寄書

推計学の盲点と土木測量学

正員　安　東　功*

1．まえがき　推計学は戦後派のものと云う。最近は多くのレポート等でも，特に推計学の公式で締めくくりしないと何か間が抜けたように思われている。

元来，推計学発展の過程は戦時中に大量生産――流れ作業のごとき同一母集団――における全量検査の手数をはぶくため，30分～1時間ごとに製品の抜き取り検査を行い，quality control を施行したことによると聞く。しかるに土木方面では同一母集団でないもの，例えばサイロと袋入りセメントの比較検定，またはコンクリート強度につき現場別(多数のパラメーター混入)の母分散の比較推定などに推計学を応用している[1]。かかる適用は誤りとは考えられないが，推計学本来の発達過程から遠ざかつた，推計学乱用のきらいがありはしまいか。なお，この例で，特に推計学の公式を用いなくとも，表—**5**，表—**6** を一見しただけで，大体の判定は察知できそうである。なおさらに数量的計算を欲するなら従来の統計学の棄却法（Rejection Method）の公式を採用すればよいであろう。かくのごとく推計学が近来急激に流行した原因は，おそらく同一のデーターに対し，誰が計算しても同一の答ができると云う便利さに帰因するのではなかろうか。

さて，測量，特に元陸地測量部方面では確率分布の型と形が既知のときは推計学的類推によつて厳密解答を求めているが，土木測量では多くの場合，盲点の網にかかり，略値あるいはアイマイな解答で満足しているようである。以下4つの例題について検討してみる。

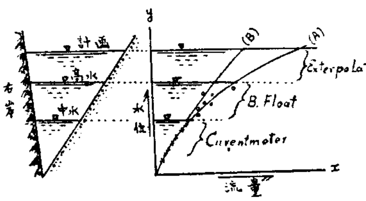
2．母集団の型が既知の場合　正規分布の母集団で母平均 $m=0$，母分散 $\sigma^2=1$ なる標準型の場合，しかしてその確率分布は次の (1) 式で示される例である。

$$f(x_i)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}\,\sigma}\,e^{-\frac{(x_i-m)^2}{2\sigma^2}},\ (i=1,2,\cdots\cdots,n)\cdots\cdots(1)$$

例題 (1)　交互準測 (Reciprocal Leveling)　水準測量で河川等を横断するとき，前視と後視とが不等距離となり，(1) 式の適用が不可能となる。かかる場合には交互準測を行う。この測法は別種の母集団となるが，型は (1) 式に当てはまる。交互準測に際し，土木測量では観測回数 2，3 回に過ぎないが，元陸測では実に 600 回くらいの観測を重ねている。両者ともバイアス (Bias) 観測ではあるが，600 回—1 日 60 回観測とし，気象その他種々なる条件のもとに，10日間の行程――なら数学的希望値 $E(m)$ の計算，すなわち (1) 式の x_i の計算が確実となろう。であるから逆説であろうが，前者を従来の統計学的，後者を新式の推計学的解法の例題の一つに数えておく。

例題 (2)　洪水流量曲線　洪水流量曲線を求めるには中水位以下は流速計により，中水位以上は竹浮子によるのが慣例となつている。次に示す実測例は流速計と竹浮子とが同一母集団からの標本であるか否かを検討せんとするものである。

図—1



図—1 はかつて 1919 年夏筆者が天龍川二俣（吊橋の上流）で流量測量ならびに計算を行つた模型図である[2]。しかして計画洪水流量を (A) なる流量曲線(放物線) によつて 70 万個と算定した。ところが (B) 曲線のごとく 40 万個と査定(訂正)され，しかも改修工事が 40 万個で実施された。同一データから相関曲線 (Regression Curve) が 2 とおり算出された理由は浮子による標本のうち最も重みのかかる部分を棄却あるいは修正することによつてなされたものであろう。

この棄却，修正は妥当であつたろうか。**図—1** に示すように流速計における相関は完全で竹浮子は不完全である。すなわち前者は係数[3] が約1であるのに後者ははるかに劣る。単に相関関係の点から観察すると両者は同一母集団で無いことが一見明らかである。しかるにこの現場は同一母集団と云う裏付（条件）が備わつている。すなわち流路断面は三角形である。この三角形水路と云う条件に関する限り，同一母集団とみな

* 攻玉社，測量実習教師

1) 田原保二：推計学のねらいと本質，本誌講座，昭.27.10.p. 42.

2) 安東功：土木学会第8回年次学術講演，洪水時に於ける河川横断面の等流速曲線について，昭.27.5.（第8回，講演概要 p. 55）

3) 相関係数 $r=C_{xy}/(\sigma_x\cdot\sigma_y)$，ただし C_{xy}：共変偏差，σ_x, σ_y：両軸の偏差

して差しつかえない。であるから浮子の一部に対してのみ棄却修正せず，流速計による本標も加えた (A) 曲線を採用すべきであつたろう。あるいはまた，何等かの検定法（推計学的）により浮子の部分を全部取り除いて，信頼度の大なる流速計のみによる（A）曲線を採用すべきではなかつたろうか。果せるかな工事なかばにして新堤の破壊および変更の事実が起つた。その昔洪水時用流速計[4]の発明があつたなら，かかる憂目もなかつたであろう。

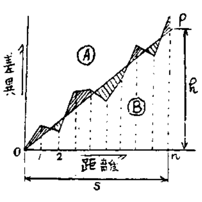
3．母集団の型が不明の場合　歪度(Skewness) であるかあるいは定差（Constant Error) であるか明らかでないが，とにかく各観測ごとに同一符号の差が混入する母集団についての例である。筆者は後者とみなし確率分布の型を (2) 式のごとく仮定した。

$$f(x_i)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x_i-m+K_i)^2}{2\sigma^2}},(i=1,2,\cdots,n)\ \cdots\ (2)$$

ここに，K_i=const. で正または負なる値をとる。従つて K_i がほとんど 0 であるか，あるいはこれを標本から除去することにより，(2)式は(1)式と同型となる。

例題 (3)　水準測量　精密水準測量では一定区間ごとに B.M. を設け，その間を往復測量し，その差異 (Discrepancy) によつて測量の精粗を定める。しかして往と復との測量の中には必ず定差（原因不明）を含む。この定差を出すには次の図解法がある。**図—2** で横軸に一定区間ごとの距離をとり，縦軸に差異（定差と偶差との混合）の累加値をプロットし，図上Ⓐの部分の面積とⒷの部分の面積とが等しくなるように目測で op なる回帰直線を画き，$K=h/s$ なる式によつて求める。かくして (2) 式から K_i を除去するのである。

図—2



元陸測，1 等水準測量規定では，“各点ノ観測ハ 2 回ヅヽトシ，B.M. 間（一鎖部約 2 km）ヲ往，復 2 回行ヒ，其差異 3 mm を超ユルトキハ再測ス”，とある。なお精密を要しない場合（覘標測量）の規定では“往復測量セズ”，と定差 K_i を度外視し，推計学的に見て気軽に取扱うように明示している。

次に元内務省河川縦断測量規定には“少クトモ往復 1 回以上施行シ其誤差ハ 5 km ニ対シ 12 mm ヲ超ユベカラズ”とある。この規定で誤差なる字句から判断すると (1) 式で取扱うことになり，往復なら字句によると (2) 式で取扱うことになる。このあいまいな測量規定で実施に際し困惑するのはあながち筆者 1 人のみでないであろう。もつともあまり精密を要しない河川ないしは下水の縦断測量では，かくのごとき規定でも差しつかえないものとし，実際には各人各様[5]の測法ならびに計算法を採用しているようである。

例題 (4)　視距定数の決定法　視距公式は，$D=KS+C$　ここに D：距離，S：夾距，K：乗定数 (100 倍)，C：加定数（対物鏡により一定)。この K と C との決定には C を既知として K のみを求めるか，または K,C を同時決定法として多数の測定方程式から最小 2 乗法の公式[6]（従来の統計学的）を適用して求めている。

疑問 (a)　同時決定法は妥当か　対物鏡における C の値はレンズ固有の性能であるから，同時決定法で求めることは無意味であるとしばしば問題となることがある。筆者はこれを 2 つのケースに類型して考える。

第一：機械そのものを対象とすれば C は既知数であるから，これを取り除いて K のみを最小自乗法にかけるのが妥当と思う。例えば一つの機械を万人が使用するときは C の値は箱書きにあるものをそのまま用いてよい。

第二，観測と云う点からみれば個人により千差万別であるから，精密に作られた機械でも，C も交えて同時決定法によるべきと思う。しかしてこの場合，いわゆる盲点から逃れる工夫は，某測者が一定の機械をもつて，同時決定法により，使用のたびに（または心境の変化のたびに）機械の検定を行うことである。

使用のたびに検定を行うことは確率の確率を求めること，すなわちあらゆる環境の下で検定を行うの意図のみではない。練習熟達がおもな目的である。かくすれば (2) 式における K_i も発見でき，あるいは悪癖も矯正—個人誤差は絶対に矯正し得ず—し得ることとなろう。従つて共変偏差 C_{xy} は実際の測量と無限に接近し得て，ついには熟達の結果いわゆる技神に入るの妙技で，誤差（偶差）のきわめて少ない視距測量も可能となろう。索道の実測測量が普通のトランシットと函尺をもつて施行されるごときは好適例と思う。

疑問 (b)　測定方程式中に特殊因子の介入　母集団としては (2) 式で取り扱うケースに属するが，同式における K_i の値は正または負の定差であると同時に，K_i は観測時刻によつて変化する型の場合を云う。換

4) 永井荘七郎：洪水時用流速計の製作，本誌，昭. 28.7.

5) 林猛雄：測量学，p. 275，アルス土木工学大講座（註：往復なる字句を規定から抹消している）

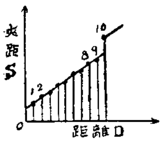
6) $K=\dfrac{n[SD]-[S][D]}{n[SS]-[S][S]}$，$C=\dfrac{[D][SS]-[S][SD]}{n[SS]-[S][S]}$

言すれば時間 t は函数 $f(x,K)$ の媒介変数であつて，K_i は次の (3) 式で表わし得る性質のものを云う。

$$K_i=F(t)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

筆者はこの種の K_i を累進個人誤差[7]，また (3) 式による回帰曲線を累進個人誤差曲線と名づけた。

図—3

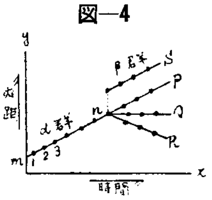


多くの同時決定法を実験したなかで，次に述べる不可解の例が生じた。**図—3** で No. 1 から No. 9 まではほとんど一直線中にあるが No，10 は特にとび離れている。もちろん棄却値に該当する。しかるに No. 10 を棄却すると次の矛盾が起る。この望遠鏡固有の C の値は 24 cm である。かりに No 10 をオミットして計算すると C は過大となり，オミットせずに計算すると 24 cm に近づく。故にこの実験例は推計学的検定と物理学的算定とは信頼関係が逆の効果を表わしてきた。この現象は累進差（累進個人誤差の略，以下同様）が働らいたものと判定し，その原因を次のごとく考える。逆効果は累進差のためで，また累進差が働らいてきた原因は下方視距線をすべて目盛の中央に合致させて測定した——中央に合致させる方が正確値を得る——ためとみなしたのである。

くわしく云えば **図—3** で最初 No 1，2 等は目盛の中央附近で合致したものが，累進差が働らいて次第に時間の経過につれ，中央から外れて No. 9 まではますます一方に偏してゆく。しかるに No 9 を止揚 (Aufheben) とし，No. 10 が契機 (Moment) となつて，また中央に戻り再び前述のことを繰り返すものと想像したのである。

疑問 (**c**)　回帰曲線の性質　前述 (**b**) における止揚について吟味してみよう。**図—4** で mn 線を累進差曲線とする。いま P 線のごとくそのまま無限に延長することは不合理である。なぜならば最初中央に合わせたものが次第に一方に偏してゆきついには目盛（禁制点）を通り越すことになる。Q 線のごとく x 軸に平行に引けば (3) 式に反し，(2) 式すなわち K=const. の型となる。R 線のごとく反対の方向に曲るとすれば，これは (1) 式の型となり偶差の性質をおびる。結局のところ S 線のごとく不連続の形式をとり，図のように α 群 β 群のごとく形づくるほかないようである。

図—4



疑問 (**d**)　α 群 β 群は連続曲線すなわち同一母集団か　α 群，β 群等を一つずつの標本分布とみなし，それらの新らしい標本から新規の回帰直線を求めたと仮定すれば C の値は正しく 24 cm に合致するようである。ゆえにこの推論から α 群 β 群等は連続曲線すなわち時系列 (Time series) に支配された一つの母集団であると判定するのである。

他方，各群を独立せる標本とみなし，各曲線群を形の上で連続型に変換するには次のようにすればよい。まず，(3) 式の K_i の値を求める。それには**図—2** と類似の形式で，横軸に時間 t をとり縦軸にヒストグラムの積率の累加せるものをとり，回帰曲線を画き，単位時間に割り当てたものを累進差の基本値 K とする。しかる後この K を (2) 式から除去するのである。この例を該法で修正したと仮定すれば No. 9 と No. 10 とは互いに相接近して連続型曲線となるであろう。

以上の修正すなわち (3) 式から (2) にさらに (1) 式に還元すること——特種の K を取り去ること——により累進差の混合せる母集団に対し，その母分散 σ^2 は充分に減縮することができた。筆者の実験では 15% ほど減縮しえた実例がある。

4. むすび　昨年全国大学から学生補導厚生の教官が東大に集り数名の米人講師のもとに S.P.S(Student Personnel Service) 研究会が数箇月にわたり開催された。米人講師の講義に関連して，ある討論が盛んであつたとき，某心理学者は推計学の一公式を提示した。ところが，さしも猛烈であつた論争がピタッと止まつた。正に天下り式の感があり，しかも該公式に対する検討が皆無であつたことにはさらに驚いた。

結論として，あらゆる社会事象は Stochastic Process によつて深く掘り下げてゆくと，そこにいくばくかの K_i ((3)式) を見出すであろう，と云う持論である。例えば銭を投げて表裏のでる確率さえも無限の回数を重ねるとき，窮極において 1/2 とはならず——zero なる数は存在しない，または真の鉛直面は存在しない等を前提として——必ず +or− なる K_i が存在するであろう。されば誤差論で偶差 ((1)式) は成立せず，すべての誤差は定差 ((2)式) のうちに含まれ，従つて銭投げの表裏も，明日を予言できうるのではなかろうかと思われる。あえて識者の御批判をこう。

[7] 安東功：累進個人誤差，本誌，昭25.2.（註：同文中の累進個人誤差曲線は原点を通るパラボラの方が妥当のようである）