+資＝＝料+

交通停止により等速度交通流の受ける損失について

准員　佐　佐　木　　綱*

1. 緒　言

輸送力の増強をはかるためには，交通流を円滑ならしめるということはいうまでもないが，実際には交叉点・踏切などの障害によつて必然的に交通遮断を受ける。従つて輸送力を増強させるためには，交通遮断による輸送力の損失を最小ならしめることが，必要である。ところが一般に(輸送力)=(輸送距離)×(輸送量)であるから，輸送距離の損失についての考察を行うことがきわめて重要である。そこで本文では，L. A. Pipes 教授が取扱つた飽和交通流における連続車両系の速度に関する基礎式から出発して，飽和及び不飽和等速度交通流が受ける損失輸送距離を，理論的に誘導し，交通流の損失特性についての若干の考察を行つた。

2. 飽和交通流における輸送力損失

(1) L. A. Pipes 教授の研究[1]　Pipes 教授によれば連続車両系の運動方程式は

$$T\frac{dv_{k+1}}{dt}+v_{k+1}=v_k,\quad k=1,2,3,\ \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

で与えられる。(1) 式に Laplace 変換を施し，

$$(Tp+1)V_{k+1}=V_k+Tpv_{k+1}(0),\quad k=1,2,3,\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ここに T は反応時間であり，v_k, v_{k+1} は先頭車より k 及び $k+1$ 番目の車の速度である。式 (1) 及び式 (2) を基礎として先頭車の速度変化を step function と仮定した場合，加速運動及び減速運動にある車両間の速度関係をそれぞれ(3)，(6) 式で与えている。

① $v_{k+1}(0)=0$ の車両系が加速運動にあるとき，

$$v_{k+1}(t)=v_0G_k(t/T),\quad k=1,2,3,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

ここに，v_0 は先頭車の速度であり常数である。また

$$G_k(t)=\frac{1}{\Gamma(k)}\int_0^t e^{-u}u^{k-1}du=\Gamma_t(k)/\Gamma(k)\ \cdots(4)$$

k が正の整数のときは式 (5) のごとく展開できる。

$$G_k(t)=1-e^{-t}\left[1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\right]\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

② $v_{k+1}(0)=v_0$ の車両系が減速運動にあるとき，

$$v_{k+1}(t)=v_0[\Phi_k(t/T)+\Phi_{k-1}(t/T)+\cdots+\Phi_1(t/T)]=v_0\sum_{k=1}^{k}\frac{e^{-t/T}(t/T)^{k-1}}{(k-1)!}\equiv v_0P_{k-1}(t/T),\quad k=1,2,3,\cdots\cdots\cdots(6)$$

* 京都大学助手，工学部土木工学教室

(2) 初速度 0 の車が速度 v_0 に達する間の損失距離　初速度 0 の車が速度 v_0 に達するまでの損失距離は，反応時間 T の場合 $k+1$ 番目の車に対して

$$\int_0^\infty (v_0-v_{k+1})dt=v_0\int_0^\infty[1-G_k(t/T)]dt\ \cdots(7)$$

で与えられる。いま $t/T=u$ とおいて式 (6) を計算すると，

$$\int_0^\infty (v_0-v_{k+1})dt=v_0T\int_0^\infty e^{-u}\left[1+\frac{u}{1!}+\frac{u^2}{2!}+\cdots+\frac{u^{k-1}}{(k-1)!}\right]du=k\cdot T\cdot v_0\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

となる。すなわち反応時間 T が大きければ大きいほど，また後方の車ほど停止したことにより大きな損失を受ける。輸送力損失はこの損失距離に比例するわけであり，まつたく同様なことがいえる。

(3) 等速度 v_0 の車の停止による損失距離　ある車が急に停止して τ 時間そのままの停止状態を保つときこの τ 時間の間に受ける後続車の損失について考えてみる。$k+1$ 番目の車の速度は式 (6) で表わされるから，その車の損失距離は

$$\int_0^\tau (v_0-v_{k+1})dt=v_0\int_0^\tau[1-P_{k-1}(t/T)]dt=v_0T\left[\frac{\tau}{T}-\sum_{k=1}^{k}\Gamma_{\tau/T}(k)/(k-1)!\right]$$

$$\therefore\ \int_0^\tau (v_0-v_{k+1})dt=v_0\left[\tau-T\cdot\sum_{k=1}^{k}G_k\ (t/T)\right]\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

(4) 初速度 $v_{k+1}(0)$, $k=1,2,3,\cdots$をもつて加速されるときの損失距離　この場合の速度は式 (2) より次式で表わされる。

$$V_{k+1}=\frac{V_1}{(Tp+1)^k}+\frac{Tp}{(Tp+1)^k}v_2(0)+\frac{Tp}{(Tp+1)^{k-1}}v_3(0)+\cdots+\frac{Tp}{Tp+1}v_{k+1}(0)$$

上式に inverse Laplace 変換を施して[2]，

$$v_{k+1}=v_0G_k\left(\frac{t}{T}\right)+\frac{e^{-t/T}}{(k-1)!}\left(\frac{t}{T}\right)^{k-1}v_2(0)+\frac{e^{-t/T}}{(k-2)!}\left(\frac{t}{T}\right)^{k-2}v_3(0)+\cdots+e^{-t/T}v_{k+1}(0)\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

しかして (8) 式より

$$v_{k+1}(0)=v_0P_{k-1}(\tau/T)\,,_{k=1,2,3}\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

$$\therefore\quad v_{k+1}=v_0[1-\{(1-P_{k-1})\Phi_1+(1-P_{k-2})\Phi_2+\cdots+(1-P_0)\Phi_k\}]\ \cdots\cdots\cdots(12)$$

ここに，

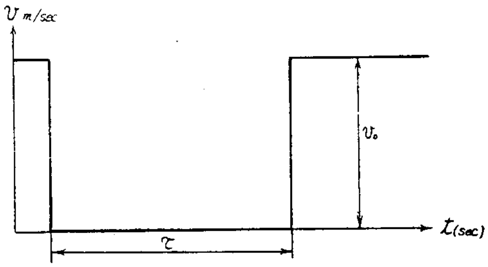
$$\Phi_k=\frac{e^{-t/T}}{(k-1)!}\left(\frac{t}{T}\right)^{k-1},\quad P_{k-1}=P_{k-1}\left(\frac{\tau}{T}\right)$$

従つてこの場合の損失距離は

$$\int_0^\infty (v_0-v_{k+1})dt=v_0T\left[k-\sum_{k=1}^{k}P_{k-1}(\tau/T)\right]_{k=1,2,3}\cdots\cdots\cdots(13)$$

(5) 飽和交通流の τ 時間停止による損失距離　先頭車の速度変化が図—1のごとき step function で表わされるとき，先頭車の τ 時間停止による $k+1$ 番目の

図—1　先頭車の速度変化

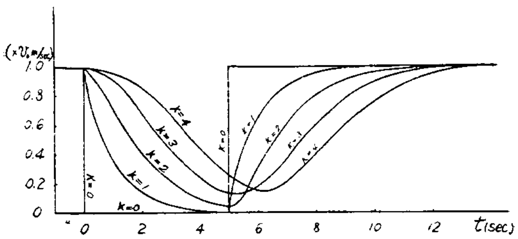


車の全損失距離 δ_{k+1} は式 (9) 及び式 (13) の和であるから，

$$\delta_{k+1}=v_0\left[\tau+Tk-T\left\{\sum_{k=1}^{k}G_k\left(\frac{\tau}{T}\right)-\sum_{k=1}^{k}P_{k-1}\left(\frac{\tau}{T}\right)\right\}\right]=v_0\tau$$

すなわち，一様な速度 v_0 で走行している飽和交通流において τ 時間の停止を与えた場合の輸送力損失は，反応時間及び後続車の後続番号にまつたく無関係に，先頭車の受けた損失にひとしいという結果が与えられた（これはわれわれの常識と一致する)。いま一例として $\tau=5$ sec，$T=1$ sec に対する (6)，(12) 式から計算した後続車の速度変化を図—2に示す。

図—2　5秒間の停止による後続車の速度曲線



3.　不飽和交通流における損失距離

2.の結果を不飽和交通流へ拡張するため，反応時間 T_0 を次のように定義する，「先行車の挙動変化の発生からその第一後続車がそれに応じた挙動に入るまでの時間」。しからば

$$T_0=t_0+t_0'\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

ここに，t_0' は 2. の T であり，t_0 は交通量と密接な関係をもつ値で，これを余裕反応時間と呼ぶことにする。

まず τ 時間の減速により受ける損失距離は式 (9) より

$$\int_0^\tau (v_0-v_{k+1})dt=v_0\left[\tau-T_0\sum_{k=1}^{k}G_k\left(\frac{\tau}{T}\right)\right]\cdots(16)$$

τ 時間経過後所定の速度 v_0 に復帰するまでの損失距離は式 (13) より

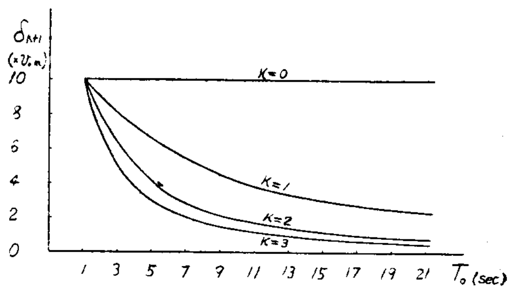
$$\int_0^\infty (v_0-v_{k+1})dt=v_0t_0'\left[k-\sum_{k=1}^{k}P_{k-1}(\tau/T_0)\right]_{k=1,2,3}\cdots(17)$$

ゆえに先頭車の τ 時間停止により生ずる $k+1$ 番目の車の全損失距離 δ_{k+1} は式 (16) と式 (17) との和であるから，

$$\delta_{k+1}=v_0\left[\tau-t_0\sum_{k=1}^{k}G_k(\tau/T_0)\right]_{k=1,2,3.}\cdots\cdots(18)$$

式 (18) において t_0 が増大すれば δ_{k+1} は減少する。$t_0'=1$ sec としたときの T_0 と δ_{k+1} との関係を図—3に示す。図—3から先頭車の損失距離 $v_0\tau$ に対し後続車の受ける損失距離は，T_0 もしくは t_0 が増大するほど減少し，しかも後方の車ほど減少する。このことは交通量の少ない路線ほど停止によつて生ずる損失距離，すなわち輸送力の損失が少なく，逆に交通量が増大し t_0 が小となり飽和度が高まるにつれて，交通停止による損失は大となることを意味する。

図—3　損失輸送距離（停止時間 10 秒）



式 (18) において $t_0, T_0\to\infty$ のときの損失距離は

$$\lim_{T\to\infty} T\cdot\sum_{k=1}^{k}G_k(\tau/T)=\tau,\ k=1,2,3,\cdots\cdots\cdots(19)$$

が証明できるので明らかに0となる。さて式 (18) で反応時間と交通量との関係がわかれば，交通量を与えたときの損失距離を算出できる。

いま等速度の交通流における平均車頭間隔 S を

$$S=T_0v+b \quad\cdots\cdots(20)$$

と表わす。ただし b は停止したときの車頭間隔。ここで交通量 x は v/S で表わされるので，

$$T_0=\frac{1}{x}-\frac{b}{v},\quad \text{ただし}\quad x\leqq v/(b+t_0'v)\quad\cdots\cdots(21)$$

式 (21) を式 (18) に代入し，

$$\delta_{k+1}=v\left[\tau-\left(\frac{1}{x}-\frac{b}{v}-t_0'\right)\sum_{k=1}^{k}G_k\left(\frac{\tau vx}{v-bx}\right)\right],$$

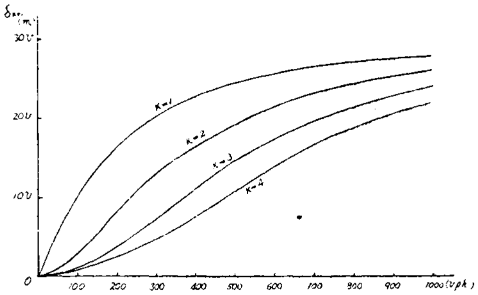
$$k=1,2,3\cdots\cdots(22)$$

をうる。従つてこの交通流全体の損失 δ は

$$\delta=\sum_k\delta_{k+1}\quad\cdots\cdots(23)$$

交通量と損失距離との関係を式 (22) により計算した結果が 図—4 である。図—4 から交通量が増大してゆくとき，損失距離が，いかに変化していくかがわかる。

図—4 停止時間 $\tau=20$ 秒により生ずる損失輸送距離



4. 停止回数と停止時間

次に交通流に τ 時間の停止を n 回与えた場合と $n\tau$ 時間の停止を1回与えた場合とで，その交通の受ける損失がどう異なるかを考察する。それには $n\,\delta_{k+1}(\tau)$ と $\delta_{k+1}(n\tau)$ との大小を比較すればよい。さて，

$$\left.\begin{aligned}n\,\delta_{k+1}(\tau)&=n\,v\left[\tau-t_0\,\Sigma G_k\left(\frac{\tau}{T_0}\right)\right],\\ \delta_{k+1}(n\,\tau)&=v\left[n\,\tau-t_0\Sigma G_k\left(\frac{n\,\tau}{T_0}\right)\right]\end{aligned}\right\}\cdots(24)$$

の大小関係は明らかに

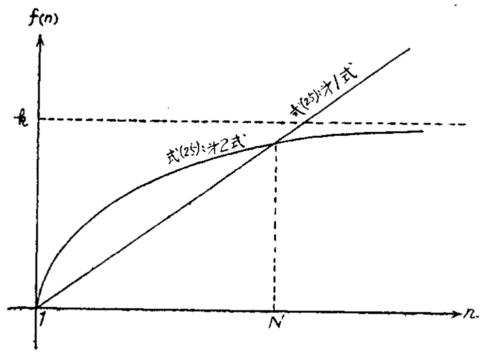
$$n\Sigma G_k(\tau/T_0),\quad \Sigma G_k(n\,\tau/T_0)\cdots\cdots(25)$$

の大小関係により定まる。式 (25) を図示したのが 図—5 であり，第2式は $n\to\infty$ において $k=\text{const.}$ に漸近する。従つて同図より n がある常数 N より大であれば，かならず

$$n\,\delta_{k+1}(\tau)<\delta_{k+1}(n\,\tau),\quad \text{ただし}\ n>N\geqq 1\ \cdots(26)$$

が成立する。すなわち n が N よりも大であれば，τ 時間づつ n 回停止せしめられる方が，$n\tau$ 時間継続して停止せしめられるよりも，受ける損失が少ないことを示している。図—5 の第1式の勾配は $\sum_{k=1}^{k}G_k$ であり，第2式の $n=1$ における勾配は

図—5 式 (25) の概形



$$\left[\frac{d}{dn}\sum_{k=1}^{k}G_k\left(\frac{n\,\tau}{T_0}\right)\right]_{n=1}$$

$$=\frac{\tau}{T_0}P_{k-1}\left(\frac{n\tau}{T_0}\right)_{n=1}=\frac{\tau}{T_0}P_{k-1}\left(\frac{\tau}{T_0}\right)\cdots(27)$$

である。

飽和交通流においては $t_0=0$ であるから式 (24) より，

$$n\,\delta_{k+1}(\tau)\equiv\delta_{k+1}(n\,\tau)\quad\cdots\cdots(28)$$

が成立する。

実状にさらに適合させるため停止回数に比例した損失が上述の損失に付加される場合を考えよう。

いま停止時間には無関係に1回の停止により付加される損失を ρ 時間とすれば，事実上停止時間は $\tau+\rho$ となる。従つてこの場合

$$\left.\begin{aligned}n\,\delta_{k+1}(\tau+\rho)&=nv\left[\tau+\rho-t_0\sum_{k=1}^{k}G_k\left(\frac{\tau+\rho}{T_0}\right)\right],\\ \delta_{k+1}(n\,\tau+\rho)&=v\left[n\,\tau+\rho-t_0\sum_{k=1}^{k}G_k\left(\frac{n\tau+\rho}{T_0}\right)\right]\end{aligned}\right\}$$

$$\cdots\cdots(29)$$

の大小関係を判定すればよい。式 (29) の大小関係は次式の大小関係により決定される。

$$n\left[\rho-t_0\sum_{k=1}^{k}G_k\left(\frac{\tau+\rho}{T_0}\right)-\rho,\right.$$

$$-t_0\sum_{k=1}^{k}G_k\left(\frac{n\,\tau+\rho}{T_0}\right)\quad\cdots\cdots(30)$$

$$n>1,\ \rho>0$$

式 (30) の概形を 図—6 に示す。式 (30) の第2式の $n=1$ における勾配は式 (27) より $-(\tau/T_0)P_{k-1}(\tau+\rho)/T_0$ であるから次の結論をうる。

1) $\rho-t_0\sum_{k=1}^{k}G_k\left(\frac{\tau+\rho}{T_0}\right)\leqq-\frac{\tau}{T_0}P_{k-1}\left(\frac{\tau+\rho}{T_0}\right)$；

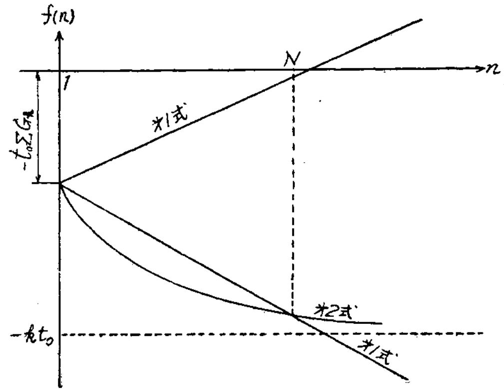
$$n\,\delta_{k+1}(\tau+\rho)<\delta_{k+1}(n\,\tau+\rho)$$

2) $\rho-t_0\sum_{k=1}^{k}G_k\left(\frac{\tau+\rho}{T_0}\right)\geqq 0$；

$$n\,\delta_{k+1}(\tau+\rho)>\delta_{k+1}(n\,\tau+\rho)$$

3) $-\frac{\tau}{T_0}P_{k-1}\left(\frac{\tau+\rho}{T_0}\right)<\rho-t_0\sum_{k=1}^{k}G_k\left(\frac{\tau+\rho}{T_0}\right)<0$

図—6 式（30）の概形



$n>N$：上記 1)，$n<N$：上記 2)

上記の結論から次の諸性質が明らかとなる。

① ρ が大であればあるほど 2) が成立しやすい。

② t_0 が小となればなるほど 2) が成立しやすい。

③ 飽和交通流ではかならず 2) が成立する。

一般に ρ は与えられる交通障害により定まる常数であるから，すべての n に対して

$$n\,\delta_{k+1}(\tau+\rho)>,\quad <\delta_{k+1}(n\tau+\rho)$$

なるためには，交通量 x はそれぞれ式 (31)，(32) を満足しなければならない。

$$\rho-\left(\frac{1}{x}-\frac{b}{v}-t_0'\right)\sum_{k=1}^{k}G_k\left(\frac{\tau+\rho}{v-bx}vx\right) \leqq -\frac{\tau\,vx}{v-bx}P_{k-1}\left(\frac{\tau+\rho}{v-bx}vx\right)\cdots\cdots\cdots(31)$$

$$\rho-\left(\frac{1}{x}-\frac{b}{v}-t_0'\right)\sum_{k=1}^{k}G_k\left(\frac{\tau+\rho}{v-bx}vx\right)\geqq 0\cdots(32)$$

ただし　$x\leqq v/(b+vt_0')$

5. 結　語

以上の考察により飽和交通流においては常識で考えられるように，各車両の受ける損失はまつたく同等であり，不飽和交通流においては交通量の減少するほどうける損失は少なくなり，その損失の算出も可能である。

また交通流に τ 時間の停止を n 回与えて受ける損失と，連続 $n\tau$ 時間の停止を与えて受ける損失との大小関係は式 (31) 及び式 (32) で与えられる交通量に応じて決定されるものであつて，一概には断定しがたい。一般に結論できることは，交通量が少ないときは長時間連続の停止を与えるよりも短時間に分割して停止せしめる方が有利であり，交通量が増大するにつれて停止時間を長くして停止回数を減少せしめた方が有利であり，それらの限界交通量は式 (31)，(32) で与えられる。

本研究にあたり，終始御指導を賜わつた京大　武居・小林両教授，米谷・後藤両助教授に深く感謝する次第である。

参 考 文 献

1) Louis A. Pipes : An Operational Analysis of Traffic Dydamics (J. Applied Physics Vol. 24, No. 3, (1953) p. 274～281.
2) Louis A. Pipes : Applied Math. for Engineers and Physicists (1946).

コンクリート重力ダムおよびアーチダムに対する基本的設計基準

Basic Design Criteria for Concrete Gravity and Arch Dams.

By J.J. Hammond.

(Journal of A.C.I., V. 25, No.8, Apr. 1954)

正員　工学博士　岡　本　舜　三*

1. はしがき

コンクリートダムについて一般に行われている設計法が現在の知識や概念に照してなお妥当であるかどうかを確かめたり，工事中や竣工後におけるダムの状態について知られた種々の知識を，あらたに設計法のなかに織りこむために，設計の基本的事項について随時検討を加えることが必要である。過去数年間におびただしい資料が集められており，建設費も嵩上しているので現在行われている設計法は経済的な，より合理的な設計を許すように改訂されるべきであると考えられていた。この趣旨で開拓局の 11 名の主任者よりなる委員会は重力ダムとアーチダムの設計に用いられる手順と準拠について再検討した。

解析された事項は，(1) 重力およびアーチダムの不安定または構造的破壊を促進する事項，(2) 安定または構造的適性を促進する抵抗力に関する事項，(3) 安全率の意義及び測定，(4) 材料および基礎の必要なる

* 東京大学教授，生産技術研究所