

$$\frac{\dot{p}}{w} = 9.182(L/r_0)^{-1.118} v^2 / 2g \exp [-3.6\{6x/(L+15r_0)\}^2] \dots\dots\dots(23)$$

7. 結 論

単なる jet が板に突当たる場合の圧力の及ぼされる範囲並びに submerged jet が板に突当たる場の二、三の性質は流れを potential flow と仮定し, sub. jet については一つの source とみなして誘導されることが知られる。

本研究は東京大学本間仁教授の御指導のもとに行い, 実験は日本大学水理実験室で行つた。その間日本大学土木教室の諸先生の御支援と, 測定には沖津明,

船橋秀親両君の援助を受け, ここに各位に厚く御礼を申上げる。なお本研究は日本大学, 文部省科学研究助成金を受けたことを附記する。

参 考 文 献

- 1) 例えば Thomson : Theoretical Hydrodynamics.
佐々木: 等角写像の応用。
- 2) 橋本: “円板に当る噴出水の実験” 九州帝国大学工学彙報第一巻。
- 3) 例えば W. Tollmien : Berchnung turbulenter Ausbreitungsvorgänge, Z.A.M.M. 1926
Rouse : Diffusion of submerged jets. Pro. A.S.C.E. 1948

(昭.28.12.19)

橋梁下部構造橋軸平行方向の固有周期算定について¹⁾

正 員 後 藤 尚 男*

ON THE CALCULATION OF NATURAL PERIOD OF BRIDGE SUBSTRUCTURES IN THE PARALLEL DIRECTION TO BRIDGE AXIS

(JSCE July 1954)

Hisao Gotō, C.E. Member

Synopsis The natural period of bridge substructures is the most fundamental and important subject for the investigation of earthquake-proof of bridge structures. The author studied the natural period of bridge substructures using the following three methods : (1) frequency equation method, (2) approximate solution by Rayleigh's method, (3) practical method using rocking vibration. And then he discussed and compared with the accuracy and practical usefulness of the above mentioned three methods. As the first step, in this paper, he dealt with the natural period of bridge substructures in the parallel direction.

要旨 本文は橋梁の耐震性に関する動力学的な研究のうちで, 最も基礎的かつ重要な下部構造の固有周期算定について, 振動数方程式から厳密解を導いて先論文近似解の精度を確認すると同時に, さらに簡易な別の近似解を導いて, これら各解法の精度並びにその実用性を比較検討したものである。本文ではとりあえず比較的解析容易な橋軸に平行方向の振動を対象にした。

1. 緒 言

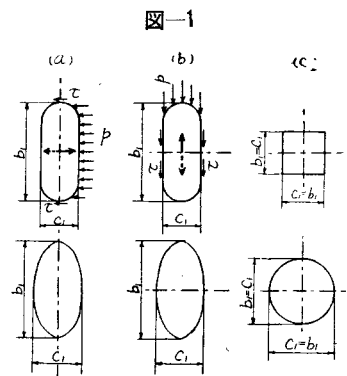
橋梁下部構造(橋脚井筒**)の固有周期は 6. に記述するとおり, 基礎地盤による不完全固定のために増大するという事は著者がしばしば強調した。橋脚井筒の振動に対する地盤の厳密な数理的表示は困難であるので, ここでも一応従来使用どおり基礎反力係数

$K(x_i)$ で置換しておく。橋脚井筒の根入部は便宜上図一1(a),(b),(c)に分類される。

(a) 線対称断面薄手方向振動: 橋軸に平行方向,

(b) 線対称断面厚手方向振動: 橋軸に直角方向,

(c) 点対称断面両方向振動: 橋軸に両方向。



図一1 (a) は振動方向に働らく側壁地盤間の摩擦抵抗 τ は地盤反力 p に対して一応無視でき, 橋脚井筒の

* 京都大学助教授, 工学部土木工学教室

**以後簡単のため橋脚井筒ということにする。

弾性変形も曲げの影響が大きいと思われる。図-1(b)は τ は大きく、かつ曲げ剛性 EI 、剛比 I/d (d : 根入長) が大きいので剪断と回転慣性の影響も無視できない。(c) は (a), (b) の中間である。これらのうち本文では (a) を対象とする。

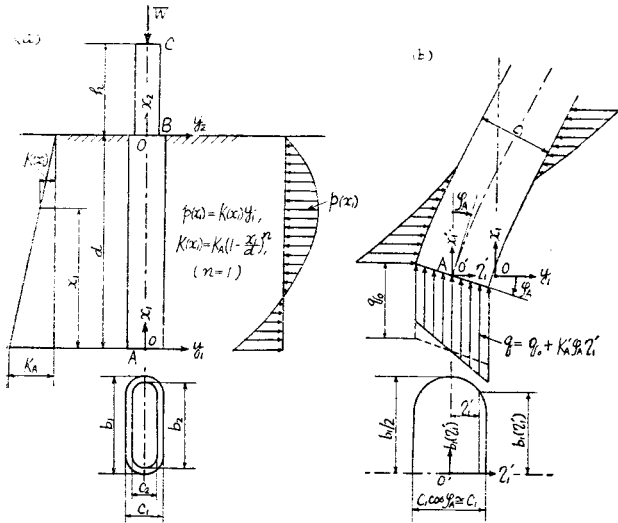
2. 解法-1・振動数方程式による厳密解

図-2(a) で根入部 AB, 地上部 BC に対して, 次の自由振動の微分方程式が成立つ。

$$E_1 I_1 \frac{\partial^4 y_1}{\partial x_1^4} + b_1 K_A \left(1 - \frac{x_1}{d}\right)^n y_1 + \frac{w_1 a_1}{g} \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} = 0$$

$$E_2 I_2 \frac{\partial^4 y_2}{\partial x_2^4} + \frac{w_2 a_2}{g} \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} = 0$$

図-2



n は前論文²⁾のとおり $K(x_1)$ の分布指数で 1 に近いが, 本厳密解では簡単のため $n=1$ とおく。正規函数を $u_{1,r}, u_{2,r}$, 第 r 次自由振動に対する振動数, 位相角, 常数を n_r, φ_r, A_r とすると, 式 (1) を満足する 1 つの特解は,

$$y_{1,r} = u_{1,r} A_r \cos(n_r t + \varphi_r)$$

$$y_{2,r} = u_{2,r} A_r \cos(n_r t + \varphi_r) \dots \dots (2)$$

で与えられる。式(2)を式(1)に代入して時間函数を消す

ここに,

$$f_1(\xi, \tau) = 1 - \frac{1}{5!} \xi^5 + \frac{6}{10!} \xi^{10} - \frac{66}{15!} \xi^{15} + \frac{1056}{20!} \xi^{20} - \dots + \tau \xi^2 \left(-\frac{1}{4!} + \frac{6}{9!} \xi^5 - \frac{66}{14!} \xi^{10} + \frac{1056}{19!} \xi^{15} - \dots \right) + \tau^2 \xi^6 \left(\frac{1}{8!} - \frac{15}{13!} \xi^5 + \frac{276}{18!} \xi^{10} - \dots \right) + \tau^3 \xi^{12} \left(-\frac{1}{12!} + \frac{28}{17!} \xi^5 - \dots \right) +$$

去し, かつ簡単のため添字 r を略すると次式となる。

$$E_1 I_1 \frac{d^4 u_1}{dx_1^4} + b_1 K_A \left(1 - \frac{x_1}{d}\right) u_1 - \frac{w_1 a_1}{g} n^2 u_1 = 0,$$

$$E_2 I_2 \frac{d^4 u_2}{dx_2^4} - \frac{w_2 a_2}{g} n^2 u_2 = 0$$

式(3)第1式に次の変換を行つて式(4)をうる。

$$\xi = -m_1 x_1 = -\sqrt[3]{\frac{b_1 K_A}{E_1 I_1 d}} \cdot x_1,$$

$$\tau = \frac{1}{E_1 I_1 m_1^4} \left(b_1 K_A - \frac{w_1 a_1}{g} n^2 \right) \dots \dots (1)$$

$$\frac{d^4 u_1}{d\xi^4} + (\tau + \xi) u_1 = 0 \dots \dots (4)$$

式(4)の一般解は次式(5)を用いて式(6)で与えられる。

$$u_1 = A_1 + A_2 \xi^2 + A_3 \xi^2 + A_4 \xi^3 + A_5 \xi^4 + \dots \dots (5)$$

$$u_1 = A_1 f_1(\xi, \tau) + A_2 f_2(\xi, \tau) + A_3 f_3(\xi, \tau) + A_4 f_4(\xi, \tau) \dots \dots (6)^*$$

ここで図-2(a)を拡大した(b)を参照する。A は底面の回転角 φ_A のため向上反力 $q = q_0 + K_A' \varphi_A \eta_1'$ の偏心作用を受け次式の材端曲げモーメント M_A を生ずる。

$$M_A = - \int_{-c_1/2}^{c_1/2} (q - q_0) b_1(\eta_1') \eta_1' d\eta_1'$$

$$= -K_A' \varphi_A \int_{-c_1/2}^{c_1/2} b_1(\eta_1') \eta_1'^2 d\eta_1'$$

$$= -K_A' \varphi_A I(c_1) \dots \dots (7)^*$$

式(7)に式(3)下の変換及び式(5)を代入す

ると式(8)をうる。

$$A_3 = - \frac{K_A' I(c_1)}{2 E_1 I_1 m_1} A_2 = \beta A_2 \dots \dots (8)$$

また φ_A は微小であるので A の剪断力 S_A は 0 としてよい。すなわち式(3)下の変換及び式(5)から,

$$\xi = 0; u_1''' = 0 \therefore A_4 = 0 \dots \dots (9)$$

式(8), (9)を式(6)に代入して次式をうる。

$$u_1 = A_1 f_1(\xi, \tau) + A_2 \{ f_2(\xi, \tau) + \beta f_3(\xi, \tau) \},$$

* 詳細は式(10)に示す。

** K_A' は底面 A における上下方向の地盤反力係数であり, $I(c_1)$ は断面二次モーメントの計算と同様容易に求まる。

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{16!} r^4 \xi^{16} - \frac{1}{20!} r^5 \xi^{20} + \dots, \\
 f_2(\xi, r) = & \xi \left(1 - \frac{2}{6!} \xi^5 + \frac{14}{11!} \xi^{10} - \frac{168}{16!} \xi^{15} + \dots \right) + r \xi^5 \left(-\frac{1}{5!} + \frac{8}{10!} \xi^5 - \frac{102}{15!} \xi^{10} + \right. \\
 & + \frac{1800}{20!} \xi^{15} - \dots \left. \right) + r^2 \xi^5 \left(\frac{1}{9!} - \frac{18}{14!} \xi^5 + \frac{372}{19!} \xi^{10} - \dots \right) + r^3 \xi^{13} \left(-\frac{1}{13!} + \frac{32}{18!} \xi^5 - \dots \right) \\
 & + \frac{1}{17!} r^4 \xi^{17} + \dots, \\
 f_3(\xi, r) = & \xi^2 \left(1 - \frac{6}{7!} \xi^5 + \frac{48}{12!} \xi^{10} - \frac{624}{17!} \xi^{15} + \dots \right) + 2 r \xi^5 \left(-\frac{1}{6!} + \frac{10}{11!} \xi^5 - \frac{144}{16!} \xi^{10} + \dots \right) \\
 & + 2 r^2 \xi^{10} \left(\frac{1}{10!} - \frac{21}{15!} \xi^5 + \frac{480}{20!} \xi^{10} - \dots \right) + 2 r^3 \xi^{14} \left(-\frac{1}{14!} + \frac{36}{19!} \xi^5 - \dots \right) + \frac{2}{18!} r^4 \xi^{18} + \dots
 \end{aligned} \quad \dots(10)$$

一方地上部 BC に対する式 (3) 第 2 式の解は周知のとおり、

$$\left. \begin{aligned}
 u_2 = & B_1 \cos m_2 x_2 + B_2 \sin m_2 x_2 \\
 & + B_3 \cosh m_2 x_2 + B_4 \sinh m_2 x_2, \\
 m_2 = & \sqrt[4]{(w_2 a_2 n^2) / E_2 I_2 g}
 \end{aligned} \right\} \dots(11)$$

+件; $u_1 = u_2, u_1' = u_2', E_1 I_1 u_1'' = E_2 I_2 u_2'', E_1 I_1 u_1''' = E_2 I_2 u_2'''$ と、上部構造重量 W を載荷した頂部 C での境界の 2 条件; $u_2'' = 0, E_2 I_2 u_2''' = -W/g \cdot n^2 u_2$ との合計 6 条件式から式 (10), (11) の A, B 6 個の未知係数を消去すると次の振動数方程式 $F(n)$ をうる。

式 (10), (11) を順次微分し地盤面 B での接続の 4 条+

$$\begin{aligned}
 F(n) = & (a_1 \cosh m_2 h - a_1' \cos m_2 h - b_1 \sinh m_2 h + b_1' \sin m_2 h) \\
 & \times \left\{ \begin{aligned}
 & (a_2 + \beta a_3) (\sinh m_2 h + W(n) \cosh m_2 h) + (a_2' + \beta a_3') (\sin m_2 h + W(n) \cos m_2 h) \\
 & - (b_2 + \beta b_3) (\cosh m_2 h + W(n) \sinh m_2 h) + (b_2' + \beta b_3') (\cos m_2 h - W(n) \sin m_2 h)
 \end{aligned} \right\} \\
 & - \left\{ \begin{aligned}
 & a_1 (\sinh m_2 h + W(n) \cosh m_2 h) + a_1' (\sin m_2 h + W(n) \cos m_2 h) \\
 & - b_1 (\cosh m_2 h + W(n) \sinh m_2 h) + b_1' (\cos m_2 h - W(n) \sin m_2 h)
 \end{aligned} \right\} \\
 & \times \{ (a_2 + \beta a_3) \cosh m_2 h - (a_2' + \beta a_3') \cos m_2 h - (b_2 + \beta b_3) \sinh m_2 h + (b_2' + \beta b_3') \sin m_2 h \} \neq 0,
 \end{aligned} \quad \dots(12)$$

ここに $a_1, a_1' = f_1(\xi_B, r) \pm e \alpha^2 f_1''(\xi_B, r), b_1, b_1' = \alpha f_1'(\xi_B, r) \pm e \alpha^3 f_1'''(\xi_B, r),$
 $a_2, a_2' = f_2(\xi_B, r) \pm e \alpha^2 f_2''(\xi_B, r), b_2, b_2' = \alpha f_2'(\xi_B, r) \pm e \alpha^3 f_2'''(\xi_B, r),$
 $a_3, a_3' = f_3(\xi_B, r) \pm e \alpha^2 f_3''(\xi_B, r), b_3, b_3' = \alpha f_3'(\xi_B, r) \pm e \alpha^3 f_3'''(\xi_B, r),$

$$f(\xi_B, r) = f(\xi, r) \xi = \xi_B; \text{ 式 (10), } \xi_B = (\xi)_{x_1=a} = -\sqrt[5]{\frac{b_1 K_A}{E_1 I_1 d}} \cdot d,$$

$$\alpha = m_1 / m_2 = \sqrt[5]{\frac{b_1 K_A}{E_1 I_1 d}} \sqrt[4]{\frac{w_2 a_2 n^2}{E_2 I_2 g}}, \quad \beta = -\frac{K_A' I(c)}{2 E_1 I_1 m_1},$$

$$r = \frac{1}{E_1 I_1 m_1} \left(b_1 K_A - \frac{w_1 a_1 n^2}{g} \right), \quad e = E_1 I_1 / E_2 I_2, \quad W(n) = -\frac{W n^2}{E_2 I_2 m_2^2 g}$$

式(12)から試算法によつて $T = 2\pi/n$ が算出される。

3. 解法—2・Rayleigh 法による冪級数近似解
 先回論文³⁾ではまず図—2 (b) の底面反力 q を考慮せず、橋脚頂部 C に水平荷重 $b_2 P$ を作用させたときの静撓み曲線 η_1, η_2^* を振動曲線 y_1, y_2 にとり、この η_1, η_2 を解法—1 と同様冪級数で表わし、これから位

置及び運動のエネルギー V, T を計算し、しかる後 q による位置のエネルギー V_q を上記の V に単に加算した。この点不合理があるので、本文解法—1 と同様曲げモーメント M_A として初めから q を考慮すると、 $q=0$ に対する先回論文³⁾式(8)** とは A_1, A_2, B_3, B_4 のみが異なつてくる。その値は

$$A_1 = B_1 = \frac{1}{a} \{ b_1 b_3 - b_2 f_2'''(\xi_A) \}, \quad A_2 = -\frac{B_3}{m_1} = -\frac{1}{a} \{ -b_1 b_4 + b_2 f_1'''(\xi_A) \},$$

ここに、

$$\begin{aligned}
 a = & \{ f_1'''(\xi_A) + 2\beta f_1'(\xi_A) \} f_2'''(\xi_A) - \{ f_2'''(\xi_A) + 2\beta f_2'(\xi_A) \} f_1'''(\xi_A), \\
 b_1 = & A_3 f_3'''(\xi_A) + A_4 f_3''''(\xi_A), \quad b_2 = A_5 \{ f_3'''(\xi_A) + 2\beta f_3'(\xi_A) \} + A_6 \{ f_4'''(\xi_A) + 2\beta f_4'(\xi_A) \}, \\
 b_3 = & f_2'''(\xi_A) - 2\beta f_2'(\xi_A), \quad b_4 = f_1'''(\xi_A) + 2\beta f_1'(\xi_A), \\
 \xi_A = & \sqrt[5]{\frac{b_1 K_A}{E_1 I_1 d}} \cdot d = m_1 d, \quad 2\beta = -\frac{K_A' I(c)}{E_1 I_1 m_1}, \quad I(c) : \text{ 式 (7)}
 \end{aligned} \quad \dots(13)$$

* たとえば次節 4, 図—3, 次々節 5, 図—4 参照。 ** 本文の式番号と区別するため特に——を付する。

上記式(13)の A_1, A_2, B_3, B_4 及び先論文³⁾式(8)の A_3, A_4, B_1, B_2 を先論文³⁾式(11), (11') に代入すると Rayleigh 法による第1次固有周期 T の近似値が算出される。

4. 解法-3・Rayleigh法による反力載荷法実用解

筆者は前論文²⁾6の耐震計算法で $K(x_1)$ が線型の範囲内であれば, $K(x_1) = K_A(1-x_1/d)^n$ 以外の任意形状のときでも, たとえば図-3のように根入長 d を5分割して $K(x_1)$ を折線状に置換して, 未定反力 p を載荷させることにより水平変位 $\eta_1(x_1)$ を決定した。

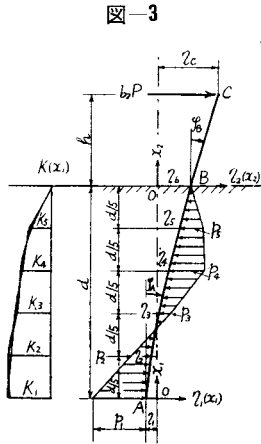


図-3

いま同論文²⁾図-8及び表-1で外力は $kb_2W = b_2P$ のみを取り, $M_C, kw_1a_1, kw_2a_2, = 0$ とおいて表-1から決定される $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_6$ を根入部 AB の振動曲線 y_1 に採用する。地上部 BC は先論文³⁾同様,

$$\eta_2(x_2) = B_1x_2^3 + B_2x_2^2 + B_3x_2 + B_4$$

で与えられる。頂部 C で $M_C = 0, S_C = b_2P$,

地盤面 B で $\varphi_B = 5(\eta_6 - \eta_5)/d, \eta_B = \eta_6$ という4条件を上式の $\eta_2(x_2)$ に入れると常数 B が次式で決定される。

$$B_1 = -\frac{b_2P}{6E_2I_2}, \quad B_2 = \frac{b_2Ph}{2E_2I_2},$$

$$B_3 = \frac{5}{d}(\eta_6 - \eta_5), \quad B_4 = \eta_6$$

振動曲線 y は $y = \eta A \cos(nt + \varphi)$ と表わされるから, 位置及び運動のエネルギー V, T は次のようにかける。

$$V = \left\{ \frac{E_1I_1}{2} \int_0^d \left(\frac{d^2\eta_1}{dx_1^2} \right)^2 dx_1 + \frac{E_2I_2}{2} \int_0^h \left(\frac{d^2\eta_2}{dx_2^2} \right)^2 dx_2 \right. \\ \left. + \frac{b_1}{2} \int_0^d K(x_1)\eta_1^2 dx_1 \right\} \cdot A^2 \cos^2(nt + \varphi) \\ = \frac{b_2P}{2} \eta_C \cdot A^2 \cos^2(nt + \varphi), \quad (14)$$

$$T = \frac{1}{2g} \left\{ w_1a_1 \int_0^d \eta_1^2 dx_1 + w_2a_2 \int_0^h \eta_2^2 dx_2 \right. \\ \left. + W\eta_C^2 \right\} \cdot A^2 n^2 \sin^2(nt + \varphi)$$

エネルギー保存の原理から式(14)で $\frac{\sin}{\cos}(nt + \varphi) = 1$ とおいて $V_{\max} = T_{\max}$ を用いると, 固有周期 T が次式で与えられる。

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{g} \left\{ w_1a_1 \int_0^d \eta_1^2 dx_1 + w_2a_2 \int_0^h \eta_2^2 dx_2 \right. \right. \\ \left. \left. + W\eta_C^2 \right\}}{\eta_C \cdot b_2P}}$$

$$\text{ここに } \int_0^d \eta_1^2 dx_1 = \frac{2d}{15} \left\{ \eta_2^2 + \eta_3^2 + \eta_4^2 + \eta_5^2 + \frac{1}{2} \right. \\ \left. (\eta_1^2 + \eta_1\eta_2 + \eta_2\eta_3 + \eta_3\eta_4 + \eta_4\eta_5 + \eta_5\eta_6 + \eta_6^2) \right\}, \quad (15) \\ \int_0^h \eta_2^2 dx_2 = h \left\{ \frac{h^6}{7} B_1^2 + \frac{h^4}{5} B_2^2 + \frac{h^2}{3} B_3^2 + B_4^2 \right\} \\ + 2h^2 \left\{ \frac{h^1}{6} B_1B_2 + \frac{h^3}{5} B_1B_3 + \frac{h^2}{4} (B_1B_4 + B_3B_4) \right. \\ \left. + \frac{h}{3} B_2B_4 + \frac{1}{2} B_3B_4 \right\}, \\ \eta_C^2 = (B_1h^2 + B_2h^2 + B_3h + B_4)^2$$

5. 解法-4・Rayleigh法による弾性変形無視の簡易解

解法-1・2・3は ABC の EI を考慮した弾性振動であるが, 解法-5では ABC を剛体として図-4に示す b_2P による回転変位直線 ABC (η_1, η_2) を動揺振動曲線にとる。図-4で $\eta_A < 0$ であることを考慮すると,

$$\eta_1 = \eta_A + (\eta_B - \eta_A)(1 - x_1/d), \eta_2 = \eta_B + (\eta_B - \eta_A) \cdot x_2/d \dots (16)$$

η_A, η_B は図-4から次の2条件式で決定される。

$$\Sigma H = 0; \quad b_2P = b_1 \int_0^d p(x_1) dx_1 = b_1 \int_0^d K(x_1)\eta_1 dx_1, \\ \Sigma M = 0(A); \quad b_2P(h+d) = b_1 \int_0^d p(x_1)(d-x_1) dx_1 \\ + M_A = b_1 \int_0^d K(x_1)\eta_1(d-x_1) dx_1 \\ + \varphi_A K_A' \int_{-c_1}^{c_1/2} b_1(\eta_1')^2 d\eta_1 \quad (17)$$

M_A は図-2(b)の q によるモーメントで式(7)と同一である。 $K(x_1)$ は式(17)の積分可能な任意の形状をとりうる。ここでは便宜上図-4記入のとおり $K(x_1) = K_A(x_1/d)^n$ とする。 n を実数として $K(x_1)$ を式(16)に入れ計算を進めると,

$$b_2P = \frac{b_1K_A d}{(n+1)(n+2)} \{ (n+1)\eta_A + \eta_B \}, \\ b_2P(h+d) = \frac{b_1K_A d^2}{(n+1)(n+2)(n+3)} \{ (n+1)\eta_A \\ + 2\eta_B \} + \frac{\eta_B - \eta_A}{d} K_A' I(c_1) \quad (18)$$

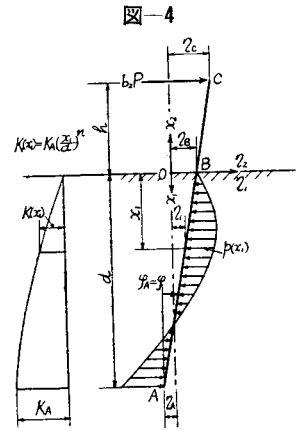


図-4

これから

$$\eta_A = -\alpha[12d^2\{(n+3)\delta + (n+1)\} - (n+1)(n+2)(n+3)\beta],$$

$$\eta_B = \alpha(n+1)[12d^2\{(n+3)\delta + (n+2)\} + (n+2)(n+3)\beta],$$

ここに,

$$\alpha = \frac{n+2}{b_1 K_A d} \frac{b_2 P}{12d^3 + (n+2)^2(n+3)\beta}, \quad \dots(19)$$

$$\beta = \frac{12K_A'}{b_1 K_A} I(c_1) = \frac{12K_A'}{b_1 K_A} \int_{-c_1/2}^{c_1/2} b_1(\tau_1') \tau_1'^2 d\tau_1', \quad \delta = \frac{h}{d}$$

式(19)を式(16)に入れると τ_1, τ_2 が計算でき、さらに式(16) τ_2 で $x_2=h$ とおくと τ_C が次式(20)となる。

$$\tau_C = \alpha[12d^3\{(n+2)(n+3)\delta^2 + 2(n+1)(n+3)\delta + (n+1)(n+2)\} + (n+1)(n+2)(n+3)\beta] \dots\dots(20)$$

しからば前述 解法-3 の式(13), (14) と同一の取扱いを行い固有周期 T が次式で計算できる。

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{g} \left\{ w_1 a_1 \int_0^d \tau_1^2 dx_1 + w_2 a_2 \int_0^h \tau_2^2 dx_2 + W \tau_C^2 \right\} / \tau_C \cdot b_2 P},$$

ここに

$$\int_0^d \tau_1^2 dx_1 = \frac{d}{3} (\eta_A^2 + \eta_A \eta_B + \eta_B^2)$$

$$= \frac{d}{6} \alpha^2 \left[\begin{array}{l} 144d^6 \{ (n+3)^2(n^2+n+1)\delta^2 + (n+1)(n+3)(2n^2+4n+3)\delta \\ + (n+1)^2(n^2+3n+3) \} \\ + 36d^3\beta(n+1)(n+2)(n+3)\{n(n+3)\delta + (n+1)^2\} + 3\beta^2(n+1)^2(n+2)^2 \end{array} \right], \quad \dots(21)$$

$$\int_0^h \tau_2^2 dx_2 = \frac{h}{3} (\eta_B^2 + \eta_B \tau_C + \tau_C^2)$$

$$= \frac{h}{6} \alpha^2 \left[\begin{array}{l} 144d^6 \{ (n+2)^2(n+3)^2\delta^4 + 5(n+1)(n+2)(n+3)^2\delta^3 + (n+1)(n+3) \\ (10n^2+40n+33)\delta^2 + 9(n+1)^2(n+2)(n+3)\delta + 3(n+1)^2(n+2)^2 \} \\ + 12d^3\beta(n+1)(n+2)(n+3)\{ (n+2)(n+3)\delta^2 + 5(n+1)(n+3)\delta \\ + 3(n+1)(n+2) \} + 2\beta^2(n+1)^2(n+2)^2(n+3)^2 \end{array} \right],$$

$\eta_A, \eta_B, \alpha, \delta$: 式(19), τ_C : 式(20)

式(21)で特に $K(x_1)$ の分布指数 n を 1 とおくと次式となる。

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{w_1 a_1 d}{8} [16d^6(12\delta^2 + 18\delta + 7) + 3\beta\{32d^3(1+\delta) + \beta\} + 2w_2 a_2 h [d^6(36\delta^4 + 120\delta^3 + 166\delta^2 + 108\delta + 27) + d^3\beta(6\delta^2 + 20\delta + 9) + 2\beta^2 + 6W\{d^3(6\delta^2 + 8\delta + 3) + \beta^2\}]}{b_1 d K_A g (d^3 + 3\beta) \{d^3(6\delta^2 + 8\delta + 3) + \beta\}} \dots\dots(22)}$$

6. 橋脚固有周期増大に関する諸原因の検討

筆者が数個の現地橋脚実験で確認した実測周期 T' と地盤面完全固定片持梁としての計算周期 T_0 とを表

表-1 橋脚実測周期 T' と地盤面完全固定による計算周期 T_0

橋脚	京福電鉄		国道12号線		東海道線		鴨川		
	中角橋	丸頭龍橋	瀬田川橋	五郎側	丸頭龍橋	瀬田川橋	五郎側	五郎側	
橋脚 No.	No.5	No.3	No.9	左岸側	No.3	No.9	左岸側	No.3	
実験年月日	昭和23.11.20.30	昭和25.5.23.25	昭和25.2.15.19	昭和22.19.20	昭和25.2.15.19	昭和22.19.20	昭和25.2.15.19	昭和22.19.20	
橋脚寸法(m)	b_1 4.62 b_2 2.32 d 10.00 α 5.20	b_1 12.07 b_2 2.37 d 7.30 α 13.00	b_1 5.80 b_2 1.60 d 5.00 α 78.10	b_1 6.24 b_2 1.22 d 4.25 α 6.95	b_1 12.07 b_2 2.37 d 7.30 α 13.00	b_1 5.80 b_2 1.60 d 5.00 α 78.10	b_1 6.24 b_2 1.22 d 4.25 α 6.95	b_1 6.24 b_2 1.22 d 4.25 α 6.95	b_1 6.24 b_2 1.22 d 4.25 α 6.95
実測周期 T'(sec)	0.40	0.20	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	
計算周期 T_0(sec)	0.092	0.048	0.028	0.032	0.028	0.032	0.032	0.032	
T/T_0 (%)	434	416	357	313	357	313	313	313	

すべて(a)上の矩形形である。表-1で T', T_0 両者の差がいちじるしいのが注目される。 T_0 に対して T' が増大する各原因の概算値¹⁾ を表-2に記入したが、いずれも表-1の $T' - T_0 = 213 \sim 334\%$ より非常に小

表-2 橋脚固有周期増大に関する諸原因の影響 (各原因の表-1 T_0 に対する増加率%)

原因	中角橋脚	丸頭龍橋脚	瀬田川橋脚	五郎橋脚
1) 剪断力面剛性	5.2	10.6	12.8	8.2
2) 剪断係数低下	5.4	5.4	5.4	5.4
3) 減衰(地盤摩擦)	0.3	2.2	0.3	1.8
4) 自重(橋体自重)	-5.7	-15.6	-19.7	-11.9
5) 自重(軸圧力)	-22.2	-26.4	-26.4	-25.5
6) 自重(軸圧力)	0.017	0.006	0.004	0.005

さい。この事実から T' 増大の原因は表-2 以外に基礎地盤の影響、特に橋脚井筒に対する不完全固定作用にあると考え、これを本文では $K(x_1)$ で表わして T を算定したわけである。

7. 数値計算例

丸頭龍川, No. 3 橋脚 (横断面, 図-1 (a) 上) : $E_1 I_1, E_2 I_2 = 2073.20 \times 10^6, 256.85 \times 10^6 \text{ t} \cdot \text{m}^2$, $w_1 a_1, w_2 a_2 = 97.54, 65.59 \text{ t/m}$, $b_1, b_2 = 14.60, 12.07 \text{ m}$, $c_1, c_2 = 4.90, 2.37 \text{ m}$, $h, d = 7.30, 13.00 \text{ m}$, $W = 0$,

$K(x_1) = K_A(1 - x_1^2)$, ($n=1$), 式 (7) $I(c_1) = b_1 c_1^3 / 12 - 0.0342 c_1^{(5)}$, ここで $K_A' / I(c) = K_A b_1 c_1^3 / 12$ とおくと $K_A' = 1.15 K_A$ ⑥。

上記資料で K_A のみ変化させて本文各解法で計算した結果を表-3 (a) に示す。底面反力 q を無視するときは本文各解法で $\beta=0$ とおく。 $\beta=0$ に対する計算結果を表-3(b) に示す。なお解法-1 (厳密解) に対する解法-2・3・4 の計算値比率を精度 α として同表中に記入した。

表-3 九頭龍橋脚本文解法による計算周期 T' と各解法の精度 α

(a) 底面反力考慮

$K_A' / I(c)$		0.5	2	10	24	100	∞
周期 T' (sec)	解法-1	0.908	0.458	0.217	0.148	0.0925	0.0486
	" -2	0.903	0.4516	0.2065	0.1407	0.0889	0.0478
	" -3	0.9394	0.4732	0.2142	0.1454	0.0890	0.0478
	" -4	0.8975	0.4487	0.2007	0.1295	0.0635	0
精度 α (%)	解法-1	100	100	100	100	100	100
	" 2/1	99.5	98.6	95.2	95.1	96.1	98.4
	" 3/1	102.8	103.3	98.7	98.2	98.2	98.4
	" 4/1	98.8	98.0	92.5	87.5	68.6	0

(b) 底面反力無視: $\beta=0$

$K_A' / I(c)$		0.5	2	10	24	100	∞
周期 T' (sec)	解法-1	0.986	0.489	0.221	0.155	0.0952	0.0486
	" -2	0.9780	0.4818	0.2210	0.1482	0.0909	0.0478
	" -3	1.0027	0.5034	0.2289	0.1522	0.0939	0.0478
	" -4	0.9766	0.4803	0.2184	0.1410	0.0891	0
精度 α (%)	解法-1	100	100	100	100	100	100
	" 2/1	99.2	99.9	100	95.6	95.3	98.4
	" 3/1	101.7	102.9	103.4	98.2	98.6	98.4
	" 4/1	99.0	99.8	98.7	91.0	72.6	0

* 解法-1, $K_A = 10 \text{ kg/cm}^2$ に対する T' (sec) 1次: 2次: 3次 = 0.221: 0.065: 0.025 = 10: 30: 16.

8. 計算結果の考察と結言

(1) 表-2 (4) の橋脚の変断面には長大な井筒均一断面が加算され負の%は表より激減する。表-2(1)は無視できぬが表-1, 2 から本文理論解の仮定はおおむね妥当である。

(2) 表-3 の図示は省略するが、表-1 の T' と表-3, 解法-1 の T とが合致する K_A は概略 (a) で 12 kg/cm^3 , (b) で 13 kg/cm^3 である。

(3) 先論文³⁾ 解法-2 は T' 近傍で $-3 \sim -5 \%$ の良精度を有する。

(4) 解法-3 は Rayleigh でありながら $\alpha > 100 \%$ の区域もあり (図-3 で反力 p の折線置換, 特に Bp の直線化が主原因), T' 近傍で $1 \sim 2 \%$ の高精度を有し実用的である。

(5) 解法-4 は非常に計算簡易であるが, T' 近傍で -10% でかつ $K = \infty$ で $T = 0$ という実情との

相違がある。

(6) 解法-1・2 は $n \neq 1$ の整数ではやや複雑, 整数以外では煩雑困難, 解法-4 は $n \neq 1$ の実数でも式 (17) の積分可能ならば有用, 解法-3 は外の表式さらに数式表示不能の $K(x_1)$ でも, 折線置換することにより計算可能である。

(7) 表-3 の計算労力は解法-1 を 100 とすると, 解法-2・3・4 はそれぞれ 25, 20, 3 程度で解法-3 の実用性が高い。

(8) 一般に固有値計算法としては表-3 の結果は決して高精度であるとは言えない。 $K(x_1)$ を考慮したことによる数式の複雑化から計算誤差も若干含まれていることと思う。

本文では $K(x_1)$ を考慮することにより表-1 を説明する比較的合理的な成果表-3 をえたが, $K(x_1)$, K_A' の分布, 基礎地盤の質量, 塑性的な抵抗土圧の復元力の影響, さらに地震による強制振動等を引き続き考究する予定である。

本研究は昭和 28 年度文部省科研費 (個人研究) による研究成果の一部で終始御指導を頂いた京大教授小西博士に深謝する次第である。

参考文献その他

- 1) 本文, 解法-1 は土木学会第 9 回年次講演会, 昭.28.5.24. で講演, 解法-3 は昭.28.夏関西工学連合講演会, 土木部門, 昭.28.10.11. で講演
- 2) 著者: 橋脚地盤の基礎係数値分布に関する実験的研究, 土木学会誌 39-6, 昭.29.6, pp 15-19
- 3) 著者: 橋梁下部構造の振動性状について, 土木学会誌 38-4, 昭.28.4., pp 14-19.
- 4) 本文表-2(1): 戸部俊美, 日本機械学会論文集, 17-57, 昭.26.p.16, 式(39) p_1 を使用, 同表-1(2): 表-1 の T_0 計算の EI に対して $0.9 EI$ と仮定して計算, 同表-1(3): 表-1, T' における実測減衰係数 ϵ を用いて計算, 同表-1(4): 表-1, T_0 の計算均一断面は $h/2$ の断面積を平均断面として採用, 表-2, (4) の変断面 (1/20 勾配) による T 算出は物部長穂, 土木耐震学, p. 212, 錐体近似計算式(153)を使用, 同表-1(5): 谷下市松訳, 工業振動学, p. 307, 式 (170) を参照した。
- 5) 池原武一郎・横山章: 水平力をうけた井筒の安定計算について, 土木学会誌, 38-12, 昭.28.12. p. 21, 表-1 の底面形状-5 (矩形円) の結果と一致, 他の断面形状については両氏表-1 を参照のこと。
- 6) $K_A' > K_A$ と考えられるが K_A' / K_A の値が不詳であるので, 図-1 (a) の [矩形円面積 $\{(b_1 - c_1) c_1 + \pi c_1^2 / 4\} \times K_A' = \{ \text{矩形面積 } (b_1 \times c_1) \} \times K_A$ と一応等置して, $K_A' = 1.15 K_A$ と仮定した。(昭.29.2.16)