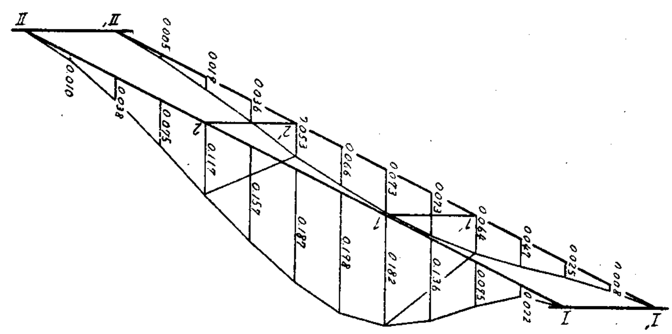
に影響線を誘導する。この際，対称性が都合よく利用される。

図—4



ここには 図—4 に示す点1の変位 δ_1 の影響線のみをかかげたが，θ_x，θ_y等についても同じように求めることができる。これらを適宜に組合わせて著者前著[1] または撓角式等によつて任意の点の断面力の影響線を導くことができる。

附記　本文では，解法手段を示す目的で，ごく簡単な計算例を採つたのであるが，断面力の影響線の詳細，並びに異なつた型式との比較，その他については他の機会に発表するつもりである。本研究には京大，小西教授より多大の御援助を得た。ここに厚く謝意を表するものである。

参考文献その他

1) 星　治雄：橋梁床組の計算について；土木学会誌 37 巻 8 号，pp 353-357, 1952
2) たとえば，大村　裕：鋼プレートガーダー道路橋の実測応力について；土木学会誌，38 巻6号，pp 218-222, 1953
3) 小西一郎：道路橋構造の最近の進歩；京都大学工学研究所彙報，第3輯，pp 8-13, 1953
4) H. Meyer-Larssen : Der Neubau der Bürgermeister-Smidt Brücke in Bremen ; Bauingenieur, 27 Jahrg., S 389-398, 1952
5) 土木学会誌 38 巻 3 号の討議において，村上教授より示されたように，撓角式によつて荷重項を誘導しても同じ結果になる。
6) 1)で提示した計算法による。普通の構造のように2つの対称軸をもつ場合には，全節点の 4/9 ～1/4 の数の節点について解けばよい。
また未知数が比較的すくないときは，行列を用いて大した手数を要せずに $x_i^{(k)}$ を求めることができる。その際 Δ, Δ_{ik} 等は対角行列に直して計算すれば便利である。なおこのような行列の計算については，内田一郎：弾性連立方程式の一解法；土木技術，4 巻 6 号等がある。

(昭.28.12.20)

砂の粒度曲線と有効径についての一考察*

正員　佐々木八郎**

ON GRADING CURVES AND EFFECTIVE DIAMETERS OF SAND

(JSCE May 1954)

Hachirō Sasaki, C.E. Member

Synopsis Hazen's effective size is not certain enough to show the representation of permeability and the like in a wide range of graduation of sand. As for Zunker's effective diameter, it is recognized to be reasonable. The writer researches the relation between these effective diameters, trying to show a modification which will be able to enlarge the range of the application of the former. Besides, the writer applies the modification to representing a numerical designation of grading curve of soil.

要旨　ヘーズン氏有効径は広範囲の粒度の砂の滲透力などを表わす意味の場合に，それのみでは不確実のものである。ツンカー氏有効径はその点において合理的であることが認められている。筆者はこれら二つの有効径の関係をさがし，前者の適用範囲を拡げうるだろうところの一修飾を示した。なお，同修飾を試みに土壌粒度曲線の数字的表現にとりいれてみた。

1. 緒　言

砂層を形成する粒子がそれぞれの大いさ，形状などを異にする場合，これと等しい効果をもたらす球形等直径の粒子層を仮定して，同直径をしばしば有効径と

* 土・粉体・粒体連合講演会（昭.27）にて講演したものに一部修正を加えた。

** 信州大学助教授，工学部土木教室

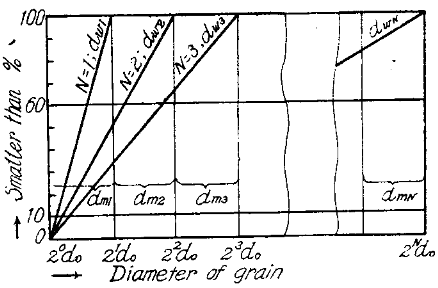
呼んでいる。この有効径は毛細管能または滲透力などに関して同一効果を与えるような意味によく用いられ，Hazen 氏[1]は実験的に Hazen's effective size (d_e にて示されている) を提唱し，また Krüger, Zunker, Kozeny[2] の諸氏は理論的に Zunker's effective diameter (d_w にて示すこととする) を唱和していることは周知のところである。前者の d_e は土砂の粒度曲線から簡単に求まり広く愛用されている。しかし粒子の混合状態のいかんによつてははなはだ曖昧なものである。ヘーズンは土砂の物理的特性を示す一手法としていわゆる均等係数をこれに附加しているが計算的に取扱つていない。後者の d_w の方は粘土質を含まない砂土にたいして合理的の有効径であるとして信頼性がもたれている。

筆者は，簡便な d_e が不均等の粒層においても適合しうるようにと，以下のごとくこれの修飾を考えてみた。

2. 諸種の粒度曲線における d_e と d_w との関係

(1) 粒度曲線-III 型において　片対数紙の横軸上に粒子の直径を log 2 の倍数値にとり，縦軸上にその粒子の通過率をとつたとき，粒度曲線が一直線で表わされるものを III 型と呼ぶこととする (**図—2** 中の III を参照)。その場合 **図—1** において，

図—1　III 型粒度曲線



a)　ヘーズン有効径：

$d_{eN}=d_0 10^{1/10\cdot N\log 2}$ ……………………(1)

$d_{60\%N}=d_0 10^{6/10\cdot N\log 2}$ ……………………(2)

均等係数 $u=d_{60\%N}/d_{eN}=10^{1/2\cdot N\log 2}$……(3)

ここに，N をある粒度曲線の占める log 2 サイクルの数，d_0 をこの粒度曲線の終る最小粒径とする。

b)　ツンカー有効径：一般に

$1/d_{wN}=\sum_1^N g_N/d_{mN}$ ……………………(4)[2]

書きかえて

$$d_{wN}=\frac{2^{N-1}\cdot N}{2^N-1}d_{m1}=\frac{2^N\cdot N\log 2}{(2^N-1)\log e}d_0\ \cdots(5)$$

ここに，d_{wN} は log 2 サイクル N ケを有する粒度曲線のツンカー有効径，d_{mN} は篩目 $2^{N-1}d_0$ と $2^N d_0$ とにはさまれた粒子群の比表面的平均粒径，g_N はその重量比率であつて，ツンカーによれば次のように表わされるものである。

$$\frac{1}{d_{mN}}=\left(\frac{1}{2^{N-1}d_0}-\frac{1}{2^N d_0}\right)$$
$$\log e/(\log 2^N d_0-\log 2^{N-1}d_0)\cdots(6)$$

c)　有効径係数：前記諸式から $d_{eN}=d_0 f_1(N)$；$d_{wN}=d_0 f_2(N)$，また $d_{w1}=d_{m1}$ とおいて，ここに d_{eN} と d_{wN} との比をとり，

$$d_{wN}/d_{eN}=d_0 f_2(N)/d_0 f_1(N)=f_3(N)=\alpha\ \cdots\cdots(7)$$

とおいてみる。いま $f_2(N)$ 及び $f_1(N)$ 中に前記諸関係をいれた結果から近似的に $f_3(N)$ として次の形を仮定しよう。

$f_3(N)\fallingdotseq 1+N\log 2=1+2\log u$

あるいは

$\alpha\fallingdotseq 1+2\log u$ (III 型) ……………………(8)

粒度曲線 III 型において $u=1\sim16$ (すなわち $N=1\sim8$) の範囲ならば (8) はほぼ (1)～(6) を満足している。α は粒度曲線のおおむね傾斜によつて支配される係数と考えられる。ここに α を有効径係数と仮称しよう。よつて式 (7) より III 型ならば

$d_w\fallingdotseq(1+2\log u)d_e$ (筆者) ………………(9)

なお吉田彌七博士の示された実験式をかかげれば

$d_Y=(0.75+0.25\,u)d_e$ (吉田)[3]…………(10)

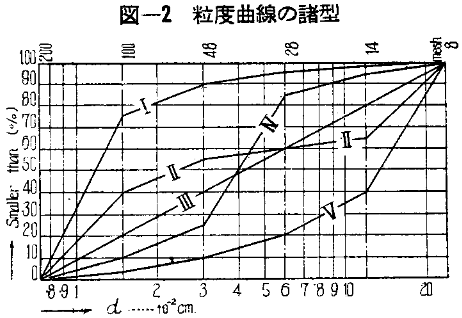
(2) I, II, IV 及び V 型粒度曲線において　粒度曲線の曲折の形態として大づかみに分類して **図—2** に示すような I, II, III, IV, V の 5 種を考えてみよう。前記の III はその特殊の場合であるから一般には d_e, d_w の関係は u のみならず粒度曲線の形状によつて変化するものと考えなければならない。この変化を代表する因子をかりに λ とおいて，式 (8) 右辺第 2 項の係数 2 の代りにこの場合 λ をおきかえて一般を表わすことが許されるものと仮定しよう。

すなわち

$\alpha=1+\lambda\log u$……I, II, IV, V 型…………(11)

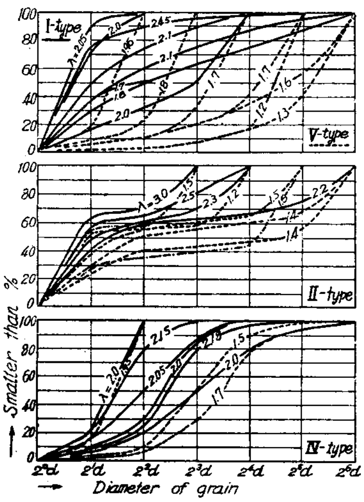
ここに d_e および u を互いに同じくする粒度曲線で

図—2　粒度曲線の諸型



もその形状を異にすれば従つて λ を異にし，λ の大いさはほぼ混合粒子の有する比表面の値に反比例するごとく考えられる。いま λ を比表面係数と仮称しよう。λ の値は，粒度曲線の skew の範囲が $N=1\sim6$ なら $3\sim1$ である。また N_s（ここに N_s を d_e より小さい微細粒子群の分布する log 2 サイクルの数とする）が大なれば λ は小となる。例えば $N_s=3\sim5$ ならば $\lambda\doteqdot1\sim0$，極端に $N_s>5$ ならば $\lambda<0$ である。λ の値はあらかじめ諸種の雛型の粒度曲線を想定して，もとめておくことができよう（例えば**図—3** に示す諸曲線参照）。

図—3　諸種の粒度曲線の λ の値



3．α, λ によつて修飾された d_e の応用の例

(1) Darcy 法則における d_e 型滲透公式適用範囲の拡張として

a）土砂の滲透係数測定値と α との関係：一般にある混合粒子層（$u>1$）における代表有効直径（d_t にて示すこととする）なるものを求めるために，球形等直径粒子層（$u=1$）において成立する著名の Slichter 氏理論式中の k に滲透係数測定値を充て，これから粒径を逆算したものをもつて d_t と考えてみることにする。ここに

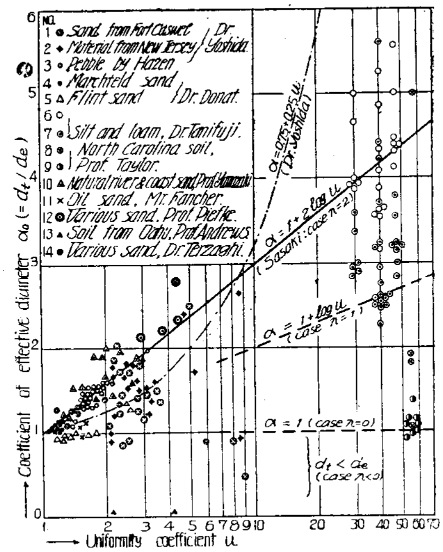
$$k=c_s/\eta\cdot1/x\cdot f(d_t)\ \text{(Slichter)}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

いまかりに

$$\alpha_0=d_t/d_e\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

とおいて，諸権威者の行われた幾つかの k の測定値をもとにして式(12)から d_t をみいだし，さらに式(13)によつて α_0 なる比をもとめてみる。かくして得られた α_0 がその土砂の粒度曲線をもとに式 (11) によつてあらかじめ定められた α とどんな関係にあるかを，両者を図によつて比較すると**図—4** のようになる。これによれば式 (11) は u の広い範囲において，諸家の測定値からさだめた α をかなりよく包含していて，α_0 の大部分は $\lambda=2$ に相当する α 直線の近傍に点在し，他は $\lambda=1$，$\lambda=0$ およびまれに $\lambda<0$ の範囲に散乱する。すなわち，No.1 と No.2[3] は通常"砂"と呼ばれるもの（$d_e=0.09\sim0.83$ mm，$u=2\sim9$，空隙率 $p=0.25\sim0.48$）の場合，No.3[3] は細礫（$d_e=3$ 及び 5 mm，$u=1.4\sim2$）の場合であるが式 (8) による直線附近に存在する。No.4[4] は均齊な粒子の中砂（$d_e=0.3\sim0.4$ mm，$u=1.1\sim1.3$，$p\doteqdot0.38$）の場合で吉田式がよく合つている。No.5[4] はきわめて角張つた砂（$d_e=0.2\sim1$ mm，$u=1.1\sim4.3$，$p\doteqdot0.4$ 及び 0.5）であるが，その $p=0.5$ の場合は例外的に $\lambda<0$ となる。これは空隙率の大いさが Slichter 式成立限界（$p_{max}=0.476$）を超過し同式適用は無理であることが一つの理由かと考える。No.6[5] は，砂質ローム（$d_e=0.0027$ mm，$u=40$），沈泥質砂土（$d_e=0.0060$ mm，$u=46.2$）沈泥質ローム（$d_e=0.00265$ mm，$u=27.2$）の $p\doteqdot0.50\sim0.68$ についての結果であるが，空隙率が大きく No.5 同様の理由によるものとすれば式 (12) は不当であり，空隙の状態を表わすものとしてこの場合 Zunker, Kozeny または Terzaghi の示す $f(p)$ の形に従うのが適当かと考える。ゆえにこの場合 Terzaghi[6] によつて α_0 を求めてみると No.7 のようになる。No.8, 9[7] はダム土壌（$d_e=0.0018$ mm，$u=56$，$p=0.36\sim0.47$）である。特に No.9 は圧密状態（$1\sim5.5$ tons/ft^2）にたいする結果であつて，$\lambda=0$（すなわち $d_e=d_t$）となつている。No.10[8] は本邦天然河海砂（$d_e=0.06\sim0.7$ mm，$u=1.4\sim3.1$，$p=0.36\sim0.46$）にたいする結果で，式 (8) がよく合致するようにみえる。No.11[9] は

図—4　諸家の測定にもとづく有効径係数



oil sand ($d_e=0.09\sim0.13$ mm, $u\fallingdotseq1.5$, $p\fallingdotseq0.27$) で λ は 0 に近い。No.12[10] は諸種の混合砂 ($d_e=0.07\sim0.37$ mm, $u=2.6\sim4.4$) である。No.13[11] は 2 割の灼熱減量を含む特殊土壌 ($d_e=0.0046$ mm, $u=2.2$, $p=0.45$ 及び $d_e=0.0078$ mm, $u=4.2$, $p=0.31$) であつて $\lambda<0$ の極端な例となつている。No.14[6] は諸種の砂 ($d_e=0.12\sim0.64$ mm, $u=1.2\sim5.8$, $p=0.35\sim0.495$) である。以上によればおよそ "砂" にあつては，d_e を式 (8) によつて修飾するならば，ほぼ混合層の代表有効径が得られるように考える。

b) 筆者の一滲透式：Darcy 系滲透諸式のうち d_e 型に属するものに Hazen, Terzaghi, Hatch 等諸氏によるものがあり，いずれも均等係数 u は式外におかれ参考のため附記されている。そこで筆者は前述したところからして，混合粒子砂層にたいするものとしてヘーズン型の実用性とツンカー型の信頼性とをとりいれ，u を含む式として次のごときものを試示する。

$$k=c/\eta\cdot f(p)\{(1+\lambda\log u)d_e\}^2 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

あるいは実用的に $\alpha^2=(1+\lambda\log u)^2\fallingdotseq u$ とおけば

$$k\fallingdotseq\beta\, u(0.7+0.03t)\left(\frac{p_0}{1-p}\right)^2 d_e^2\cdots\cdots\cdots(14)'$$

ここに，k はダルシーの滲透係数 cm s^{-1}；c は滲透層内の粒子の形および空隙形に関する実験係数 cm^{-2}g s^{-2}；η は流体の粘性係数 cm^{-1}g s^{-1}；t は温度 ℃；d_e はヘーズンの有効径 cm；p は空隙率；p_0 は有効空隙率であり，式 (14)′ 中の $f(p)$ は便宜上 Zunker 氏のそれに従つた。β は粒子の形の係数 cm^{-1}s^{-1} であつて Terzaghi, Zunker, Kozeny, Donat, 田町等諸家の測定値によつて β の概値をさだめてみると，ガラス球 180～140，円く滑らかな砂 140～100，粗なる砂 70 前後，ガラス粉末 60，凹凸扁平いちじるしい砂 50～30 ないしそれ以下となる。

(2) 粒度曲線の数字的一表現として　粒度曲線は粒子の分散限界が同一でかつ均等係数を等しくしても，中間粒子の配合が変化するにともなつて曲折の形が変化する。粒子の大いさを示すために，細・粗の両限界を附記する法，諸種の代表粒径で表わす法など，また曲線の形を示すために符号や数量で表わす法などが諸家によつて案出されているが，粒度曲線を数字的に表現することは困難な問題となつている。筆者は一つの試案であるが前記の λ を d_e-u に加え，d_e-u-λ のごとく連記して粒度曲線を示してみた。例えば代表的の型と考えるさきの I～V の諸曲線 (図—2 参照) について，この案による場合と他の表現法による場合とを具体的に例示してみると 表—1 のようになる。この表わし方の特長と覚しきところを挙げると，i) 普遍的に用いられている d_e と u とを含んでいること，

表—1　粒度曲線の数字的諸表現の比較

Types of grading Curve	Effective diameters cm×10^{-2}			Method of fineness modulus	Campbell**			Burmister**		Kramer***	Author
	d_e	d_w	d_p*		Diameter-grade designation D (mm)	Grade line deviation (mm)	** Weings Sign	Mean size per-centage	Range of parti-cle (mm)	d_m-M // cm×10^{-2}	d_e-u-λ // cm×10^{-2}
I	0.82	1.21	1.85	0.42	D0.12-G1.7	+0.03	C	0.69	S0.074~G2.36	2.1-0.32	0.82-1.57-2.45
II	0.89	1.98	7.03	1.80	D0.24-G5.7	+17	S	0.57		8.0-0.08	0.89-6.61-1.49
III	1.05	2.63	6.32	2.00	D0.42-G5.0	0	L	0.50		6.8-0.18	1.05-5.65-2.00
IV	1.47	3.00	4.49	1.85	D0.39-G3.3	-0.03	S	0.49		4.7-0.41	1.47-3.01-2.13
V	2.95	6.48	11.59	3.26	D1.33-G5.2	-0.28	K	0.38		13.0-0.40	2.95-5.08-1.68

* Puri's weighted mean diameter, Soil Science, 1939
** Trans. A.S.C.E. No. 104, 1939
*** 安藝皎一，"河相論"

ii) λ と u とによつて d_e を代表有効直径 d_t に結びうること，iii) 土壌の物理的性質をある程度表わしうること；例えば (イ) d_e と u とを同じく λ を異にする土壌においては概して λ の小さいものほど最小粒子群に富んでいる (ロ) λ の小さいものは概して密型 (impervious) であり，大きいものは粗型 (pervious) である。

4. 結　言

土砂の物理的性質を表わすために広く用いられているヘーズンの有効径は特殊の場合を除けばはなはだ不確実のものである。しかし有効径係数 α，比表面係数 λ (いずれも仮称) などを附加するならば確実さが増されるものと考える。この α，λ の扱い方については多分に飛躍的の仮定が含まれ，批判の余地があることと思うのであるが一応それらを使用して滲透式(14)を試示した。また土壌の粒度曲線をヘーズン有効径—均等係数—比表面係数なる一連の数字で表現することを提案してみた。粒度の数字的現示の諸法にはそれぞれ特長があるが，本法は毛管径や粗密型などを想像するのにいくぶん特長があろうかと思われる。

終りに，恩師鶴見一之博士並びに同結城朝恭博士に御助言を載いたことを附記し，深く謝意を表する。

文　献

1) Hazen : Mass. S.B. of H., 24 th Ann. Rept., 1892
2) Krüger : Internat. Mitt. Bodenkunde, Bd. 8, 1918., Zunker : Journal f. Gasbeleuchtung u. Wasserversorgung, 1920., Kozeny : Wasserkraft u. Wasserwirtschaft, 22, 1927
3) 吉田彌七：土木学会誌 17 巻 6 号及び熊本工業会誌 1934
4) Donat : Wasserkraft u. Wasserwirtschaft, 25, 1929
5) 谷藤正三・小川哲夫：建設省土木試験所概報第 6 号，昭 24
6) Terzaghi : "Erdbaumechanik", 1925
7) Taylor : "Fundamentals of Soil Mechanics", P.116, 1950
8) 山崎不二夫：農業土木研究 14 巻 2 号
9) Muskat : "Flow of Homogeneous Fluids", P.15, 1937
10) 物部長穂："水理学"
11) Andrews : Pro. of I.C. on Soil Mech. & Fund. Eng., Vol.1, 1936

(昭.28.12.18)