

動的横荷重を受けるハリの特別な
場合の剛塑性問題としての解析

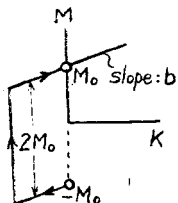
“Plastic Rigid Analysis of a Special Class
of Problems Involving Beams Subject to
Dynamical Transverse Loading”

by M. Conroy

Journ. of App. Mech. March 1955

本論文では線型なヒズミ硬化特性をもつハリが動的横荷重を受けるとき、弾性問題と同じ要領で解けることを示している。まづこの種のハリの微分方程式は対応する弾性式と同じ形であり、従つて基準函数による方法、Laplaceの方法または Boussinesqの方法等が利用でき、かつ線型方程式なることより、大きな塑性変形を含む初期値問題も重ね原理を用いて解ける。初期運動に重ね合わすべき解を擾乱部分と呼ぶこととし、その求め方を二、三例示してある。なお片持バリのごとく剛塑性境界の移動しうる場合は逆解法 (Inverse method) によつた。この種の問題はいままであまり取扱われておらず、本論文は特別な場合にしか応用できないとはいえ、取扱いやすい一群の解を与えるもので、ヒズミ硬化材としての有限バリの動的塑性変形の究明に対する出発点となりうる。

図-1



曲げモーメントと曲率 $K = \partial^2 y / \partial x^2$ の間に図-1のような線型ヒズミ硬化性を仮定する。弾性ヒズミは無視し剛塑性体と考える。なお別の仮定として考える時間の範囲にわたり曲率の変化率がハリのどの部分でも一定符号 (0 か正、または 0 か負) とする。これはもちろん解析に

用いる初期及び境界条件にある制限を与える。さて以上の仮定のもとに

$$M = \pm M_0 + bK = \pm M_0 + b \partial^2 y / \partial x^2 \dots \dots \dots (1)$$

M_0 は剛体運動に対する極限のモーメント値で b は $M \sim K$ 図の勾配で土は曲率の変化率と同符号である。(1) と平衡式 $Q = \partial M / \partial x, \partial Q / \partial x + m \partial^2 y / \partial t^2 = 0$ (ただし Q はせん断力, m はハリの単位長当りの質量) より

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad \left(\frac{1}{c^2} = \frac{m}{b} \right) \dots \dots \dots (2)$$

(2) は弾性バリと同形で曲げ剛性 EI が b に変つている点だけ異なる。

初期運動の問題 一樣断面の片持バリ (長さ l) が $x=0$ で固定され、初期運動

$$y = 2.25 t x^2 - x^2 / 30 \dots \dots \dots (3)$$

を受けるとする。これは (2) を満たし全時間にわたり自由端に $M_0 + b(4.5t - 1/15)$ を働かせることにより保たれる。 $t > 0$ に対し $x=l$ に付加曲げモーメント $9bt$ を加えたのちの運動を求める。(3) に対して K の変化率はどこでも正であるから初期運動に対して

$$M_1 = M_0 + bK_1 \dots \dots \dots (4)$$

擾乱後の全運動でも $dK/dt > 0$ が到るところ成立すれば (1) の $+M_0$ を用いた式と (4) より付加擾乱運動に対して

$$M_D = bK_D$$

さて擾乱運動は半無限 ($-\infty \sim l$) バリの $x=l$ での付加曲げモーメントに対する Boussinesq の解が近似的に用いられる (正しく $x=0$ における固定条件を満足はしないので $x=0$ でのタワミ, 勾配が少ない時間のうちはよい近似となる)。その解は初め ($t = -\infty$) で静止していた真直な半無限バリが $x=l$ で

$$\partial^3 y / \partial x^3 = 0 \quad \partial^2 y / \partial x^2 = F_1'(ct)$$

を受けるとき

$$y = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t F_1 \left(ct - \frac{\xi^2}{2\alpha^2} \right) \cos \frac{\alpha^2}{2} \alpha \alpha \quad (\xi = l - x) \dots \dots \dots (5)$$

$$F_1(ct) = \int_{-\infty}^{ct} F_1'(ct) \alpha(ct)$$

であるから、いまの場合

$$\partial^3 y_D / \partial x^3 = 0 \quad \partial^2 y_D / \partial x^2 = F_1'(ct) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{9}{c} (ct) & t > 0 \end{cases}$$

であることを考えると (5) に応じて

$$y_D = \frac{9}{\sqrt{\pi} c} \int_{(l-x)/\sqrt{2\alpha}}^{\infty} \left[ct - \frac{(l-x)^2}{2\alpha^2} \right]^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \alpha \alpha$$

よつて

$$y = 2.25 t x^2 - \frac{x^2}{30} + \frac{9}{\sqrt{\pi} c} \int_{(l-x)/\sqrt{2\alpha}}^{\infty} \left[ct - \frac{(l-x)^2}{2\alpha^2} \right]^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \alpha \alpha$$

これは $dK/dt > 0$ を与えるので解としてよい。単純支持バリ $x=0, l$ で単純支持されはじめのハリは静止していて端モーメント $M_1 < -M_0$ を受けているとし $t=0$ で分布外力

$$q(x, t) = q_0 t \sin \pi x / l$$

が働らくとき引続いて起る変形を求める。仮定よりハリは完全に塑性で擾乱運動を含めて $dK/dt < 0$ ならば

$$M = -M_0 + bK$$

$$M_D = bK_D$$

曲げモーメントが 0 から $-M_0$ までは剛体的で変位はなく M_0 を超えた部分 ($M_1 + M_0$) に対して静的初期タワミが起り、それは

$$y_I = \frac{M_1 + M_0}{2b} (l - x)x$$

擾乱部分は基準函数を用いて

$$y_D = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(n) \varphi_n(t)$$

のごとく展開するとよく知られた方法からすぐ求まり

$$X_n = \sqrt{\frac{2}{ml}} \sin \frac{n\pi}{l} x$$

及び $\varphi_n = 0 \quad (n \neq 1)$

$$\varphi_1 = \sqrt{\frac{2}{ml}} \frac{l}{2} q_0 \frac{1}{p_1^2} \left(t - \frac{1}{p_1} \sin p_1 t \right)$$

ただし $p_1 = c^2(\pi/l)^4$

$$\text{従つて } y(x, t) = \frac{M_1 + M_0}{2b} (l-x)x$$

$$+ \frac{q_0}{mp_1^2} \sin \frac{\pi x}{l} \cdot \left(t - \frac{1}{p_1} \sin p_1 t \right)$$

これは明らかに $0 < n < l, t > 0$ に対して $dK/dt < 0$ を与える。

自由境界問題 初め剛体であつて漸次塑性域が拡大してゆくと、移動する剛塑性域が生ずる。これに用いる逆解法は式(2)を満たす解析表現式に物理的意味を付加することにある。

$$y = x^2 t^2 - x^6 / 180 c^2 \dots \dots \dots (6)$$

これは $x=0: y=0, y'=0$

$$x = \xi(t) = \sqrt[4]{12} \sqrt{ct}: K = \partial^2 y / \partial x^2 = 0 \quad dK/dt = 0$$

を満たす。これは $x=0$ が固定で $x=\xi(t)$ が剛塑性の自由境界をなす。棒は $0 < x < \xi(t)$ で完全塑性、 $\xi(t) < x < l$ で剛体でありこの解は $0 < t < l^2/c\sqrt{12}$ の間は正しい。

(6) に関する物理的意味は $x=0$ で固定された片持バりが初め真直に静止し $t=0$ より自由端で $F(t)$ と $M(t)$ を受ける場合に当る。この F, M は剛体部分の併進及び回転運動式

$$F(t) + b(y''')_{x=\xi} = \int_{\xi}^l (R-\xi)(\ddot{\theta})_{x=\xi} m \alpha R$$

$$+ \int_{\xi}^l (\ddot{y})_{x=\xi} m \alpha R$$

$$M(t) + F(t)(l-\xi) = M_0 + \int_{\xi}^l (R-\xi)^2 (\ddot{\theta})_{x=\xi} m \alpha R$$

$$+ \int_{\xi}^l (R-\xi) (\ddot{y})_{x=\xi} m \alpha R$$

から求まる。上式で $\xi = \sqrt[4]{12} \sqrt{ct}$ で、また

$$(\ddot{y})_{x=\xi} = 6\sqrt{12} ct \quad (\ddot{\theta})_{x=\xi} = 6\sqrt[4]{12} \cdot \sqrt{ct}$$

である。(東京大学工学部 山口柏樹)

輸送施設の発達——ベルト・コンベヤ——

“A New Development in Transportation”

by Colonel S.H. Bingham

Traffic Engineering, April, 1955

自動車交通の急激な増大は一方において鉄道の旅客を減少させて鉄道経営の危機を招来しつつあり、また、他方街路交通の雑沓と速度低下をもたらして都市

交通を混乱させている。街路交通緩和の方策として自家用車の交通を大量輸送機関に吸収することが最も効果的であるが、そのためには在来の鉄道の欠点を改良し、さらに輸送能力を向上させる必要がある。すでに工業においてはコンベヤ・システムによつてコストを低下させ生産能力を向上させている。同じことが大量輸送についても考えられる。コンベヤ・システムの採用は輸送手段の画期的な進歩である。

ニューヨークのグラランド・セントラルとタイムズ・スクエアーの間(約 600 m)に 1918 年以来 Shuttle が運転されているが、これはすでに老朽化しており、経費が高く、乗客に不便で久しくその近代化が要望されていた。この Shuttle はニューヨーク市内の重要な交通機関であり、各方向に毎日 6 万人の乗客を運んでいる。現在 4 車線が設定されているが、その中央の 2 車線をベルト・コンベヤとし、両側各 1 車線を歩道または待避所に転用し、沿道に商店街を作ることにすれば、既存施設を十分に活用して、しかも輸送能力をいぢるしく増大することができよう。

ここに設けるべきベルト・コンベヤは各方向に毎時 12000 人以上の輸送力を持ち、しかも安全性は現在の地下鉄と同程度であり、迅速、快適、利便を与え、運転費は在来の Shuttle よりも安く、建設費は Shuttle の改良費よりも低廉でなくてはならない。さらにまた現在の Shuttle の半分の占用面積で上記の効果を挙げよう設計しなければならぬ。

今次設計されたコンベヤは 1 方向 1 時間当り 16000 人の輸送力を持ち、乗心地は在来の Shuttle よりも快適で、待たずに乗れて 2 分間で終点到着できる。運転費及び維持費は在来の半額で済み、建設費はトンネル改修費を含めて約 500 万ドル、これは Shuttle の改良費よりも安い。

コンベヤ・カーの速度は乗降場付近では 1.5 mile/h とし、下にゴムタイヤの車輪を並べ、乗降場を離れるにつれて車輪の回転速度を増加してゆき、最高速度は 15 mile/h とする。乗客はまづ時速 1.5 マイルの乗車用ベルトの上を歩いて乗車場からコンベヤ・カーに乗る。コンベヤ・カーは乗車場を出ると自動的にドアが閉まり、次第に加速され、降車場に近づくと再び減速し、到着と同時に自動的にドアが開いて降車用ベルトと同じ速度 (1.5 mile/h) になり、乗客は降車する。このようにしてコンベヤ・カーの連続流動は待ち時間をなくし、プラットフォームの混雑を解消する。

このコンベヤ・カーの座席は 10 個、定員は約 21 名である。運転はマスター・コントロール室で行う。運転手はこの室内にいてテレビジョンによつて観測して調整を行う。

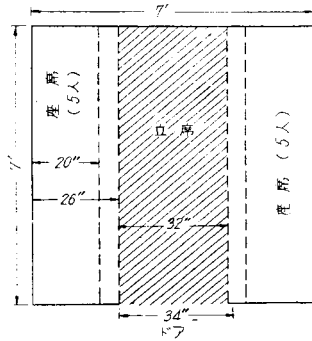
コンベヤ・カーはすでに 1953 年に模型実験を行い、最近は大物大の模型を造つて乗降の実験を行つたが、あらゆる人々に好適であり、かついぢるしい輸送効果が実証された。高速交通機関として、安全、経済、

能率の点でベルト・コンベヤ方式に優るものはない。また、弾力性に富んでいるため、どんな場所にも設置容易であり、塵埃、騒音、振動をとまなわない利点がある。

ニューヨークでは前記の区間以外にさらにこの方式の拡張を考慮中である。シンシナティーでも延長7200 ftの区間にコンベヤ・カーの運転を研究中であり、サンフランシスコ、ボストン、サンパウロ等でもベルト・コンベヤ方式に深い関心が持たれている。

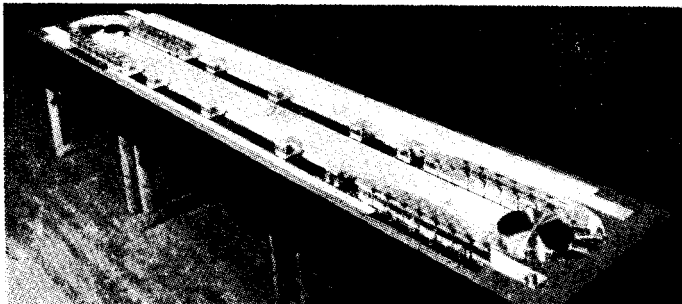
大きな駐車場、空港、鉄道終端駅、野外運動場等多数群集の集積する地点についてもこのコンベヤ・カーが採用されるに至るであろう。

図-1 平面図



コンベヤ・カーの寸法
 立席面積 32'×80'=2560□'
 1人当り占用面積=216□'
 $\frac{2560}{216}=11.85$ 人
 座席数=10 定員=11.85+10=21.85 人

写真-1



(建設省計画局 中村 滋)

水路の曲りにおける速度分布と境界層
 "Velocity Distribution and the Boundary Layer at Channel Bends"

by H.A. Einstein and J.A. Harder

Tran. American Geophysical Union.
 Feb. 1954, p. 114~120

1. 開水路の曲りの部分は一般的に遠心力の影響は

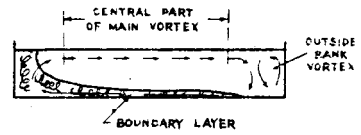
もちろん、直線部から曲線部への遷移部分にかけて側壁から発生する攪乱波の影響や、側壁や水路床に沿う境界層の発達とともに生ずるラセン状の二次流の影響のためはなはだ複雑な様相を呈する。本文では簡単のため攪乱波で適当に吸収するように設計された遷移部分を通りすぎて流れが平衡状態に達し、流線が同心円状になった場合を取扱っている。しかしてその部分の半径方向の速度分布と境界層との関連性を理論的に考察し、このような現象を適確に表現すべき parameter を導き、この parameter が実験的に水路の相対粗度や Reynolds 数とどのような関係にあるかを調べた。さらに境界層の発達のしかたと、二次流の発生や摩擦抵抗との関係を説明している。

2. 完全流体が曲りを平衡状態で流れる場合には、半径方向の速度分布に関し

$$\frac{r}{V} \frac{dV}{dr} = -1 \dots \dots \dots (1)$$

あるいは $rV = \text{const.}$ が成立する。ただし r は曲率の中心より任意点までの距離、 V はその点の円周方向の流速である。しかしながら実測によれば、この値は -1 よりかなり大きな値をとっており、このことは明らかに二次流のためである。図-1 は観察によりえられた二次流の機構を示すものである。まづ水路床の摩擦によつて生ずる境界層が次第に発達す

図-1 Secondary Currents in the Channel Cross Section



るにつれて、上層の流速は下層のそれにくらべて大きくなるので、上層部は余分な遠心力を受けることになる。

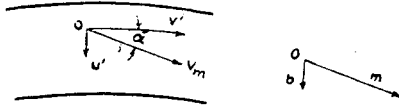
従つて上層では外向き、下層では内向きの流れを生じ、全体として中心部に大きな渦ないし循環流が形成され、さらにこの影響により境界層も図に示すような形状となる。一方外側壁の付近では側壁の摩擦のため小さな渦を生ずる。いま流れを上下の二層に分けて考え上層の半径方向の流速及び切線方向の流速を U, V 下層のそれらを U', V' とする。Euler の運動方程式を上層部に適用すれば

$$\frac{r}{V} \frac{dV}{dr} = \frac{gr}{UV} (s - s_f) - 1 \dots \dots \dots (2)$$

をうる。ただし s は水面勾配、 s_f は摩擦勾配、 g は重力加速度を表わす。流れが等流状態であれば $s = s_f$ となるはずであるが、摩擦の影響は下層部の境界層に限られるので、上層の流れに対しては s_f は非常に小となる結果、上式の左辺は -1 より大きくなる。

3. 図-1 に示す循環流と円周方向の主流とが合成

図-2 Velocity Components within the Lower Layer



されてラセン流となるのであるから、外側壁に近い下層での流れの状態は図-2 のようになる。すなわち上層から流れが切線方向に対し \$\alpha\$ なる角度で入りこんだとし、その方向の流速を \$V_m\$、O 点からの距離を \$m\$ とすれば、\$V_m\$ の切線方向及び半径方向の各成分が \$V'\$、\$U'\$ となる。ここで境界層の平均の厚さを \$\delta\$ とし、これが距離 \$m\$ に比例すると考え、さらに循環流の中を \$B\$ とすれば

$$\delta = c_2 m = \frac{c_2 B}{\cos \alpha} \frac{V'}{U'} \dots\dots\dots (3)$$

さらに水深を \$D\$ として循環流の連続の条件を求めると $U(D-\delta) = \delta U'$ (4)

一方上下層の流れは全体としてみれば摩擦によるエネルギー損失があるので、これが水面勾配と釣合っていると考えれば

$$s = \frac{f}{4R} \frac{\bar{V}^2}{2g} \dots\dots\dots (5)$$

ただし \$f\$ は摩擦抵抗係数、\$R\$ は径深、\$\bar{V}\$ は平均流速。(2), (3), (4) より \$\delta, U\$ を消去し、さらに (5) で \$s\$ を表わせれば、結局

$$\frac{r}{V} \frac{dV}{dr} = f \left(\frac{\cos \alpha}{c_2} \right) \left(\frac{\bar{V}^2}{VV'} \right) \left(\frac{D-\delta}{8R} \right) \left(\frac{r}{B} \right) \times \left(1 - \frac{s_f}{s} \right) - 1 \dots\dots\dots (6)$$

となるが、流れの性質を検討すれば近似的にはつぎのように単純化してさしつかえない。

$$\frac{r}{V} \frac{dV}{dr} = cf \left(\frac{r}{B} \right) \left(1 - \frac{s_f}{s} \right) - 1 \dots\dots\dots (7)$$

4. 実験は直線水路よりラセン形の緩和曲線水路を経て円形水路で行い、水路断面は巾 16 in, 深さ 4 in の矩形, 水路中心線の曲率半径は 10 ft である。流速は浮子で測定し、\$\log V \sim \log r\$ 図を作成し、得られる直線の勾配より \$\frac{r}{V} \frac{dV}{dr}\$ を求める。循環流の中心部では上層に対する \$s_f\$ の影響は無視できるので (7) より

$$f = c_3 \left[\frac{r}{V} \frac{dV}{dr} + 1 \right] \frac{B}{r} \dots\dots\dots (8)$$

と書ける。一方 \$f\$ は本質的には Reynolds 数や相対粗度の関数であるので、(8) の検討には実験より求めた $\left[\frac{r}{V} \frac{dV}{dr} + 1 \right] \frac{B}{r} = Y$ の値を相対粗度や Reynolds 数で整理するのが合理的である。図-3 は粗い水路床を

図-3 Experimental Values of $\left[\frac{r}{V} \frac{dV}{dr} + 1 \right] B/r$ Plotted Against Depth for a Hydraulically Rough Channel

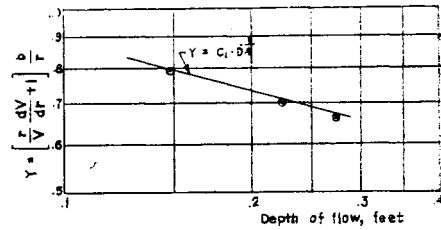
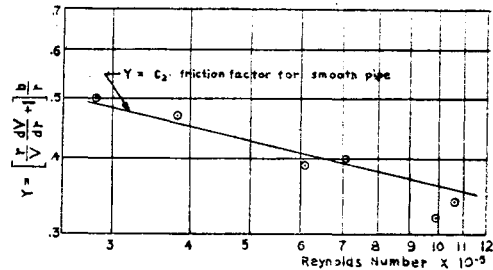


図-4 Experimental Values of $\left[\frac{r}{V} \frac{dV}{dr} + 1 \right] B/r$ Plotted Against Reynolds Number for a Hydraulically Smooth Channel



持つ流れに関し、上述の \$Y\$ の値と水深 (相対粗度を意味する) との関係を表わしたものである。図の実験値を連ねた直線の勾配は \$-1/4\$ となり、一方 \$f\$ が相対粗度の \$1/4\$ 乗に比例することを考慮すれば (8) の妥当性を裏づけることができる。図-4 は滑らかな水路床を持つ流れに関し、\$Y\$ の値と Reynolds 数との関係を示すもので、実験結果より考察すると上述の値は同じ径深や Reynolds 数を持つ滑らかな管路に対する抵抗係数にある常数をかけたものに等しいことがわかる。

5. 水路巾に比して水深の少ないときには境界層の発達がすぐに水面にまで達し、上層の流れにも摩擦力が及び始める。そのような際には摩擦勾配が水面勾配に近づくにつれて \$\frac{r}{V} \frac{dV}{dr}\$ は \$-1\$ に近づくので、実験水路のように水路巾と曲率半径の比が小さい場合には \$\log V \sim r\$ 図の実験値を連ねた直線の勾配は次第に小になりほぼ水平となる。しかしながらこのような流れは不安定なものようであつて、ただちに新しい境界層が形成され、それにともなつて生ずる二番目の循環流が水路の内側を占めるようになる。このように断面内に二重の循環流の生じ始めるのは、粗い水路床の場合には水路巾と水深の比が 9, 滑らかな水路床の場合には 12 のときであり、境界層の発達は予期したとおり抵抗係数に関係している。

(東京大学工学部 嶋 祐之)