

# 彎曲底面開水路を流れる不等速定流の一解法

王 員 荒 木 正 夫\*

## A SOLUTION OF NON-UNIFORM STEADY FLOW IN OPEN CHANNELS WITH VERTICAL CURVATURE

(JSCE Sept. 1954)

Masao Araki, C. E. Member

**Synopsis** Some formulas determining water profiles and pressures in rectangular open channels with vertical curvature are presented in this paper, and checked with experimental results.

**要旨** 底面彎曲による遠心力の影響を無視することができない短形及び2次元水路に適用しうる、不等速定流の計算式並びに底面彎曲断面内圧力の計算式の一列を提示し、これ等の公式に基く計算結果を実験値と比較することによつて各公式の適用範囲を求めたものである。

### 1. 総 論

従来用いられている不等速定流の解法においては、底面彎曲による遠心力の影響は考慮されていないように見受けられる。一般に常流の場合には流速緩かなために遠心力の影響なるものはほとんど無視できる程度であるから従来の公式で充分であるが、ダムの上流部またはシュート内を流下する流れ等のごとく高速流れの場合には、遠心力の影響は相当大きく、これを無視した従来の計算法では、水面形及び底面の負圧の程度並びに開水路流れとして流れうる限界等を求めることはできないのである。

そこで筆者は水路床の曲率半径  $r_0$  が一定 (円弧底) なる場合について、短形及び2次元水路に適用しうる不等速定流の近似解法を求め、さらにこの解法による計算結果を実測値と比較してみることにした。

### 2. 一般公式の誘導

(1) 速度分布式と圧力分布式 図-1 のごとき場合について2次元円弧座標  $r, \theta$  を用いた Euler の運動方程式及び連続の式は、 $\theta, r$  の増す方向の速度をそれぞれ  $u, v$  とし、 $p$  を圧力、 $\rho$  を流体密度、 $g$  を重力加速度とすると

$$v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{u}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{u^2}{r} = -g \cos \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \dots \dots \dots (1)$$

$$v \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{uv}{r} = g \sin \theta$$

$$\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \dots \dots \dots (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (rv) + \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0 \dots \dots \dots (3)$$

また流れは非回転的と考えられるから

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0 \dots \dots \dots (4)$$

ここで半径方向の速度成分  $v$  は  $\theta$  方向の速度成分  $u$  に比してきわめて小さいと仮定する。しかるときは  $u$  を1の大きいとすると、 $v$  は  $\delta$  の大きいとし、これらをそれぞれ  $(\sim 1), (\sim \delta)$  で表わす。  $r \partial v / \partial r \sim \delta$  と考えれば、連続の式より  $\partial u / \partial \theta \sim \delta$  となる。(4) 式において  $\partial v / \partial \theta \sim \delta^2$  は、 $u \sim 1, r \partial u / \partial r \sim 1$  に比して無視できるから次式がえられる。

$$u + r \frac{\partial u}{\partial r} = 0 \dots \dots \dots (5)$$

(1) 式において  $v \partial v / \partial r \sim \delta^2, u/r \partial v / \partial \theta \sim \delta^2$  は、 $u^2/r \sim 1$  に比していちじるしく小さいから省略することができる。また (5) 式を (2) 式に代入すれば (2) 式の左辺の第1, 第3項は消える。従つて (1)~(4) 式は近似的に次式となる。

$$\frac{u^2}{r} = g \cos \theta + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \dots \dots \dots (6)$$

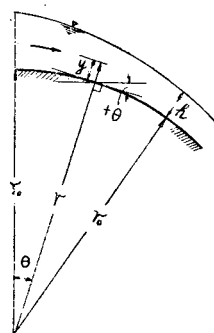
$$u \frac{\partial u}{\partial \theta} = rg \sin \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} \dots \dots \dots (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (rv) + \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0 \dots \dots \dots (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (ru) = 0 \dots \dots \dots (9)$$

この4方程式が基本方程式である。ただし、前述

図-1



\* 建設技官, 土木研究所河川構造物研究室

の  $v$  は  $u$  に比してきわめて小さいとする基本仮定により, これらの各式は一般に水深と底面曲率半径との比が小さく, かつ支配断面の付近を除く高速開水路流れについてのみ成立することは明らかである。(9) 式を積分して  $A$  を  $r$  に無関係なる常数とすると

$$u = \frac{A}{r}$$

水路の単位巾当りの流量を  $q$  とし, 底面の曲率半径を  $r_0$ , 断面内の任意点の底からの距離を  $y$ , 底面に垂直な水深を  $h$  とすると

$$q = \int_{r_0}^{r_0+h} u dr = A \log_e \left( 1 + \frac{h}{r_0} \right)$$

$$\therefore u = \frac{q}{r \log_e \left( 1 + \frac{h}{r_0} \right)} = \frac{q}{(r_0+y) \log_e \left( 1 + \frac{h}{r_0} \right)}$$

.....(10)

仮定により  $h/r_0$  が 1 に比して小さい場合を取扱っているから, 平均流速  $V = q/h$  とおけば,  $u$  の近似値は次式で与えられる。

$$u \approx \frac{2r_0+h-2y}{2r_0} V$$

.....(11)

とくに  $h/r_0 \leq 0.1$  なるときは (10), (11), 両式の誤差率は 0.5% を超えることはない。(10) 式を (6) 式に代入すれば,

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\rho g \cos \theta + \frac{\rho q^2}{r^3 \log_e^2 \left( 1 + \frac{h}{r_0} \right)}$$

となるから  $r$  について積分し,  $y=h$  (水面) のとき  $p=0$  となるように積分常数を定めれば

$$p = \rho g (h-y) \cos \theta - \frac{\rho q^2}{2 \log_e^2 \left( 1 + \frac{h}{r_0} \right)}$$

$$\left\{ \frac{1}{(r_0+y)^2} - \frac{1}{(r_0+h)^2} \right\}$$

.....(12)

$h/r_0$  は 1 に比して小さいと考えているから (12) 式より

$$p \approx \rho g (h-y) \cos \theta - \frac{(h-y)(2r_0-h-3y)}{r_0^2} \frac{\rho V^2}{2}$$

.....(13)

特に底面圧力  $p_b$  の近似値は  $y=0$  とすればよいため

$$p_b \approx \rho g h \cos \theta - \frac{h(2r_0-h)}{r_0^2} \frac{\rho V^2}{2}$$

.....(14)

とくに  $h/r_0 \leq 0.1$  なるときには, (12), (14), 両式の第 2 項の誤差率は 1% 以内にとどまる。

次に連続の式により  $v$  を求める。(10) 式より

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{-q}{(r_0+y)(r_0+h) \log_e^2 \left( 1 + \frac{h}{r_0} \right)} \frac{dh}{d\theta}$$

.....(15)

であるから, これを (8) 式に代入して  $r$  について積

分し,  $y=0$  のときの  $v=0$  なる条件より積分常数を定めれば,

$$v = \frac{q \log_e \left( 1 + \frac{y}{r_0} \right)}{(r_0+y)(r_0+h) \log_e^2 \left( 1 + \frac{h}{r_0} \right)} \frac{dh}{d\theta}$$

.....(16)

(10), (16) 両式より水面における  $v/u$  を求めれば

$$\left[ \frac{v}{u} \right]_{y=h} = \frac{1}{(r_0+h)} \frac{dh}{d\theta}$$

(2) 不等速定流公式の誘導 (10) 式と (15) 式より  $u \partial u / \partial \theta$  を求め, (12) 式より  $\partial p / \partial \theta$  を計算してこれらを (7) 式に代入し, 水路床に沿って流れの方向に測つた距離を  $s$  とすれば,  $y$  を含む項は全部消え, また  $dh/d\theta = dh/ds \cdot r_0$  であるから結局次式がえられる。

$$\left[ \cos \theta - \frac{q^2 \left\{ 1 + \log_e \left( 1 + \frac{h}{r_0} \right) \right\}}{g(r_0+h)^3 \log_e^3 \left( 1 + \frac{h}{r_0} \right)} \right] \frac{dh}{ds} - \left( 1 + \frac{h}{r_0} \right) \sin \theta = 0$$

.....(17)

(17) 式が摩擦抵抗を考慮しない場合の水面形状を定める一般式である。次に流速の自乗に比例する摩擦抵抗が働らくとき, 不等流方程式は近似的に次の形に表わすことができるものと考え。

$$\left[ \cos \theta - \frac{q^2 \left\{ 1 + \log_e \left( 1 + \frac{h}{r_0} \right) \right\}}{g(r_0+h)^3 \log_e^3 \left( 1 + \frac{h}{r_0} \right)} \right] \frac{dh}{ds} - \left( 1 + \frac{h}{r_0} \right) \sin \theta + \frac{q^2}{C^2 R h^2} = 0$$

.....(18)

ここに  $R$  は動水水深,  $C$  は摩擦抵抗に関する Chézy の常数である。(18) 式より  $h/r_0 \leq 1/4$  として不等速定流方程式を求めれば, 次式が得られる。

$$\frac{dh}{ds} = \frac{\left( 1 + \frac{h}{r_0} \right) \sin \theta - \frac{q^2}{C^2 R h^2}}{\cos \theta - \left( \frac{1}{h} - \frac{1}{2r_0} \right) \frac{q^2}{gh^2}}$$

.....(19)

水路床が平面の場合には,  $r_0 \rightarrow \infty$  と考えられるから (19) 式より

$$\frac{dh}{ds} = \frac{\sin \theta - \frac{q^2}{C^2 R h^2}}{\cos \theta - \frac{q^2}{gh^2}}$$

.....(20)

(20) 式は急勾配水路の従来の不等流方程式と一致する。緩勾配の場合には  $\sin \theta \approx i$ ,  $\cos \theta \approx 1$  とおくことができるから,

$$\frac{dh}{ds} = \frac{i - \frac{q^2}{C^2 R h^2}}{1 - \frac{q^2}{gh^2}}$$

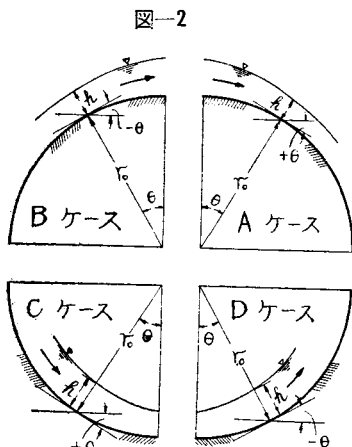
.....(21)

(21)式は短形断面または2次元水路の不等速定流方程式として最も広く用いられる形式である。このように(19)式はその極限の形として平面水路床上を流れる不等流方程式(20)及び(21)式をうることができる。

(19)式は一般に直接積分不能の形であるが、数値積分により水面形を求めれば、任意地点の底面圧力は(14)式によつて計算することができる。

(3) 他の場合の不等速定流公式 前2節においては図-2の

Aケースについてのみ取扱つてきたが、その他にB, C, D, ケースが考えられるから、本節においてはこれ等の場合の結果のみを掲げることとする。



(i) Bケース： $\theta$ は底面の切線が水平線となす角であるが、 $\theta$ に符号を持たせて、底面の切線が流れの前進方向において水平線の下側にくるときを(+)とし、上側に位置するときを(-)とすることにすれば、Bケースの $\theta$ はすべて(-)符号となる。このようにすれば前節の各結果はすべてそのまま適用することができる。

(ii) C, D ケース： $\theta$ の定義を上と同一にすれば、C, D ケースについてはともに次の各式がえられる。

$$u = \frac{q}{(r_0 - y) \log_e \left( \frac{r_0}{r_0 - h} \right)} \dots\dots\dots (22)$$

$$\therefore u = \frac{2r_0 - h + 2y}{2r_0} V \dots\dots\dots (23)$$

$$p = \rho g(h - y) \cos \theta + \frac{\rho q^2}{2 \log_e^2 \left( \frac{r_0}{r_0 - h} \right)} \left\{ \frac{1}{(r_0 - h)^2} - \frac{1}{(r_0 - y)^2} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

$$\therefore p = \rho g(h - y) \cos \theta + \frac{(h - y)(2r_0 + h + 3y)}{r_0^2} \frac{\rho V^2}{2} \dots\dots\dots (25)$$

底面圧力  $p_0$  は

$$p_0 = \rho gh \cos \theta + \frac{k(2r_0 + h)}{r_0^2} \frac{\rho V^2}{2} \dots\dots\dots (26)$$

不等速定流方程式は次式で与えられる。

$$\frac{dh}{ds} = \frac{\left(1 - \frac{h}{r_0}\right) \sin \theta - \frac{q^2}{C^2 R h^2}}{\cos \theta - \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{2r_0}\right) \frac{q^2}{gh^2}} \dots\dots\dots (27)$$

3. 公式適用の限界

C, D ケースの場合には断面内圧力は遠心力の影響により、(24)~(26)式に示すごとく静水圧より大となるから、流水は常に底面に沿つて流れ公式適用の限界は存在しない。

しかしながら A, B ケースの場合には公式適用の限界が存在し、その限界を超えれば水面形を求めることは無意味となる。なぜならば断面内圧力を与える(12)~(14)式から明らかなように、遠心力の作用は重力の作用を打消すような方向に向うものであり、従つてある程度以上に遠心力が大となれば、水粒子は重力に打ちかかつて底面から離れ、自由放物体として飛出すことになるからである。従つて次に公式の適用限界を求めることにする。

(12)式を吟味してみると、右辺第1項は水面から水路床に向つて直線的に増大するものであり、第2項は水路床に向つてほぼ放物線的に減少(絶対値は増大)するものであるから、底面に近いほど遠心力の増加にともなう負圧の発生が早くかつ大きいことがわかる。従つて次の条件式が公式適用の安全側の限界を定めることは明らかである。

$$\int_0^h p dy \geq 0 \dots\dots\dots (28)$$

(12)式を(28)式に代入して積分を遂行すれば

$$g \cos \theta \geq \frac{q^2}{r_0(r_0 + h)^2 \log_e^2 \left(1 + \frac{h}{r_0}\right)} \dots\dots\dots (29)$$

(29)式が水路全長各断面について成立することが、すでに求めた各公式を適用するのに充分なる条件である。

ここで  $F_r = V/\sqrt{gh \cos \theta}$  とおくと、(29)式は充分近似的に次式で表わされる。

$$0 < F_r \leq \sqrt{\frac{r_0}{h} + 1} \dots\dots\dots (30)$$

Froude 数  $F_r$  が(30)式の範囲内にあるときには、(19)式により水面形を定めることができる。

また全断面負圧となれば、理論上流れの一部は底面に沿わずに自由放物体として飛出すことは明らかであるから、次の条件が公式適用の上限界を定める。

$$\left[ \frac{dp}{dy} \right]_{y=h} \geq 0 \dots\dots\dots (31)$$

(12)式を(31)式に代入すれば次式がえられる。

$$g \cos \theta \leq \frac{q^2}{(r_0 + h)^2 \log_e^2 \left(1 + \frac{h}{r_0}\right)} \dots\dots\dots (32)$$

(32) 式を書き改めれば

$$Fr \geq \sqrt{\frac{r_0}{h} + 2} \dots \dots \dots (33)$$

Froude数  $Fr$  が (33) 式の右辺より大きい場合には、理論上前節までに求めた各式は適用することができない。

流水の Froude 数が (30) 式と (33) 式の間にあるときには、底面の吸引力並びに水面の表面張力の作用があるから、理論上は前述の公式により水面形を求めうるか否かを判別することができないが、実際には自由水面を有する流れとして計算してさしつかえないようである。

しかしながら、ここに述べた公式の適用の限界は、きわめて概略の性質を示すものに過ぎないのである。実際の高速流れでは、前述の圧力分布とは多少異なるものであり、また本理論では全く無視した乱れの鉛直速度成分、並びに水面における空気の抵抗も、高速流においては軽視すべからざる作用を有するものと思われるからである。

4. 実験値との比較

以上誘導した各式の適用性を調べるために、実験値と計算値との比較を行った。

図-3 は水路巾 10 cm,  $r_0=300$  cm の円弧底面を有する白色塗料焼付を施した鉄板製短形断面水路（水平長 92.5 cm）による、実測値と計算値の比較を示したものである。全流量は 15.75 l/sec 起点水深 10.04 cm である。

図-4 は同じく水路巾 10 cm の白色塗料焼付鉄板製短形水路であつて、全長 40 cm の水平水路に  $r_0=100$  cm の水平長 45 cm 円弧床水路が接続する水路での実測値と計算値との比較を示したものである。全流量は 24.75 l/sec, 起点水深 10.06 cm である。これらの実験はいずれも管水路流れより開水路流れとなる水路での実験であつて、起点より射流である。

図-3, 図-4 に見られるごとく、図-4 の底圧が多少実験値より離れるほかは水面曲線、底圧線ともに実験値と計算値の一致は比較的良好である。なお両図とも比較のため (21) 式による計算水面値をプロットした。

本篇において誘導した公式は  $r_0$  が距離に関して不変の場合であるが、ダム越流部等のごとく  $r_0$  が変化する場合に、どの程度に実測値と一致するかを調べるために竹内俊雄氏の模倣実験値\* と比較してみた(図

図-3 実験値との比較

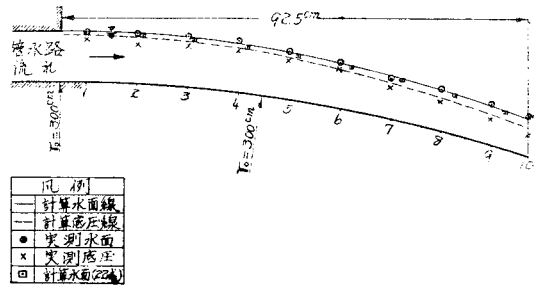


図-4 同 上

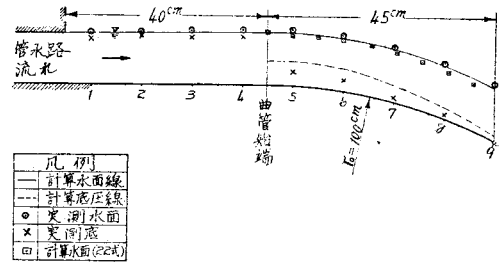
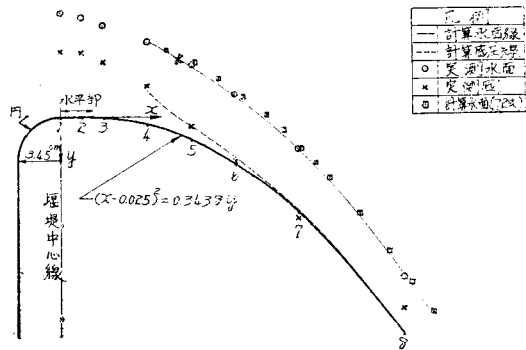


図-5 同 上



—5)。

比較結果によると、頂部付近の曲率の変化がいちじるしくかつ射流として十分に加速されていない区間では、(19)式の遠心力の補正項は大に過ぎ、実測値と一致しないが、図-5 において頂部を過ぎた断面—4 の実測水深を起点水深にとると、計算水面形および底圧は実測値と比較的よく一致する。なお、比較のため (20) 式による計算水面をもプロットしておいた。1 cm 巾当りの流量は 620.25 cm<sup>3</sup>/sec である。

5. 結 語

以上により底面彎曲の影響を考慮した開水路の不等速定流式を求め、かつ実験値と比較したところ比較的

\* 竹内俊雄：溢流堰頂部縦断形状の溢流係数に及ぼす影響に関する水理実験，内務省土木試験所報告第 73 号，昭 18-11

良好なる結果をうることができた。ただし底面の曲率を一定としているため、ダム頂部付近等のごとく急激に曲率に変化しつつかつ常流から射流に移る場合には実験値と一致しないが、この区間ではむしろ遠心力の影響を無視した一般の不等流公式式 (21) の方が一致するようであるから、この一般の不等流公式、または

flow net 法を (19) または (20) 式と適当に組み合わせることにより水面形を定めることができるように思われる。かくして水面形を定めえた場合には、計算底圧値は実測値と比較的よく一致するようであるから、空洞現象の推測を行うことは可能であると思う。

(昭・29.4.6)

## チタン酸バリウム磁器を用いた加速度計

正員 工学博士 村 山 朔 郎\*  
准員 谷 本 喜 一\*\*

### ACCELEROMETER MADE WITH BARIUM TITANATE CERAMICS

(JSCE Sept. 1954)

Dr. Eng., Sakurō Murayama, C.E. Member

and

Kiichi Tanimoto, C.E. Assoc. Member

**Synopsis** In order to measure the mechanical acceleration of low frequency, an accelerometer with piezoelectric vibration pickup has been devised. Mechanical acceleration can be measured directly by electric potential of the piezoelectric crystal which is converted from the inertia reaction force developed in the vibration pickup. As among all piezoelectric crystals, Barium Titanate ceramics is considered very convenient in view of stability at low frequency, we have attempted to use a small piece of Barium Titanate ceramics as a element of accelerometer. Result of the test shows that the frequency characteristics is nearly completely constant from eight cycles till fifty cycles.

**要旨** 本文は振動数の低い機械的振動の加速度を測定するために試作した加速度計について述べたものである。圧電結晶の中で低周波において安定性のよいものはチタン酸バリウム磁器であるから、著者らはこれを用いて試作し検定試験の結果 8~50 サイクルの範囲内で良好な振動数特性を有することを確かめた。

#### 1. 緒 言

微小振巾の機械的振動加速度を測定するために、機械、電気変換素子として種々のピックアップの研究が進められ現実に使用されているが、これらの中で圧電結晶ピックアップは多くの長所を持つているから将来ますます利用されるであろう。圧電結晶として水晶、燐酸アンモン、ロッシェル塩及びチタン酸バリウム磁器があるが、低周波で使うこと及び安定性の点からチタン酸バリウム磁器が最も都合がよいようである。

著者らはチタン酸バリウム磁器を用いて加速度計を試作し好結果を得たのでここに報告する次第である。

#### 2. チタン酸バリウム磁器の二、三の性質

チタン酸バリウムは数年前に発見され、その強誘電

性及びピエゾ電気現象についてはすでにくわしく調べられており、現在においてはもつぱら工学的応用が研究されつつある<sup>1)</sup>。ここではピエゾ電気現象について簡単に記すことにする。

チタン酸バリウム磁器は微結晶の集合体でありながら、他の圧電結晶にくらべて大きい圧電率を示す点が高い特長である。元来等方性であるがピエゾ電気現象を起させるために電界を加えるので電界の方向に伸びを生じている。一度高圧を加えたものは、これを取り去つても分極が残り永久に圧電体として作用する。しかし逆電界を加えたり、キューリー点 (110°C) 以上に熱すると分極が減少あるいは消失して圧電性を失う。次に力学的常数は製法によりやや異なるが

$$E \cong 10^{12} \text{ dyne/cm}^2, \sigma \cong 0.27, \rho \cong 5.5$$

ただし、 $E$ : ヤング率,  $\sigma$ : ポアソン数,  $\rho$ : 比重であるといわれる。

#### 3. 圧電結晶ピックアップの一般的考察

圧電結晶ピックアップで問題となるのは出力電圧の取り出しであろう。この点に関して若干考察を加える<sup>2)</sup>。いま

$M$ : 圧電結晶の付着質量

\* 京都大学教授, 工学部土木工学教室

\*\* 同 助手, 同