

構造物の安全率と破損の確率

准員 池田 哲夫*

SAFETY FACTOR AND PROBABILITY OF FAILURE OF STRUCTURES

(JSCE May 1955)

Tetsuo Ikeda, C.E. Assoc. Member

Synopsis A procedure of structural design should consist of load analysis, strength analysis and safety analysis.

The author presented, as a index of safety of structures, a new definition of probability of failure of structures, which was considered most rational. He studied the relations between safety factor and probability of failure of structures, and proposed a rational procedure of the determination of safety factor of structures.

要旨 構造物の設計には、構造物に作用する荷重および構造物の強度を解説し、構造物の破損に対する安全度を適当な値に保つことが重要である。ここでは構造物の安全度を示す指標として、最も合理的と思われる破損の確率を定義し、破損の確率と慣用設計法に用いられる安全率との関係を論じ、安全率の統計的性質を明らかにするとともに、安全率の合理的決定法を述べ、最後に二、三の実例を述べる。

1. まえがき

構造物の設計においては、荷重の性質、構造物の破損に対する抵抗力、すなわち構造物の強度および構造物の破損に対する安全度の3つが、最も重要な要素であり、これら要素間の関係を合理化することが、とりもなおさず、設計の合理化であることができよう。

ところで、上記要素のうち、構造物の安全度は、構造物の価値と経済性とに關係し、安全度の適正化は、塑性論を考慮した構造物の極限設計理論 (Theory of Limit Design) の研究とともに、将来、新設計理論の基本となる最も重要な問題の一つである。

構造物の安全度の問題は、安全率あるいは許容応力の問題として古くから論じられているが、その本質はまだ十分解明されていないようであり、今日行われている安全率、許容応力の決定法にも、あいまいな点が残されている。1945年、A.M. Freudentahl が、破損の確率という統計的概念を導入して安全率を説明して以来¹⁾、安全率の問題は各国、特にアメリカ、英國、フランス、スエーデン等でさかんに研究されるようになり、第3回および第4回の橋梁・構造国際会議においても、主要議題の一つとして論じられてきた。

著者はさきに、Freudentahl の破損の確率に対する

定義の不備を指摘し、新しい定義を与えるとともに、安全率の合理的決定法について論じたが²⁾、ここではこの理論を一般化するとともに二、三の実例について考察する。

2. 構造物の破損の確率

構造物の破損とは、一般に構造物の破断、座屈、不安定化、異状変形等、構造物本来の機能を損傷するような状態が起ることである。構造物を1個の剛体と考え、その静力学的安定を論ずる石工構造物等の破損は割合に明瞭であるが、一般構造物の破損については種々異なる考え方があるようである。すなわち弾性論によって計算した応力あるいはヒズミ、あるいはエネルギーが、ある一定値を超過するのを破損と考える場合もあり、あるいは極限設計理論のいう極限状態を破損と考える場合もある。また同一種類の状態変化でも、構造物の規模、重要度等によつて破損を考える場合と考えない場合があり、そのときどきによつて判断しなければならない。どんな状態変化を破損と考え、設計の基準にするかは、設計法の基本問題であるが、ここではこの問題にはふれないことにし、適当な理論によつて破損状態は決定されたものと仮定する。破損状態が決定されると、これに対してこの状態に達するまでに、構造物が支持しうる荷重の大きさを決定することができる。こうして決定された荷重の大きさは、いいかえれば、破損状態に対応する構造物の強度である。

構造物が破損しないためには、その破損に対応する強度は、構造物に作用する荷重より大きくなければならない。構造物の安全を保つため、今日一般に行われている設計法では、推定された基本強度の何分の一かを許容強度とし、構造物に作用する荷重の大きさを許容強度以下に制限するという方法を採用しており、基

* 建設省土木研究所

本強度と許容強度との比を安全率と呼んでいる。

安全率の概念は、時代とともに変つてきたが、その意義は、荷重、強度に関する人間知識の不完全性を補うため、基本強度を割引くということであり、安全率は本来、無知係数 (Factor of ignorance) とでも呼ばれるべきものである。したがつて安全率の値は、構造物の安全度とは直接関係ではなく、構造物相互の安全度を、設計に用いた安全率によつて比較することはできない。

ところで、構造物の安全度を適當な値に保つことは設計の合理化には最も必要なことの一つであるから、安全度を知る必要が生ずる。A. M. Freudentahl¹⁾ は安全度を示す指標として、構造物の破損の確率 (Probability of Failure) というものを考え、次のように定義した。

すなわち、荷重の大きさを S 、強度を R とするとき、 S, R は種々の原因によつて、確率変数として変化する。いま、出現する確率がほとんどないと考えられるくらいに大きい荷重が現われる確率を P_s 、出現する確率がほとんどないと思われるくらいに小さい強度が現われる確率を P_r とすれば、破損の確率 P_f は

$$P_f = P_s \cdot P_r \quad \dots \dots \dots (1)$$

である。そうして、 S, R の確率関数をそれぞれ $\phi(S)$ 、 $\psi(R)$ とすれば、 P_s, P_r はそれぞれ次のようになる。

$$P_s = \int_u^{\infty} \phi(S) dS$$

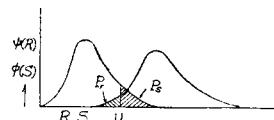
$$P_r = \int_{-\infty}^R \psi(R) dR$$

したがつて

$$P_f = \int_u^{\infty} \phi(S) dS \cdot \int_{-\infty}^R \psi(R) dR \quad \dots \dots \dots (2)$$

であり、 P_f は u を変化させて、その最大値をとることにしている(図-1)。ところで、荷重の大きさが強度をこえる場合に

図-1



は、構造物は破損するのであるが、式(1)あるいは(2)で定義された破損の確率は、構造物が作用する荷重の大きさが強度をこえる確率である。いま、荷重の大きさを L 、強度を S 、破損の確率を μ とすれば、上記の定義は次のように表わされる。

$$\begin{aligned} \mu &= P_f \{L > S\} \\ &= P_r \{L - S > 0\} \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (3)$$

ただし、 $P_r \{A\}$ とは事象 A が現われる確率を表わす

記号とする。荷重 L の確率関数を $\phi(L)$ 、強度 S の確率関数を $\psi(S)$ とすれば、

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(L) \int_{-\infty}^L \psi(S) dS dL \quad \dots \dots \dots (4)$$

あるいはまた、次のように考えることもできる。

$$X = L - S \quad \dots \dots \dots (5)$$

とおいて、 X の確率関数を $\kappa(X)$ とすれば、

$$\left. \begin{aligned} \mu &= P_r \{X > 0\} \\ &= \int_0^{\infty} \kappa(X) dX \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (6)$$

以上のようにして、破損の確率 μ は、 $\phi(L)$ 、 $\psi(S)$ 、あるいは $\kappa(X)$ がわかれば計算することができる。破損の確率がわかれば、構造物の安全度はこれによつて比較することができ、破損の確率が小さいほど、安全度は大きいことになる。

3. 荷重、強度の確率関数

荷重、強度は種々の原因によつて、確率変数として変動する。実用上、問題となる原因のうち、そのおもなものは次のようにある。荷重に関するものとしては、荷重現象の概然性、荷重計算の誤差(荷重に関する仮定、理論の不完全、構造物の力学的性質の不均一性、数値計算の誤差)であり、強度に関するものとしては、強度計算の誤差(材料の抵抗機構に関する仮定の不完全、構造物の材質の不均一性、不連続性、材令の変化等による抵抗力の変動)、構造物の寸法の誤差(工作上の誤差、材料寸法の公差、使用期間中の磨滅、腐食)である。次に荷重、強度の変動の状態を示す確率関数の形が問題になるが、荷重、強度に関する確率関数は実用的には次のような式で表わすことができるようである。

(i) 正規分母関数

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right] \quad \dots \dots \dots (7)$$

(ii) ゲラム・シャリエの分布関数

$$p(x) = \Phi_0(x) - \frac{k}{3!} \Phi_3(x) + \dots \quad \dots \dots \dots (8)$$

ただし、

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right]$$

$$\Phi_n(x) = \frac{d^n}{dx^n} \Phi_0(x)$$

(iii) 対数正規分布関数

$$p(x) = \frac{1}{x \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \ln^2 x\right]$$

これら確率関数の実例は後で述べることにする。

4. 破損の確率の計算

荷重、強度の確率関数が決定すると、構造物の破損

の確率を計算することができる。つぎに $\phi(L)$, $\psi(S)$ に特定の関数を採用した二、三の場合について、破損の確率を計算しておこう。

(i) 荷重が一定値 L_0 である場合 (図-2)

この場合には

$$X = L - S = L_0 - S$$

となるから、

$$p(X) = \psi(L_0 - X)$$

となり、したがつて

$$\begin{aligned} \mu &= \int_0^\infty p(X) dX = \int_0^\infty \psi(L_0 - X) dX \\ &= \int_{-\infty}^{L_0} \psi(t) dt \quad \dots \dots \dots (9) \end{aligned}$$

(ii) 強度が一定値 S_0 である場合 (図-3)

この場合には

$$p(\bar{X}) = \phi(S_0 + X)$$

となり、したがつて

$$\mu = \int_0^\infty \phi(S_0 + X) dX = \int_{S_0}^\infty \phi(t) dt \quad \dots \dots \dots (10)$$

(iii) $\phi(L)$, $\psi(S)$ がともに正規分布関数である場合

$$\phi(L) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_L} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{L-\bar{L}}{\sigma_L}\right)^2\right]$$

$$\psi(S) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_S} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{S-\bar{S}}{\sigma_S}\right)^2\right]$$

とすれば、 $X = L - S$ の確率関数は次のような正規分布関数となる。

$$p(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\bar{X}}{\sigma_X}\right)^2\right]$$

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_L^2 + \sigma_S^2}$$

$$\bar{X} = \bar{L} - \bar{S}$$

したがつて、

$$\begin{aligned} \mu &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\bar{X}}{\sigma_X}\right)^2\right] dX \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\bar{X}}{\sigma_X}}^\infty \exp\left[-\frac{t^2}{2}\right] dt \\ &\stackrel{=} {1-P_C} \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (11)$$

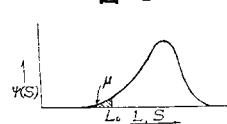
ただし、

$$C = -\frac{\bar{X}}{\sigma_X}$$

$$P_C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^C \exp\left[-\frac{t^2}{2}\right] dt$$

(iv) $\phi(L)$, $\psi(S)$ がともに、グラム・シャリエの

図-2



分布関数である場合

$$\phi(U) = \Phi_0(U) - \frac{k_L}{3!} \Phi_3(U) + \dots \dots$$

$$U = \frac{L - \bar{L}}{\sigma_L}$$

$$\psi(r) = \Phi_0(r) - \frac{k_S}{3!} \Phi_3(r) + \dots \dots$$

$$r = \frac{S - \bar{S}}{\sigma_S}$$

とすれば、 $p(X)$ は次のようなグラム・シャリエの関数になる。

$$p(X) = \Phi_0(t) - \frac{k_X}{3!} \Phi_3(t) + \dots \dots$$

$$t = \frac{X - \bar{X}}{\sigma_X}$$

$$X = \bar{L} - \bar{S}$$

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_L^2 + \sigma_S^2}$$

$$k_X = \frac{k_L \sigma_L^3 - k_S \sigma_S^3}{\sigma_X^3}$$

となり、破損の確率は次のようになる。

$$\begin{aligned} \mu &= \int_0^\infty p(X) dX = \int_C^\infty \left\{ \Phi_0(t) - \frac{k_X}{3!} \Phi_3(t) + \dots \right\} dt \\ C &= -\frac{X}{\sigma_X} \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (12)$$

(v) $\phi(L)$, $\psi(S)$ がともに対数正規分布関数である場合

$$\phi(L) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_L} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln L - \ln L_0}{\delta_L}\right)^2\right]$$

$$\psi(S) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_S} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln S - \ln S_0}{\delta_S}\right)^2\right]$$

とする。いま、

$$X = \ln \frac{L}{S}$$

とおけば、

$$\mu = P_r[X > 0] = \int_0^\infty p(X) dX$$

となる。ところで

$$p(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_X} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{X - \bar{X}}{\delta_X}\right)^2\right]$$

$$\bar{X} = \ln \frac{L_0}{S_0}$$

$$\sigma_X = \sqrt{\delta_L^2 + \delta_S^2}$$

であるから

$$\begin{aligned} \mu &= 1 - P_C \\ C &= -\frac{\bar{X}}{\delta_X} = \frac{\ln \frac{S_0}{L_0}}{\sqrt{\delta_L^2 + \delta_S^2}} \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (13)$$

となる。

構造物に対して、2.で述べたようなことを考えて、もつとも適當と思われる破損の確率 μ_0 を決定し、5.で述べた方法で安全率を決定するのが、もつとも合理的な安全率の決定法と思う。

たとえば、荷重の確率関数 $\phi(L)$ が $v_L=0.2$ の正規分布で、強度の確率関数 $\psi(S)$ が $v_S=0.1$ の正規分布で表わされる場合に、 $\mu_0=10^{-5}$ と指定されたとするならば、 $C=4.2$ となり、 $V_L=0.84$ 、 $V_S=0.42$ となるから、図から、 $\zeta_0=2.25$ となる。設計荷重として荷重の平均値 \bar{L} を、基本強度として強度の平均値 \bar{S} を用いるものとすれば、設計安全率 ζ_d は ζ_0 に等しくなり、許容強度としては、 \bar{S}/ζ_d を用いればよいことになる。

7. 実例

簡単な場合について次に数例を述べる。

(1) 強度に関する確率関数 構造物の強度の一要素である材料強度の確率関数の母数について、実例を示す。表-1 は鋼材の降伏点に関するものである。こ

表-1 鋼材の降伏点

区分	平均値 \bar{x}	標準偏差 σ	偏差係数 v	ヒズミ度 k	試料数 N	摘要
SS 41	kg/mm ² 27.2	kg/mm ² 3.79	0.139	0.34	50	載時規格品 板
	32.8	4.92	0.150	0.04	325	昭和24年橋 梁使用鋼材 山形鋼
	29.3	1.99	0.068	0.19	1 240	昭和29年橋 梁使用鋼材 山形鋼
	30.6	2.83	0.093	0.29	652	鉄筋
SV 34	26.0	1.65	0.063	—	118	昭和29年橋梁使 用鋼材
St. S 52	37.9	2.22	0.059	0.19	190	相模大橋用鋼材
St. 37	28.1	2.38	0.085	0.28	4232	
St. 52	38.2	1.73	0.045	1.63	2950	ドイツの鋼材
H S B	40.2	2.62	0.065	—	640	

れによると、鋼材の降伏点に関しては、 $v=0.05 \sim 0.10$ 、 $\delta=0.02 \sim 0.05$ と考えられる。表中、SS 41 について、A, B は鋼材の品質が低下した場合の値を示している。表-2 は鋼材の引張強さの母数を示したものである。引張強さに関しても $v=0.05 \sim 0.10$ である。

表-2 鋼材の引張強さ

区分	平均値 \bar{x}	標準偏差 σ	偏差係数 v	ヒズミ度 k	試料数 N	摘要
SS 41	kg/mm ² 44.7	kg/mm ² 4.12	0.092	0.10	432	昭和24年橋 梁使用鋼材 山形鋼
	43.7	2.65	0.061	—	1 260	昭和29年橋 梁使用鋼材
	45.9	4.03	0.088	0.21	531	鉄筋
	44.0	4.02	0.091	0.28	642	“
SS 39	A 42.8	2.39	0.056	—	253	
	B 42.0	2.04	0.049	—	279	
SV 34	A 38.1	1.60	0.042	—	176	
	B 37.4	2.08	0.056	—	118	昭和29年橋梁使用 鋼材

表-3 は鋼材の降伏点を対数正規分布関数で表わし

たときの母数である。

表-3 鋼材の降伏点

区分	SS 41	St. S 52	St. 37	St. 52 H S B	摘要
x_0 (kg/mm ²)	29.24	37.84	28.02	38.16	表-1 と同じ試
σ	0.0297	0.0253	0.0365	0.0195	料から計算した
N	1 240	190	4 232	2 950	ものである。

鋼材の疲労強度に関する v は、降伏点や引張強さの v よりいくぶん大きいようである。リベット継手の強度に関する適当な統計的資料はないようであるが、この場合も v は鋼材のそれと大体おなじと考えてさしつかえないと考えられる。溶接継手の静強度の一例を示せば、表-4 のようである。この場合は、大体 $v=0.05 \sim 0.12$ である。溶接継手の疲労強度についても、 v は静強度のそれよりいくぶん大きく、大体 $v=0.10 \sim 0.15$ のようである。

コンクリートの強度は、一般にその圧縮強度を基本にして考えているが、圧縮強度を正規分布で表わすことは、今日一般的になつていているから、実例は省略するがその偏差係数 v は、管理のよい現場で 0.10 ～ 0.12、管理のあまりよくない現場では 0.12 ～ 0.15 のようである。

表-4 つき合せ溶接継手の引張強さ

区分	平均値 \bar{x}	標準偏差 σ	偏差係数 v	ヒズミ度 k	試料数 N	摘要
A	kg/mm ² 43.2	kg/mm ² 5.15	0.119	-0.27	101	鉄筋
	47.6	2.72	0.057	-0.13	30	“
	40.4	3.23	0.080	-0.48	48	板
	28.1	1.16	0.042	0.42	47	[降伏点] 板

木材の強度の一例として、国産木材の引張強さを示すと表-5 のようである。 v は他の材料にくらべて非常に大きいことがわかる。表-6 は鋼材寸法の変動を示し、呼び寸法と実寸法との比で表わしている。

表-5 木材の引張強さ

区分	平均値 \bar{x}	標準偏差 σ	偏差係数 v	ヒズミ度 k	摘要
ヒノキ	kg/mm ² 573	kg/mm ² 160	0.28	—	繊維に平行、気乾 状態
アカマツ	574	201	0.35	1.38	“
ク リ	598	209	0.35	1.16	“
カ シ	1 235	309	0.25	0.20	“

表-6 鋼材の寸法

区分	平均値 \bar{x}	標準偏差 σ	偏差係数 v	ヒズミ度 k	試料数 N	摘要
丸 鋼	kg/mm ² 0.9976	kg/cm ² 0.0249	0.025	-0.57	240	直徑
	0.9894	0.0168	0.017	-0.01	652	“
板	1.0076	0.0181	0.018	—	257	厚さ
	1.0009	0.0164	0.016	—	140	“
山形鋼 ナス肉 面積	1.0700	0.1220	0.114	0.24	122	仕上ナス肉 溶接

(ii) 荷重に関する確率関数 表-7 はコンクリート、木材の比重の変動を示す一例である。鋼材の比重変動は実用上ほとんど考える必要はないようである。

表-7

区分	平均値 \bar{x}	標準偏差 σ	偏差係数 σ/\bar{x}	ヒズミ度 k	摘要
コンクリート	kg/mm^2 2.36	kg/mm^2 0.045	0.019	-0.24	配合1:2:4 湿润状態
スギ	0.39	0.066	0.169	—	気乾状態
ヒノキ	0.45	0.054	0.121	0.21	“
アカマツ	0.50	0.080	0.160	—	“
ケヤキ	0.69	0.103	0.148	1.16	“

8. 結び

以上は安全率と破損の確率について、主として抽象

的に考察したのであるが、これによつて安全率の意義を明白にすることはできたのではないかと思う。なお荷重、強度のとり方、破損の確率の大きさ等について研究する必要があり、各種構造物についての統計的諸値を調査する必要があるが、これらについては改めて発表する予定である。

最後に終始御指導を賜わつた京大教授小西一郎博士に謝意を表する。

参考文献

- 1) A.M. Freudentahl.: "The Safety of Structures", Proc. ASCE., Vol. 71, No. 8, 1945.
- 2) 池田哲夫: "安全率の合理的決定法", 土木学会第7回年次学術講演会で発表, 昭26 (昭.30.10.25)

PBリポートの利用案内

本館では皆様の要望に応えて数年前から PB リポートの完全な 1 セットの収集に努力してまいりましたが、最近ようやくその大部分を入手することができました。また地方の方々の便宜をはかるために昨 29 年度には関西地区に、また本年度には中部ならびに九州地区に PB センターを設置して、PB リポートの普及徹底につとめて参りました。この機会に本館で行つている PB リポートの業務内容を御紹介して、学協会ならびに会員各位の一層の御利用をお願い致したいと存じます。

1. 公開閲覧

PB リポート総件数 88 423 件（昭和 30.3 月現在）のうち、約 2000 件はミメオグラフであります。他は全部マイクロフィルムであります。なお今後発行の分に対しても年次事業として毎年発注し、輸入次第これを公開する予定であります。

2. 複写頒布

前記本館内 PB 閲覧室において複写申込みに応じております。

引伸（ハツ切印画紙に焼つけ） 1 枚 30 円

リプリント（35ミリフィルム）最初の 1 ft は 100 円、あとは 1 ft 増すごとに 30 円増し。

作製期間 申込受付日から約 7 日から 10 日間（詳細は PB リポート閲覧室へお問合せ下さい）

3. PB センターの設置

- (1) 関西地区センター 昭和 29.4 月公開 大阪府立図書館
公開リポート 56 232 件 74 000 冊
- (2) 中部地区センター 昭和 30.4 月公開予定 名古屋市立鶴舞図書館
公開リポート 2 133 件 2 930 冊
- (3) 九州地区センター 昭和 30.4 月公開予定 福岡県立図書館管理 九州大学工学部教室
公開リポート 2 544 件 3 847 冊

東京都千代田区永田町 1 の 1

国 立 国 会 図 書 館

電 話 (58) 0609・639・721