has no relation to the roughness of bed, the water depth and the water surface gradient, and consequently it varies chiefly with the direction and speed of wind. He describes the descending of the threads of mean and maximum velocity by the increasing of the water depth is very slight, they are depressed by the decreasing of the roughness of bed and the strong adverse wind.

要旨 開水路の垂直流速曲線における平均流速の位置の割合 β あるいは最大流速の位置の割合 α と、それらに影響を及ぼす河底粗度、水深、水面勾配、平均流速と表面流速との比 k などの諸因子間の相関性について論じ、 k の値は、粗度、水面勾配、水深には無関係で風向及び風速によつて定まる因子であり、水深の増大による α 、 β の値の増大は非常に微弱であり、 α 、 β は粗度の減少及び強い逆風などによつて増大することを述べた。

1. ま え が き

前に発表した論文¹⁾で、筆者は U.S. Geological Survey の 679 個の資料から、水面幅が水深に比してきわめて大きい普通の水路において、流れの中央部における垂直流速曲線はほぼ 2 次放物線を呈し、平均流速の位置の深さの割合 β の分布は、Charlier の A 型函数で表わされ、そのモードは 0.60 であり、最大流速の位置の深さの割合 α は約 81% の確率をもつて—

0.30~0.35 の範囲内において生じ、 α の最も起りやすい値は 0.20 であることを述べた。そして β が 0.70 以上となるような場合を除いては、 β は正規分布をし、その母平均は 0.60、母標準偏差は 0.04 であつて、 α についての上の結論はこの場合にも同一となることを述べた。そして、 α や β の値を支配するおもな因子は、河底粗度、水深、水面勾配、風向や風速などで、これらのうち、あるものは平均流速や最大流速の位置を上昇させ、あるものはこれらを下降させて、けつきよく、最も起りやすい流れの状況は、上述の諸因子が α 及び β をしてそれぞれ 0.20 及び 0.60 付近の値をとらしめるような場合である。

さて、ここでは、 α と河底粗度、水深、水面勾配、風向及び風速などの諸因子間の相関性を求めるのであるが、 α と β との間には、 $\alpha < 1/3$ ならば $\beta = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - \alpha + (1/3)}$ の関係があるから、 α のかわりに β について考察し、 β と上述の諸因子との相関性を求めればよいのであるが、前の論文でもふれたように、

* 中央大学助教授，工学部土木工学教室

$\alpha=1/3$ したがって $\beta=0.68$ を境として、 β と河底粗度との相関はその符号を異にし、 β の全量について考察すると相関係数の正負の値が相殺して、はつきりした相関係数を求めにくいおそれがあるから、 β が 0.70 を越すような資料 43 個を一応除外して、残り 636 個の資料につき、相関係数の計算を行うのが合理的である。そして、このような資料について、 β が正規分布をすることは上に述べたとおりである。

2. 質的に連続分布する 2 属性間の相関係数の求め方

U.S. Geological Survey の各資料について、平均流速の位置の割合 β 、水深 k 、表面流速 v_s と平均流速 v_m との比 k は、いずれも量的に測られているから、これらの間の相関係数は、2つの変量をそれぞれいくつかずつの階級にわけて相関表をつくり、普通の計算方法にしたがつて求めればよい。しかし、問題は粗度と他の変量との相関係数の求め方である。粗度は資料に河底状況として、泥、砂、砂利、玉石、岩盤の 5 種類にわけて記載されているに過ぎない。このような質的分類のものを量的なものに改めるには、Manning や Forchheimer の粗度係数を用いることも考えられる。また、Gaukler の平均流速公式 $v=CR^{2/3}I^{1/2}$ における粗度係数 C は、径深 R や勾配 I には無関係に河底の粗度のみ関係し、Strickler によれば、 C の C の値は河底砂礫の粒径 d (mm) のみに関係し、 $C=21.1/\sqrt[3]{d}$ で表わされるという。また、Chang は Manning 公式の n は、河底砂礫の平均粒径 d (mm) を用いて、 $n=0.0166\sqrt[3]{d}$ で表わすことができると主張している。したがって、Gaukler, Strickler, Chang の説を採用すれば、河底の粗度の大小を河底砂礫の粒径で表現することも可能である。しかし、安芸鮫一博士も述べておられるように²⁾、流速公式中の粗度係数は、河底構成砂礫の状態によつて変化するものであり、類似の水深、勾配をもつ河川においても、河底砂礫の大きさとその混合状態とによつて左右されるものである。このようなところから、河底の粗度を河床砂礫の平均粒径で表わすということは、他の量的に測定された変量の精度にくらべていちじるしくその精度を減ずる。ことに、資料のうちには明らかに砂利と玉石との混合状態であることを明示して、いずれの分類に属させるべきか不明なものも少なくない。さらには、たとえ、粗度を河床砂礫の平均粒径のみで表わすにしても、たとえば、河底状況が砂である資料の一群を、単に砂の平均粒径だけで表わすのはあまりにも大雑把である。なぜならば、砂は極微粒砂から極粗粒砂まで 5 階級にわけられ、その大きさは 0.05~2.0 mm であ

るとされている。資料が河底状況によつて 5 つの種類に分類されているのは、その河床構成材料の主成分についてのものであるにすぎず、事実は、これらを主成分として種々な材料が種々な混合比で混合されているとしなければならない。したがって、粗度は質的に連続分布するものであつて、この場合、これを量的に変換することは正しい方法ではない。

そこで、筆者は、このように質的に連続分布する変量と他の変量(これは質的でも量的でもよい。ただし、連続分布する変量でなければならない。 h, β, k などは明らかに量的に連続分布する変量である)との相関係数を、つぎのような方法³⁾によつて求めた。この結果の誘導は 5. にゆずり、ここではその計算過程に必要な式とその説明とだけを記載する。もちろん、この方法は、互いに量的に連続分布する 2 つの変量間の相関係数を求める場合にも用いられるが、この方法を用いるときに注意すべきことは、2 つの変量がいずれもほぼ正規分布をすると考えられなければならないことである。したがって、資料そのままの分布が正規でないときには、対数変換、逆正弦変換または逆数変換などを用いて、正規化しなければならない。

さて、正規化された 2 つの変量 X, Y を表-1 のように 2×2 分類する。このとき、たとえば変量 X について、これをその量ま

表-1

X \ Y		Y		計
		小	大	
X	小	A	B	A+B
	大	C	D	C+D
計		A+C	B+D	N

たは質の小、大によつて 2 つにわけるのであるが、この中心はどこにとつてもよい。変量

Y についても同様である。このようにしてえられる 4 つの分割内の度数 A, B, C, D を求める。 N は全度数である。まず、

$$E(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$

とするとき、つぎの 2 つの式、

$$E(a) = \frac{A+B}{N}, E(b) = \frac{A+C}{N} \dots\dots\dots(1)$$

より、これを満足する a, b の値を確率積分表⁴⁾を用いて求める。つぎに、求められた a, b の値を用いて、つぎの 2 つの式、

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a^2/2}, Q = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-b^2/2} \dots\dots(2)$$

における P, Q の値を確率密度函数⁵⁾を用いて求める。

このようにして、 $A, B, C, D, N; a, b; P, Q$ が順次に求められると、2 つの変量 X, Y の相関係数 r は、つぎの方程式を解いて求められる。

$$r + \frac{ab}{2} r^2 + \frac{(1-a^2)(1-b^2)}{6} r^3$$

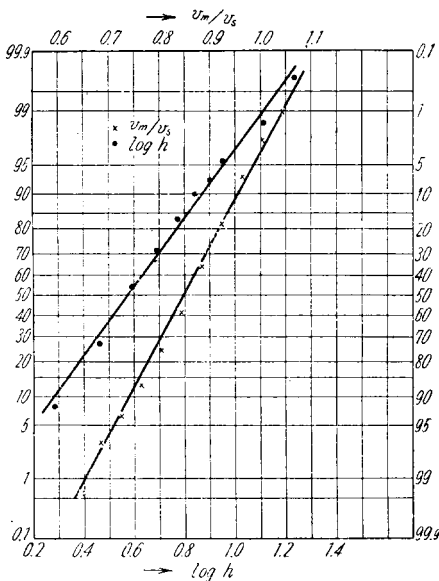
$$+ \frac{ab(3-a^2)(3-b^2)}{24} r^4 = \frac{AD-BC}{N^2PQ} \dots\dots(3)$$

3. 変量の分布の正規化と変量相互間の偏相関係数

2つの変量間の相関係数 r は、(3) 式を解いて求めることができるが、この結果は、前に述べたように、2つの変量がいずれも正規分布をすると考えられない場合には正確な値とならないから、そのようなときには、資料における変量の分布を正規化しなければならぬ。636 個の資料において、平均流速の位置の割合 β は、すでに述べたように、そのまま正規分布しているが、資料における水深 h の分布は、そのままでは正規分布をしない。しかし、これに対数変換を行うと、**図-1**に示すように正規化することができる。**図-1**は $\log h$ とその累積度数百分率とを確率紙上に打点し、これら諸点がほぼ直線上にあることを示したものである。水深 h の範囲は最小約 1ft より最大約 18ft に達する。1~9ft までは度数が多いため各階級の幅を 1ft として打点し、9ft 以上は 1ft ごとの度数が 10 未満のため、階級の幅を 4ft として打点した。確率紙上より求めた $\log h$ の平均は 0.59 ($h=3.9$ ft, 1.20m)、標準偏差は 0.23 であった。

つぎに、表面流速 v_s と平均流速 v_m との比 k は、このままでは正規分布をしないが、逆数変換を行つて $1/k$ を変量とすると、これは **図-1** のように正規分布をすることがわかる。 $1/k=v_m/v_s$ の範囲は最小 0.54 ($k=1.85$) より最大 1.21 ($k=0.83$) に及ぶが、0.67 以下の度数はわずかに 9つ、1.02 以上の度数もきわめて少なく 7つを数えるにすぎない。このことから、

図-1



$1/k$ はほとんど 0.67~1.02 ($k=1.49\sim 0.98$) の範囲にあるといえる。**図-1**は、0.65 以下及び 1.04 以上をそれぞれ1つの階級にまとめ、その間では、階級の幅を 0.04 として打点した。確率紙上より求めた $1/k$ の平均は 0.85 ($k=1.18$)、標準偏差は 0.08 であった。

以上のようにして、資料における3つの変量 $\beta, h, k=v_s/v_m$ の各分布をある適当な変換を用いて正規化することができた。このように、ある変量の分布はそれが非常に不規則な(複モード度数分布のような)場合でなければ、適当な変換によつて正規化できるとわれわれは考える。そこで残る問題は、河底粗度の分布を正規化することである。しかし、どのような変換式を用いたならば正規化しようかという変換方式をわれわれは必要としない。なぜならば、粗度と他の変量との相関が正の相関であるか負の相関であるかということを含味すれば十分であるからである。したがつて、問題は、粗度の分布が資料そのまま正規分布をしていると考えられないと仮定して、ある種の変換を行うとき、その変換によつてえられる変量の函数が、増加函数であるか(対数変換、逆正弦変換など)、減少函数(逆数変換など)であるかを知れば十分である。いま、かりに増加函数による変換を行つたものとして、2.の方法で相関係数を求めたとき、実際は減少函数による変換でなければならなかつたとすると、実際の相関係数は誤つた仮定における相関係数と絶対値が等しく、符号のみが異なる。そこで、粗度における変換が、上のいずれであるかは、ある変量との間の相関係数を求めるとき、その正負が既定の事実の上から判明しているならば、その相関係数の符号によつて変換の正否が判断される。いまの場合、粗度と β との相関が正であるか負であるかは判明しないが、粗度と水深 h との相関は負となるべきである。これは、粗度が小さい測点は主として下流であつて、下流では水深が一般に増大しているという事実にもとづく。そこで、粗度の分布は、ある種の増加函数的変換を行うとき正規化されるものとして $\log h$ との相関係数を求めると、のちに述べるように、この値は負となつて、上の仮定が誤りでなかつたことが判明する。このようにして正規化された粗度のある増加函数を、簡単に粗度函数とよぶこととする。

正規化された変量あるいは変量のある函数を **表-1** のように2つの部分に分割するとき、この分類の中心はどこにとつてもよいが、つぎのように定めた。 β の中心は 0.615、 $\log h$ の中心は 0.59、 $1/k=v_m/v_s$ の中心は 0.845、粗度函数の中心は砂と砂利との境界(し

たがつて、泥の70個と砂の229個とを小の分割、砂利及び玉石の234個と岩盤の103個とを大の分割に属さ

せる。このようにすると、資料において砂利に属させるべきか玉石に属させるべきか不明なものも、計算の結果には無関係となつて都合がよい)とした。

粗度函数と β との相関係数の計算法をつぎに示そう。

(1) 式より、

$$E(a) = (A+B)/N = 299/636 = 0.470126$$

$$\therefore a = -0.074953$$

$$E(b) = (A+C)/N = 444/636 = 0.698113$$

$$\therefore b = 0.518981$$

(2) 式より、

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a^2/2} = 0.397823$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-b^2/2} = 0.348677$$

$$\frac{AD-BC}{N^2PQ} = \frac{170 \times 63 - 129 \times 274}{636^2 \times 0.397823 \times 0.348677} = -0.439079$$

ゆえに、(3) 式はつぎのようになる。

$$r - 0.019446r^2 + 0.121092r^3 - 0.013250r^4 = -0.439079$$

これを解いて、 $r = -0.426$ をうる。他も上と同じようにして計算すると、つぎの結果がえられる。ただし、粗度とは粗度函数、水深とは $\log h$ の省略である。

$$\beta \text{ と粗度} : r_{12} = -0.426 \quad \beta \text{ と水深} : r_{13} = +0.267$$

$$\beta \text{ と } v_m/v_s : r_{14} = +0.453 \quad \text{粗度と水深} : r_{23} = -0.441$$

$$\text{粗度と } v_m/v_s : r_{24} = -0.206$$

$$\text{水深と } v_m/v_s : r_{34} = +0.147$$

粗度函数と水深の対数との相関係数が負となることから、粗度函数は増加函数変換されたものであり、上の計算過程で示したように2つに分類するとき、粗度の小さい泥、砂を小の分割に、砂利、玉石、岩盤のような粗度の大きいものを大の分割に属させればよいことがわかる。

さて、上の結果には、他の変数の影響もそれぞれ含まれているから、 β と粗度そのものとの相関を求めるためには、水深と v_m/v_s との影響を除去したものが必要である。いま、水深の影響を除いた、 β と粗度との1次偏相関係数を $r_{12.3}$ 、さらに、水深と v_m/v_s との影響を除いた、 β と粗度との2次偏相関係数を $r_{12.34}$

として表わし、他も同様とすれば ($1=\beta$, $2=\text{粗度}$, $3=\text{水深}$, $4=v_m/v_s$)、これらはつぎの式より計算される。

$$r_{12.3} = \frac{r_{12} - r_{13} \cdot r_{23}}{\sqrt{1-r_{13}^2} \sqrt{1-r_{23}^2}}$$

$$r_{12.34} = \frac{r_{12.3} - r_{14.3} \cdot r_{24.3}}{\sqrt{1-r_{14.3}^2} \sqrt{1-r_{24.3}^2}}$$

計算結果を示すと、つぎのとおりになつた。

$$r_{12.34} = -0.32, \quad r_{13.24} = +0.08, \quad r_{14.23} = +0.41,$$

$$r_{24.13} = -0.01, \quad r_{34.12} = +0.03$$

4. 諸因子間の相関性

上に求めた結果は、垂直流速曲線の形状に及ぼす諸因子相互間の偏相関係数である。いま、任意の2変量について双変正規母集団を考え、この母相関係数を ρ とするとき、 $\rho=0$ という仮説を立てて、標本より求められた偏相関係数の有意性の検定を行うこととする。標本の大きさを N とし、 r_p を p 個の変量を除去したときの標本偏相関係数であるとすれば、 $t = r_p \sqrt{N-p-2} / \sqrt{1-r_p^2}$ は、自由度が $N-p-2$ であるような t 分布にしたがう。危険率を5%及び1%とし、自由度=636-2-2=632に対する t の値を t_0 とすれば、 $t_0=1.96$ (5%点)、 $t_0=2.59$ (1%点)であるから⁶⁾、これを用いて上の式から、限界となる r_p の値を逆算すると、

$$|r_p| = t_0 / \sqrt{(N-p-2) + t_0^2} = 0.078(5\%), \\ 0.100(1\%)$$

ゆえに、3. で求めた2次偏相関係数のうち、 $r_{24.13}$ と $r_{34.12}$ とは、危険率1%においても、母相関係数 ρ が0であるという仮説を棄却することはできない。 $r_{24.13}$ は β と水深との影響を除去した、 v_m/v_s と粗度との相関係数、 $r_{34.12}$ は β と粗度との影響を除去した、 v_m/v_s と水深との相関係数であるから、これらがいずれも有意でないということは、 v_m/v_s の値は粗度及び水深には無関係であることを示すものである。すなわち、 $v_s = kv_m$ とおくと、この k の値は粗度や水深に無関係であることを示している。

以上の論議では、一応水面勾配の影響を考慮の外に、おいている。したがって、3. で求めた各偏相関係数の値には水面勾配の影響が含まれているとみななければならない。U.S. Geological Survey の資料では水面勾配が測定されていないから、この影響を除去した3次偏相関係数を考えることはできない。しかし、水面勾配は粗度と密接な関係があると考えられる。Sternbergによれば、砂礫は流下するにつれて磨滅によつて漸次小粒となり、この重量減少の割合は摩擦抵抗に比例すると考えて、起点より x の距離の水中単位重量

に含まれる砂礫の数 m は、 $m = m_0 e^{cx}$ (m_0 は起点での m , c は石質による定数) で表わされると述べ、物部博士は、この関係から x 点の水面勾配 I は、 $I = I_0 e^{-cx/2}$ (I_0 は起点での I) で表わされることを誘導された⁷⁾。これら両式から、 $I = I_0 \sqrt{m_0} / \sqrt{m}$ となり、 m は河底粗度を決定づけるものであるから、水面勾配と粗度との間には密接な関係のあることがわかる。また、安芸博士は、距離 x と河底砂礫の平均粒径 d_m との間には、 $x = a - b \log(\lambda d_m)$ (a, b はその河川に特有な定数、 λ は砂礫混合比) の関係があるとし、河床平衡勾配 i は、 $i = I_0 10^{\frac{5}{3.5} \frac{x_0 - x}{b}} + \frac{3.45}{3.5b} H_c 10^{\frac{1.5}{3.5} \frac{x - x_0}{b}}$

(I_0, H_c はそれぞれ起点 x_0 における河床勾配と水深) であると述べておられる⁸⁾。これら 2 つの式から、河底粗度を決定づける λd_m と i との間には密接な関係のあることがわかる。ところで、上の勾配はすべて平衡勾配であつて、河底の状況が常に平衡な状態にあるとはいえない。しかし、上述の諸公式も決して厳密に成り立つものではなく、その傾向を示唆しようとするものであるから、常時における河床勾配あるいは水面勾配と粗度との間にも、ある函数関係がほぼ成り立つていると考える方が、それらを互いに全く独立なものとするよりは真に近いのではないかと思われる。

なお、筆者は資料から Froude 数 F_r を計算した。この値は、泥では 0.33 以下、砂では 0.36 以下、砂利では 0.42 以下、玉石、岩盤ではいずれも 0.60 以下であつて、この分布は $\log 100 F_r$ をとると正規分布をすることがわかり、その平均は 1.13 ($F_r = 0.135$) 標準偏差は 0.27 であつた。そこで、 $\log 100 F_r$ と β との相関係数を 2. の方法で求めたところ、その値はわずかに 0.20 にすぎなかつた。このことは、 β と粗度、水深、水面勾配のいずれの間にも相関性がないことを示すものではない。 β と粗度との間には 3. で示したように $r_{12,34} = -0.32$ の相関係数が存在するのである。そこで、 F_r と β との相関性が薄くてくる理由はつぎのように考えられる。まず、 F_r に及ぼす水深 h の影響は、平均流速が Manning 公式にしたがうものとする、 $\log F_r \propto (1/6) \log h$ である。そして、 $\log h$ と β との相関係数 $r_{13,24}$ は 0.08 であつて、危険率 1% では有意でないが、5% ではようやく有意性が認められる程度である。したがつて、これを有意としても、水深の増大による β の増大はまことに微弱であつて、 F_r と β との相関には水深はほとんど影響がない。ゆえに、 F_r と β との相関に影響を及ぼすものは粗度と水面勾配である。ところで、水面勾配を

含んでの粗度と β との相関性は、3. に示したように相当有意であつて負であるから、粗度が増大し、したがつて水面勾配も増大すると β は減少する傾向がある。一方、 F_r は粗度が増大すると減少し、水面勾配が増大するから、 F_r と β との相関は、粗度と β との相関ほどはつきりした相関性を示さないことになる。このように、実際の河川において、 F_r と β との相関性が微弱となるということは、粗度と水面勾配とが全く独立なものではなく、粗度の増大によつて水面勾配は増大し、粗度の減少によつて水面勾配は減少し、水面勾配は粗度の中に入れて考える方が実情に即していることを示しているのではないかと思われる。

以上のような理由から、筆者は、水面勾配の影響を粗度の中に入れて考えることとしたのである。そうすると、上に述べたところから、 $v_s = kv_m$ とおくと、 k の値は、粗度、水面勾配、水深には無関係 (したがつて、平均流速にも無関係となる。 $\log 100 F_r$ と $1/k$ との相関係数はほとんど 0 に近い) であることが決論される。そうすれば、この k の値を左右するものはその原因を他に求めなければならないが、風向及び風速は k の値を大きく左右する 1 つの因子であると考えられる。そこで、風向及び風速などによる k の値の変動を知るためには、679 個の全資料を用いるべきであるから、679 個の資料における $1/k$ の分布が平均 0.86 ($k = 1.16$)、標準偏差 0.086 となることから、 k の種々な区間に生起する確率 $P(\%)$ を計算すると表-2 のようになる。

表-2

k	$1/k$	$P(\%)$
1.5~1.4	0.667~0.714	3.3
1.4~1.3	0.714~0.769	10.0
1.3~1.2	0.769~0.833	23.2
1.2~1.1	0.833~0.909	33.9
1.1~1.0	0.909~1.000	23.2
1.0~0.9	1.000~1.111	5.1

る。表-2 より k の最も起りやすい値は 1.1~1.2、平均 1.15 であることがわかる。さて、 $k = v_s/v_m$ は強い

逆風が吹くほど小さく、強い順風が吹くほど大きくなることは当然で、同じ速さの順風と逆風との吹く確率が異なるとは考えられないから、 $1/k$ の分布の中心 0.86 ($k = 1.15$) は無風時の値であると考えてもさしつかえないであろう。そこで、順風のときには、 k の値はその速さにしたがつて 1.2 より 1.5 まで順次変動し、逆風のときには 1.1 より 0.9 まで順次変動すると考えられる。

つぎに、粗度と $1/k (= v_m/v_s)$ との影響を除去した、 β と水深との相関係数 $r_{13,24}$ は、すでに述べたように、危険率 5% でようやく有意性が認められる程度であるが、水深と $1/k$ との影響を除去した、 β と粗度

との相関係数 $r_{12,34}$ は明らかに有意であつて、粗度の減少によつて β の値は増大する。したがつて、粗度が減少すれば最大流速の位置の割合 α は増大し、 $\alpha > 0$ の範囲では、最大流速は水表面の近くにおいて生じる傾向がある。従来、水深の増大によつて α の値は相当増大するように考えられていたが、水深の影響は過大視されていたのではないと思われる。水深の増大による α の増大は、実は水深そのものの影響というよりは、水深の大きいところでは粗度が小さいのが一般であるから (粗度と水深との相関係数 $= -0.441$)、この粗度の減少によるものであると考えられる。したがつて、 α の値の選定には、水深よりも粗度を重視すべきものと思われる。

最後に、 β したがつて α の値に最も大きく影響するのは、風向及び風速である。それは、粗度と水深との影響を除去した、風向及び風速と β との相関係数 $r_{14,23}$ についてみれば明らかである。強い順風が吹くにしたがつて ($1/k = v_m/v_s$ の値が小さくなるにしたがつて)、 β 及び α の値は小さくなり、 $\alpha > 0$ の範囲では、最大流速の位置は水表面に近づくことがわかる。Humphrey 及び Abbot が Mississippi 河で観測したところによると、無風時には水面から水深の 0.317 の最大流速の点があつたものが、風速 12 m/sec の強い深さに逆風が吹いたときには水面から 0.56、同じ風速の強い順風が吹いたときには水面から 0.08 の深さに最大流速の点が移つたことが報告されている⁹⁾。

5. (1)~(3) 式の誘導

質的または量的に連続分布する 2 つの変量間の相関係数 r は (1)~(3) 式を用いて求められる。この方法は Elderton や、渡辺義勝氏の著書に述べられているが、一般に普及されていないので、ここではその誘導を行うこととする。この過程は相当複雑であるが、Hermite 整式を用いればいささか簡単にすることができるので、その方法によつて記述しよう。

いま、正規化された 2 つの変量を X, Y とし、標準偏差をそれぞれ σ_X, σ_Y ; 分布の中心をそれぞれ \bar{X}, \bar{Y} ; 相関係数を r とすれば、双変確率密度函数 $f(X, Y)$ はつぎのようになる。

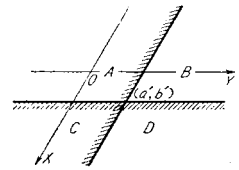
$$f(X, Y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-r^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-r^2)}\left\{\left(\frac{X-\bar{X}}{\sigma_X}\right)^2 + \left(\frac{Y-\bar{Y}}{\sigma_Y}\right)^2 - 2r\frac{(X-\bar{X})(Y-\bar{Y})}{\sigma_X\sigma_Y}\right\}\right]$$

さて、正規化された 2 つの変量 X, Y を 2×2 分類し、表-3 のように各分割内の度数 A, B, C, D が測定されたものとし (これは表-1 と同じものである)、この 2×2 分類の中心は座標 (a', b') であるとする (図-2)。そうすれば、図-2 より、

表-3

	Y	小	大	計
X	小	A	B	A+B
	大	C	D	C+D
	計	A+C	B+D	N

図-2



$$\frac{D}{N} = \int_{b'}^{\infty} \int_{a'}^{\infty} f(X, Y) dX dY$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}} \int_{b'}^{\infty} \int_{a'}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}(x^2 + y^2 - 2rxy)\right\} dx dy \dots\dots\dots (a)$$

ここに、 N は全度数であり、 $x = (X - \bar{X})/\sigma_X$, $y = (Y - \bar{Y})/\sigma_Y$, $a = (a' - \bar{X})/\sigma_X$, $b = (b' - \bar{Y})/\sigma_Y$ である。また、図-2 を参照すれば、

$$\frac{C+D}{N} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \int_{a'}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\bar{X}}{\sigma_X}\right)^2\right\} dX$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = 1 - E(a)$$

$$\frac{B+D}{N} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y} \int_{b'}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{Y-\bar{Y}}{\sigma_Y}\right)^2\right\} dY$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_b^{\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy = 1 - E(b)$$

$$\therefore \left. \begin{aligned} E(a) &= 1 - \frac{C+D}{N} = \frac{A+B}{N} \\ E(b) &= 1 - \frac{B+D}{N} = \frac{A+C}{N} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 $E(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$ である。

(1) 式より、確率積分表を用いて、 a, b の値を求めることができるから、問題は (a) 式より未知量 r を求めることに帰する。

さて、(a) 式における被積分函数をつぎのようにおく。

$$u = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}(x^2 + y^2 - 2rxy)\right\} \dots\dots\dots (b)$$

ここで、 $u_n = e^{-(x^2+y^2)/2} (d^n u / dr^n)_{r=0}$ とし、(b) 式を r について Maclaurin の級数に展開すれば、

$$u = e^{-(x^2+y^2)/2} \left(u_0 + \frac{u_1}{1!} r + \frac{u_2}{2!} r^2 + \frac{u_3}{3!} r^3 + \dots\dots\dots + \frac{u_n}{n!} r^n + \dots\dots\dots \right) \dots\dots\dots (c)$$

さて、(b) 式の自然対数をとれば、

$$\ln u = -\frac{1}{2(1-r^2)}(x^2 + y^2 - 2rxy) - \frac{1}{2} \ln(1-r^2)$$

$$\therefore \frac{1}{u} \frac{du}{dr} = \frac{xy(1-r^2) - (x^2 + y^2 - 2rxy)r}{(1-r^2)^2} + \frac{r}{1-r^2}$$

$$\therefore (1-r^2)^2 u' = \{xy + r(1-x^2-y^2) + r^2 xy - r^3\}u \dots\dots\dots (d)$$

(d) 式の両辺を Leibniz の定理によつて n 回微分すれば、

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= (1-r^2)^2 u^{(n+1)} - 4nr(1-r^2)u^{(n)} - 2n(n-1) \\ &\quad (1-3r^2)u^{(n-1)} + 4n(n-1)(n-2)ru^{(n-2)} \\ &\quad + n(n-1)(n-2)(n-3)u^{(n-3)} \\ \text{右辺} &= \{xy + r(1-x^2-y^2) + r^2 xy - r^3\}u^{(n)} \\ &\quad + n(1-x^2-y^2 + 2rxy - 3r^2)u^{(n-1)} \\ &\quad + n(n-1)(xy - 3r)u^{(n-2)} \\ &\quad - n(n-1)(n-2)u^{(n-3)} \end{aligned}$$

ここで、 $r=0$ とおけば、
 左辺 $= u_{n+1} - 2n(n-1)u_{n-1} + n(n-1)(n-2)(n-3)u_{n-3}$

右辺 $= xyu_n + n(1-x^2-y^2)u_{n-1} + n(n-1)xyu_{n-2} - n(n-1)(n-2)u_{n-3}$

$$\therefore u_{n+1} = xyu_n + n(2n-1-x^2-y^2)u_{n-1} + n(n-1)xyu_{n-2} - n(n-1)(n-2)^2u_{n-3} \quad (e)$$

(b) 式より、 $u_0=1$ をうるから、(e) 式より、つぎの各式がえられる。

$$\begin{aligned} u_1 &= x \cdot y = H_{1,x}H_{1,y}, \\ u_2 &= (x^2-1) \cdot (y^2-1) = H_{2,x}H_{2,y}, \\ u_3 &= (x^3-3x) \cdot (y^3-3y) = H_{3,x}H_{3,y}, \\ u_4 &= (x^4-6x^2+3) \cdot (y^4-6y^2+3) = H_{4,x}H_{4,y}, \dots \end{aligned}$$

ここに、 $H_{n,x}, H_{n,y}$ はそれぞれ x, y に関する n 次の Hermite 整式である。

$|r| < 1$ であるから、 r^5 以上の項を省略して (c) 式に上の各式を入れれば、

$$\begin{aligned} u &= e^{-(x^2+y^2)/2} \left(1 + \frac{H_{1,x}H_{1,y}}{1!}r + \frac{H_{2,x}H_{2,y}}{2!}r^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{H_{3,x}H_{3,y}}{3!}r^3 + \frac{H_{4,x}H_{4,y}}{4!}r^4 \right) \\ \therefore \frac{D}{N} &= \frac{1}{2\pi} \int_b^\infty \int_a^\infty u dx dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^\infty e^{-x^2/2} dx \\ &\quad \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_b^\infty e^{-y^2/2} dy + \frac{r}{1!} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^\infty H_{1,x} e^{-x^2/2} dx \\ &\quad \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_b^\infty H_{1,y} e^{-y^2/2} dy + \frac{r^2}{2!} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^\infty H_{2,x} e^{-x^2/2} dx \\ &\quad \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_b^\infty H_{2,y} e^{-y^2/2} dy + \frac{r^3}{3!} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^\infty H_{3,x} e^{-x^2/2} dx \\ &\quad \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_b^\infty H_{3,y} e^{-y^2/2} dy + \frac{r^4}{4!} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^\infty H_{4,x} e^{-x^2/2} dx \\ &\quad \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_b^\infty H_{4,y} e^{-y^2/2} dy \end{aligned}$$

ところで (1) 式より、
 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^\infty e^{-x^2/2} dx = \frac{C+D}{N}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_b^\infty e^{-y^2/2} dy = \frac{B+D}{N}$
 また、

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^\infty H_{1,x} e^{-x^2/2} dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [e^{-x^2/2}]_a^\infty \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a^2/2} \equiv P \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_b^\infty H_{1,y} e^{-y^2/2} dy &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-b^2/2} \equiv Q \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

とおけば、 P, Q は a, b が既知であるから、確率密度函数表から求められ、したがつて、部分積分法を用いて、つぎの各式が容易にえられる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^\infty H_{2,x} e^{-x^2/2} dx &= aP, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_b^\infty H_{2,y} e^{-y^2/2} dy &= bQ, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^\infty H_{3,x} e^{-x^2/2} dx &= (a^2-1)P, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_b^\infty H_{3,y} e^{-y^2/2} dy &= (b^2-1)Q, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^\infty H_{4,x} e^{-x^2/2} dx &= a(a^2-3)P, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_b^\infty H_{4,y} e^{-y^2/2} dy &= b(b^2-3)Q, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{D}{N} &= \frac{C+D}{N} \cdot \frac{B+D}{N} + PQr + \frac{abPQ}{2}r^2 \\ &\quad + \frac{(1-a^2)(1-b^2)}{6}r^3 + \frac{ab(3-a^2)(3-b^2)PQ}{24}r^4 \end{aligned}$$

ゆえに、 r を求める方程式はつぎのようになる。
 $r + \frac{ab}{2}r^2 + \frac{(1-a^2)(1-b^2)}{6}r^3 + \frac{ab(3-a^2)(3-b^2)}{24}r^4 = \frac{AD-BC}{N^2PQ} \dots\dots\dots (3)$

6. 結 語

(1) 最大流速の位置の割合 α と、垂直流速曲線の形状に及ぼす、河底粗度、水深、水面勾配、風向及び風速などの諸因子との相関性を求めるには、平均流速の位置の割合 β と上述の諸因子との相関性を求めればよい。そのためには、 β が 0.70 を越す資料を除外して、U.S. Geological Survey の 636 個の資料を用い、その計算方法は、質的に連続分布する 2 属性間の相関係数の求め方にならう。その式は (3) 式で与えられるが、このとき 2 変量がいずれも正規分布をするものでなければ、その値は精確でない。

(2) 上の資料につき、 β と水深 h とは対数変換、表面流速 v_s と平均流速 v_m との比 k は逆数変換をすることによつてその分布が正規化される。質的な表現をとる河底粗度はこれを量的なものに変換するのは好ましくないのに、質的に連続分布するものとし、これにある増加函数的変換を行つて正規化される函数 (これを便宜上粗度函数とよぶ) を考えればよいことが、その函数と水深との相関係数が負となることから

示される。

(3) 以上のように正規化された変量相互間の相関係数を(3)式から計算し、さらに、他の変量の影響を除去した2次偏相関係数を計算すると、3.に示したようになる。

(4) 母偏相関係数の検定を行うと、 v_m/v_s と粗度及び v_m/v_s と水深との相関係数はいずれも有意でない。水深と β との相関係数は危険率5%で辛うじて有意性が認められる程度である。粗度と β 及び v_m/v_s と β との相関係数はいずれも有意である。

(5) 水面勾配と粗度とは互いに全く独立なものではなく、粗度の中に水面勾配を含ませて考える方が実情に即している。このことは、物部、安芸両博士の平衡勾配に関する公式からも類推されるが、資料におけるFroude数と β との相関係数が小さくなることからわかる。

(6) 以上のことから、 $1/k=v_m/v_s$ は粗度、水面勾配、水深に無関係となり、この値を左右するおもな因子は風向及び風速であると考えられる。この分布の中心が $1/k=0.86(k=1.15)$ であることより、この付近の値は無風時のものであり、 k の値は順風のときにその速さにしたがって1.2より1.5まで順次変動し、逆風のときにその速さにしたがって1.1より0.9まで順次変動すると考えられる。

(7) 従来、水深の増大によつて α の値が増大すると考えられていたのは、実は、水深そのものによる影響ではなく、水深の大きいところでは粗度が小さいから、この粗度の減少によるものである。

(8) β 及び α の値に最も大きく影響するものは $1/k=v_s/v_m$ すなわち風向及び風速である。強い順風が吹くほど β, α の値は小さくなり、強い逆風が吹くほどこれらの値は大きくなる。

前論文同様、この論文を草するに当り、工学博士中央大学教授林泰造氏より種々有益な御忠言を載いた。紙上を借りて厚く御礼を申し述べる次第である。

参考文献

- 1) 春日屋伸昌：開水路の垂直流速曲線における平均流速の位置の分布性について，土木学会誌，第40巻，第5号
- 2) 安芸皎一：河相論，p. 58
- 3) W.P. Elderton：Frequency-curves and correlation, 1906, p. 125~p. 130
渡辺義勝：最小自乗法及統計，p. 465~p. 469
- 4) 統計科学研究会：新編統計数値表，表一p. 44~p. 52
- 5) 同上 表一p. 44~p. 52
- 6) 同上 表一p. 94
- 7) 物部長穂：水理学，p. 261
- 8) 安芸皎一：河相論，p. 83
- 9) 宮本武之輔：治水工学，p. 85

(昭.30.3.18)

粘土の含水量変化にともなう沖積層強度の推移について

正員 赤 井 浩 一*
准員 柴 田 徹**

ON THE STRENGTH CHANGE OF AN ALLUVIAL CLAY WITH THE MOISTURE DECREASE

(JSCE Oct. 1955)

Kōichi Akai, C.E. Member, Tōru Shibata, C.E. Assoc. Member

Synopsis In order to research the effect of the moisture content on the strength characteristic of undisturbed saturated clay, a large number of tests such as U-test, vane test and triaxial compression test has been performed. As the result, it is shown that the compressive strength of saturated clay has a linear relation to the moisture content on the semi-logarithmic paper, and that the above linear plot is parallel to the virgin compression curve of the consolidation test. Introducing the concept of soil water bond appeared in the stretched membrane theory, to the unconfined compressive strength of clay under the air-drying process, it is found that the strength of clay can be determined uniquely from the moisture content, in spite of the type or kind of tests. And besides, some investigations are tried to the effect of the lateral drainage in the triaxial consolidation test.

* 京都大学助教授 工学部土木工学教室

** 京都大学大学院工学研究科学生