摩擦杭支持力の静力学的解析

正員 工学博士 村 山 朔 郎*
准員 谷 本 喜 一**

STATIC ANALYSIS OF THE BEARING POWER OF THE FRICTION PILE

(JSCE July. 1954)

Dr. Eng., Sakurō Murayama, C.E. Member, Kiichi Tanimoto, C.E. Assoc. Member

Synopsis In this paper, we have investigated the side resistance of the cylindrical pile, as the first step to a solution of the complex problem on friction pile. One solution has been got by the theory of elasticity making some modifications and the other by the theory of plasticity using some assumptions. The result obtained by the theory of elasticity is in good agreement with the model experiments.

要旨 本論文においては摩擦杭に関する複雑な問題の解法への第一歩として円筒杭の側面抵抗を研究した。一つの解は弾性論的に取り扱い，いくらかの修正を施したもので，もう一つの解は二，三の仮定のもとで塑性論的に求めた。解析解と模型実験結果とを比較すると弾性論による解はかなりよい結果を示している。

1. 緒　　言

本文においては地盤を弾性体または塑性体と考えて，静力学的に杭の周面支持力を取り扱つた[1]。杭の尖端支持力も当然考えるべきであるが解析が困難であるので一応省略した。

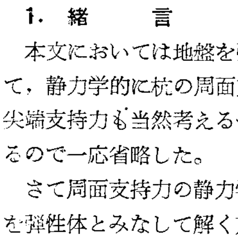
さて周面支持力の静力学的解析の第一の方法は地盤を弾性体とみなして解く方法であつて，地盤は明らかに弾性体でないからこの方法には疑問があるが，いくらかの修正を施せばある程度実験結果を説明することができる。第二の方法は地盤を塑性体と考えて3次元的に解く方法であつて，解法がやや困難であるので二，三の仮定を設けて進まざるを得なかつた。

従つてその解は特殊な場合に過ぎないが，この種問題に対する第一手段としてのべたいと思う。

2. 弾性論による解法

地盤を半無限弾性体と考え，これに円形断面杭が打ち込まれているものとして地盤内の応力状態から杭の支持力を求めよう。

図—1



いま図—1のように杭軸に沿い下向きに Z 軸をとり，杭軸と地表面との交点を原点とする右手系円筒座標 ρ, φ, z を採用すれば，

問題の軸対称性から平衡方程式は[2]

$$2(m-1)D^2u+(m-2)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+m\frac{\partial^2 w}{\partial\rho\partial z}=0 \cdots\cdots (1)$$

$$2(m-1)\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+(m-2)D\frac{\partial w}{\partial\rho}$$

$$+m\frac{\partial}{\partial z}Du+(m-2)\frac{\gamma}{G}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

ただし，

m, G, γ：それぞれ地盤のポアソン数，剛性率，及び単位体積重量，u, w：それぞれ ρ, z 方向の変位

$$D=\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}, \qquad D^2=\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\right)$$

である。

連立方程式 (1)，(2) より

$$\frac{\partial u}{\partial z}=A_1\cos kz\cdot K_1(k\rho)+A_2\sin kz\cdot K_1(k\rho)$$
$$+B_1\cos kz\cdot\rho K_0(k\rho)+B_2\sin kz\cdot\rho K_0(k\rho)$$
$$+C_1 z\cos kz\cdot K_1(k\rho)+C_2 z\sin kz\cdot K_1(k\rho)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial\rho}=A_1'\cos kz\cdot K_1(k\rho)+A_2'\sin kz\cdot K_1(k\rho)$$
$$+B_1'\cos kz\cdot\rho K_0(k\rho)+B_2'\sin kz\cdot\rho K_0(k\rho)$$
$$+C_1'z\cos kz\cdot K_1(k\rho)+C_2'z\sin kz\cdot K_1(k\rho)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

である。ここに $A_i, A_i', \cdots\cdots C_i, C_i'(i=1,\ 2)$ は未定係数，k は分離常数で K は変形ベッセル函数である。

さて境界条件として次のようなものを考える。

$$z=0 \text{ で } \tau=\sigma_z=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

$$\rho=a \text{ で } u=\text{一定}=\varepsilon/a \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

$$\rho=a \text{ で } \tau=\mu\sigma_\rho \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

ここで a は断面半径で μ は杭と地盤との摩擦係数であり，ε については後述する。

*　京都大学教授　工学部土木工学教室
**　同　　助手　　　〃

(3) 及び (6) から (3), (4) は次のようにかける。

$$u=\xi(\rho)+\frac{1}{k}\{(A_1K_1+B_1\rho\,K_0)\sin kz-(A_2K_1+B_2\rho\,K_0)\cos kz\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

$$w=\eta(z)-\frac{1}{k}\{(A_1'K_0+B_1\rho\,K_1)\cos kz+(A_2'K_0+B_2\rho\,K_1)\sin kz\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

ただし $\xi(\rho)$ 及び $\eta(z)$ は積分常数である。(8) 及び (9) の括弧内は物体力に無関係であるから z に関してそれぞれ偶及び奇函数である。

従つて式 (8) 及び (9) は次のようになる。

$$u=\frac{\varepsilon}{\rho}-\int_0^\infty\frac{1}{k}(A_2K_1+B_2\rho\,K_0)\cos kz\cdot dk\cdots(10)$$

$$w=-\frac{\gamma\,(m-2)}{4\,G(m-1)}z^2+\nu-\int_0^\infty\frac{1}{k}(A_2'K_0+B_2\rho K_1)\sin kz\cdot dk\ \cdots(11)$$

ここで ν は常数である。

応力と歪の関係及び式 (10), (11) を使えば地中の応力分布を計算することができる。しかし現在の問題では杭周の剪断応力のみを求めればよい。そうすると周面の摩擦抵抗力 T は $(\tau)_{\rho=a}$ の積分で表わされる。よつて (10), (11) を (7) に代入して諸係数を求めて τ を算出すれば，打込み深さ l に対する T は，

$$T=2\pi a\int_0^l(\tau)_{\rho=a}\,dz=2\pi a\frac{\gamma\mu}{m-1}\cdot\frac{l^2}{2}+4\pi\,l\,\mu\,G\frac{\varepsilon}{a}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

である。式(12)はまた次のようにかくことができる。

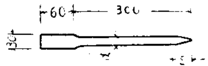
$$T=\pi\,al^2\gamma\mu\frac{1}{m-1}(1+Q),\qquad Q=\frac{4(m-1)G}{\gamma}\cdot\frac{\varepsilon}{a^2l}\ \cdots\cdots\cdots(13)$$

さて式 (13) の Q は杭周面で半径方向に地盤変形が起るため生じた量であつて，Q の物理的意味を簡単にいえば杭周の塑性変形または圧縮の度合を表わすものと考えられる。この量は m, G, ε, a 及び l に関係するが，このうち最も重要な因子は ε であろう，実際問題において ε の値は明白でなく，かりにこれを測定したとしてもその値をすぐ上式に代入するのはよくない。なぜならば杭周においては地盤は明らかに塑性変形をしており，これを弾性論的に仮想変位 ε/a で代用させるのが本法の方針であるからである。式(13)を実際問題に適用するためには Q そのものの値を別に実験的に決めて採用するのがよいと思われる。模型実験における Q の測定については次の項で述べる。

3. 模 型 実 験

模型実験は模型杭 8 本 (鋼製 4, 木製 4, 表—1 参照) を用い，一定のゆるい突き固めをした相馬標準砂中で押し込み及び引き抜き試験を行つた。貫入装置は図—2 のようなもので検定したスプリングの変形をダイヤルゲージで読み貫入深さに対する抵抗力を測定する。周面の摩擦力は杭を引き抜く抵抗を測つたが，これが貫入時の周面摩擦力に等しいかどうかは多少疑問がある。しかし一応ここではこの測定値で代用することとする。測定結果図—3 は鋼杭の貫入抵抗値，図—4 は鋼杭の周面摩擦力と $\phi=1.5$ cm の理論値曲線で，図—5 は木杭の周面摩擦力と理論値曲線である。理論値計算に必要な常数は測定により $\theta=32°$, $\rho=1.64$ g/cm^3, $\mu_s=0.37$, $\mu_w=0.57$ であり $m=2/(1-\sin\theta)$ とした。ここで μ_s, μ_w はそれぞれ鋼杭，木杭の砂との摩擦係数である。次に Q の測定は(13)式より明らかなように杭周の変位がない場合とある場合との比から簡

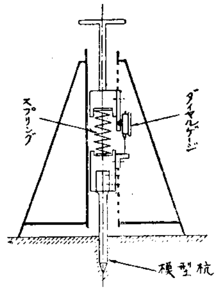
表—1



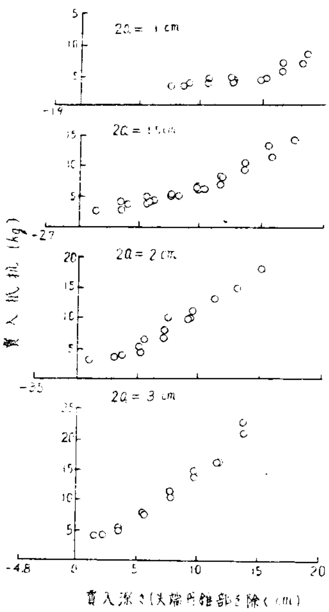
NO	d mm	S mm	W kg
1	30	48	1.50
2	20	35	1.00
3	15	27	0.78
4	10	19	0.52

註：ただし木杭の胴長さは 350, Wは鋼杭重量，木杭は略す

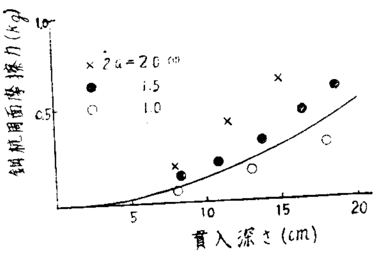
図—2



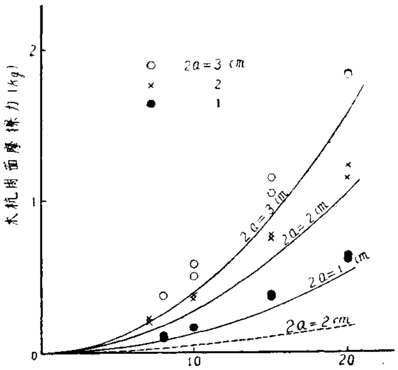
図—3



図—4



図—5



単に求められる。前者の測定の際はあらかじめ杭を砂箱内に支持した後，杭の周りに砂をつめ同じ条件で突き固めて抵抗を測る。この測定から求められたQはもちろん常数ではないが実験範囲内では杭径，貫入深さについてあまり変化せず大体2であつた。この値は将来種々の場合について測定するつもりであるが，本文の理論値では簡単のため2とした。

4. 塑性論による解法

2. においては地盤を弾性体と考えて解析をおこなつたが，その不備はQなる量を処理する際に認めざるを得なかつた。そこで次に地盤を砂のごとき凝集力のない粉体として取扱つてみた。

応力に関する平衡方程式は

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+\frac{\partial \tau}{\partial \rho}+\frac{\tau}{\rho}=\gamma \quad \cdots\cdots(14)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial z}+\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho}+\frac{\sigma_\rho-\rho_\varphi}{\rho}=0 \quad \cdots\cdots(15)$$

であつて，これらを解くのに2つの条件式が必要である。その1つは ρz 面内での降伏条件

$$\left.\begin{aligned}\sigma_\rho&=\sigma(1-\sin\theta\cos 2\delta)\\ \sigma_z&=\sigma(1+\sin\theta\cos 2\delta)\\ \tau&=\sigma\sin\theta\sin 2\delta\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(16)$$

を仮定する。ここで θ は地盤の内部摩擦角，δ は ρz 面内の第1主応力が z 軸となす角で σ は ρz 面内の2つの主応力の相加平均である。

他の1つの条件は Terzaghi の所論[3]に従い σ_φ が ρz 面内の第1主応力に等しいと仮定する。すなわち

$$\sigma_\phi=\sigma(1+\sin\theta) \quad \cdots\cdots(17)$$

式 (16),(17) を式 (14),(15) に代入すれば

$$(1+\sin\theta\cos 2\delta)\frac{\partial\sigma}{\partial z}+\sin\theta\sin 2\delta\frac{\partial\sigma}{\partial\rho}$$
$$-2\sigma\sin\theta\sin 2\delta\frac{\partial\delta}{\partial z}+2\sigma\sin\theta\cos 2\delta\frac{\partial\delta}{\partial\rho}$$
$$+\frac{1}{\rho}\sigma\sin\theta\sin 2\delta=\gamma \quad \cdots\cdots(18)$$

$$\sin\theta\sin 2\delta\frac{\partial\sigma}{\partial z}+(1-\sin\theta\cos 2\delta)\frac{\partial\sigma}{\partial\rho}$$
$$+2\sigma\sin\theta\cos 2\delta\frac{\partial\delta}{\partial z}+2\sigma\sin\theta\sin 2\delta\frac{\partial\delta}{\partial\rho}$$
$$-\frac{1}{\rho}\sigma\sin\theta(1+\cos 2\delta)=0 \quad \cdots\cdots(19)$$

となる。偏微分方程式論によれば (18),(19) の特有曲線は α, β を特有方向にとつて物理面で

$$C_+ : \frac{\partial\rho}{\partial\alpha}=\tan\left(\delta+\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\frac{\partial z}{\partial\alpha} \quad \cdots\cdots(20)$$

$$C_- : \frac{\partial\rho}{\alpha\beta}=\tan\left(\delta-\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\frac{\partial z}{\partial\beta} \quad \cdots\cdots(21)$$

であり，応力面において

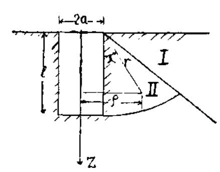
$$\Gamma_+ : \cos^2\theta\frac{\partial\sigma}{\partial\alpha}+2\sigma\sin\theta\cos\theta\frac{\partial\delta}{\partial\alpha}$$
$$+\left\{\frac{-\sigma\sin\theta}{\rho}(1+\sin\theta)(1+\cos 2\delta)\right.$$
$$\left.+\gamma\sin\theta\sin 2\delta\right\}\frac{\partial\rho}{\partial\alpha}+\left\{\frac{\sigma}{\rho}\sin\theta\sin 2\delta\right.$$
$$\left.(1+\sin\theta)-\gamma(1-\sin\theta\cos 2\delta)\right\}\frac{\partial z}{\partial\alpha}=0$$
$$\cdots\cdots(22)$$

$$\Gamma_- : \cos^2\theta\frac{\partial\sigma}{\partial\beta}-2\sigma\sin\theta\cos\theta\frac{\partial\delta}{\partial\beta}$$
$$+\left\{\frac{-\sigma\sin\theta}{\rho}(1+\sin\theta)(1+\cos 2\delta)\right.$$
$$\left.+\gamma\sin\theta\sin 2\delta\right\}\frac{\partial\rho}{\partial\beta}+\left\{\frac{\sigma}{\rho}\sin\theta\sin 2\delta\right.$$
$$\left.(1+\sin\theta)-\gamma(1-\sin\theta\cos 2\delta)\right\}\frac{\partial z}{\partial\beta}=0$$
$$\cdots\cdots(23)$$

である。

次に具体的に応力状態を求めこれから支持力を計算しよう。地盤を**図—6**のように領域 I，II 及びその他の部分にわけて考える。さらに底面の影響を考えて幾つかの領域にわけて考えるべきであろうが，一応ここでは I，II の部分について考える。

図—6



領域 I における応力状態は式 (22),(23) から解くことも可能であるが，いま,(18),(19)から直接解いてみる。領域 I においては $\delta=\pi/2$ なる解が存在することは容易に知られる。(18),(19) に $\delta=\pi/2$ を代入すれば

$$(1-\sin\theta)\frac{\partial\sigma}{\partial z}=\gamma \quad \cdots\cdots(24)$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\rho}=0 \quad\cdots\cdots(25)$$

となり，これを積分すれば

$$\sigma=(\gamma z+A)/(1-\sin\theta) \quad A：積分常数\cdots(26)$$

を得る。A は境界条件から決定されるもので，地表面の境界条件を

$$\sigma_z=\tau=0,\quad \sigma_\rho \nless 0 \quad\cdots\cdots(27)$$

とすれば $A=0$ となる。従つて(16)より領域Ⅰの解は

$$\sigma_\rho=\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\gamma z,\quad \sigma_z=\gamma z,\quad \tau=0 \quad\cdots\cdots(28)$$

で，(28) は (27) を満足している。一方滑り面は

$$\frac{\partial\rho}{\partial z}=\tan\left(\frac{\pi}{2}\pm\overline{\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}}\right) \quad\cdots\cdots(29)$$

なる2つの回転面群であつて，この解は Rankine の受動状態の解にほかならない。

さて以上でⅠ，Ⅱの境界は $\rho=a+z\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$ であることがわかつたから，この面でⅠの解と接続するようなⅡにおける解を求めよう。その前に**図—6**で示したように座標変換 $(\rho,z)\to(r,\lambda)$ すなわち，

$$r=(\rho^2+z^2)^{1/2},\quad \lambda=\tan^{-1}(\rho-a)/z \quad\cdots\cdots(30)$$

を施す。すると応力面での特有曲線は

$$\begin{aligned}\Gamma_\pm :\ &\cos^2\theta\frac{\partial\sigma}{\partial\alpha_i}\pm2\sigma\sin\theta\cos\theta\frac{\partial\delta}{\partial\alpha_i}\\&+\left\{\frac{-\sigma\sin\theta}{a+r\sin\lambda}(1+\sin\theta)(1+\cos2\delta)\right.\\&\left.+\gamma\sin\theta\sin2\delta\right\}\left(\sin\lambda\frac{\partial r}{\partial\alpha_i}+r\cos\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha_i}\right)\\&+\left\{\frac{\sigma}{a+r\sin\lambda}\sin\theta(1+\sin\theta)\sin2\delta\right.\\&\left.-\gamma(1-\sin\theta\cos2\delta)\right\}\left(\cos\lambda\frac{\partial r}{\partial\alpha_i}\right.\\&\left.-r\sin\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha_i}\right)=0,\ (i=1.2)\quad\cdots\cdots(31)\end{aligned}$$

ただし，$\alpha_1=\alpha$, $\alpha_2=\beta$ で複号はそれぞれ α,β に対応する。これを積分するために，次のような滑り面を仮定する。

$$C_+ : re^{-\lambda\tan\theta}=\beta \quad\cdots\cdots(32)$$

$$C_- : \lambda=\alpha \quad\cdots\cdots(33)$$

(32),(33) は領域Ⅰの特有曲線と滑らかに接続することは明らかである。これと (20),(21) とを比較して

$$\delta=\lambda+\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2} \quad\cdots\cdots(34)$$

であることがわかる。従つて(31)の Γ_- はやや簡単となり次のようになる。

$$\begin{aligned}\Gamma_- :\ &\cos^2\theta\frac{\partial\sigma}{\partial\beta}-\frac{2\sigma\cos^2\delta\sin\lambda}{a+r\sin\lambda}\sin\theta\\&(1+\sin\theta)\frac{\partial r}{\partial\beta}+r\sin\theta\sin2\delta\sin\lambda\frac{\partial r}{\partial\beta}\\&+\frac{\sigma\sin2\delta\cos\lambda}{a+r\sin\lambda}\sin\theta(1+\sin\theta)\frac{\partial r}{\partial\beta}\\&-\gamma(1-\sin\theta\cos2\delta)\cos\lambda\frac{\partial r}{\partial\beta}=0\quad\cdots(35)\end{aligned}$$

Γ_+ は積分が困難であるから Γ_- のみを取り扱つてゆく。(35) を β に関して積分すれば

$$\begin{aligned}&c\cos^2\theta+2\cos\delta\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\sin\theta(1+\sin\theta)\\&\int^r\frac{\sigma\,dr}{a+r\sin\lambda}+\gamma r\sin\theta\sin(\theta-\lambda)\\&-\gamma r\cos\lambda=f(\alpha)\quad\cdots\cdots(36)\end{aligned}$$

ここで $f(\alpha)$ は α ついての任意函数である。杭周の σ を求めさえすればよいから $\lambda=0$ とおけば上式は

$$\left.\begin{aligned}&\sigma+c\int^z\sigma\,dz=\gamma z+\frac{f(0)}{\cos^2\theta}\\&c=\frac{1}{a}\tan\theta(1+\sin\theta)\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(37)$$

式 (37) より

$$\sigma=\frac{\gamma}{c}(1-e^{-cz}) \quad\cdots\cdots(38)$$

となるから周面の剪断力は

$$\tau=\gamma a(1-\sin\theta)(1-e^{-cz}) \quad\cdots\cdots(39)$$

となり，周面摩擦抵抗力は次のようになる。

$$T=2\pi\gamma a^2(1-\sin\theta)\left(l+\frac{e^{-cl}-1}{c}\right) \quad\cdots\cdots(40)$$

5.

まず**4.**の塑性論的解の妥当性を見るため，式 (40) に実験諸元を入れた計算値を**図—5**に点線で記入すれば，図のごとく計算値は実験結果に比し相当小さい結果を示す。従つて式 (40) は支持力算定式としては不適当である。この理由を考えてみると，式 (40) を誘導する際に用いた次の仮定，すなわち

i) 地盤を均質等方性かつ非圧縮性とし，杭の打込みに際して土の密度変化を全く考慮しない。

ii) σ_ϕ は $\rho-z$ 面内の最大主応力に等しい。

iii) 滑り線の方程式が式 (32)，(33) によつて与えられる。

としたことでないかと思われる。しかし杭の深さ方向の杭周面剪断応力分布の状況は **2.** の解においては Q が常数の場合には三角形分布であるのに反し，**4.**の解によれば式(39)のごとく Dörr[4] の解の台形分布に似た指数函数的分布をなしある程度実際的である。

上述の諸事情を考えれば **2.**，**4.** の2種の解はいづれも実際の杭の周面支持力を算出するためには不充分ではあるが，地盤を弾性体としての **2.** の解は実験値とかなりよい一致を示すことは興味が深い。これらは杭周に接するいくらかの領域以外は弾性体として挙動していることを暗示しているのであろう。そこで杭周

に接する領域を杭よりの加圧による密度変化と塑性特性とを考慮して解くことが合理的と考えられるが，なおこの解は困難であつて今後の研究にまちたい。しかしこの意味において **2.** で行つた解は Q なる値を導入することにより，杭周に接する塑性域に生ずる塑性並びに圧縮の影響を弾性変形でおきかえたもので，Q のもつ意味も明らかであり，この解は実用式としての合理性を一歩進めたものと考える。

参考文献

1) 村山朔郎・谷本喜一：摩擦杭の支持力について，土木学会第9回年次講演会概要，p. 97，(昭28)。
村山朔郎・谷本喜一：摩擦杭の支持力について，第3回応用力学連合講演会にて発表（昭28）
2) A. Föppl und L. Föppl : Drang und Zwang, IIer Band, 139, (1928) 及び
L. N. G. Filon : Phil. Trans. Roy. Soc. London, A 198, 155 (1902)
3) K. Terzaghi : Theoretical Soil Mechanics, 202 (1948)
4) H. Dörr : Die Tragfähigkeit der Pfähle (1922)

（昭.29.2.22）