

巾の拡がる水路における衝撃波について

正員 嶋 祐 之*
准員 堀 川 清 司**

ON THE SHOCK WAVE IN THE EXPANDING CHANNEL

(JSCE. Dec. 1953)

Sukeyuki Shima, C.E. Member, Kiyoshi Horikawa, C.E. Assoc. Member

Synopsis The authors have experimentally studied on the shock wave characteristics caused by amming up the downstream water depth in the gradually expanding channel of super-critical flow.

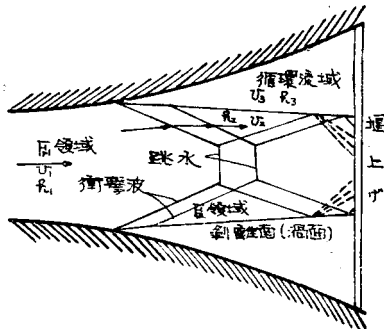
The shock wave of this kind is somewhat different from the ordinary shock wave caused by channel contraction, and presents such a complex phenomena that it is hard to get analytical solution. For this reason, they have tried to obtain the wave angle, the separation angle, and the location of shock waves from the other values determined by the flow conditions such as upstream Froude number and both up and downstream water depth by experiment. Then a certain experimental formula for wave angle and the method for determining its location have been presented in this paper.

要旨 巾の拡がる射流水路の下流端の水位を堰き上げることにより生ずる衝撃波は単に水路の急なせばまりによつて生ずる衝撃波とは異なり、かなり複雑である。本文はかかる現象の解析に資すべく実験を行い、実験式を導きかつあわせて若干の理論的考察を加えたものである。

1. 緒言

射流水路の下流端において水深を堰き上げれば、水深は増加しこの影響が長波の伝播速度で上流側へと伝播するが、ある点までゆくと波は停止して定常波となり、この波が水深の不連続変化である衝撃波を形成する。そのときの流れの状況は図-1並びに写真-1に示すごとくであり、流れは側壁が急にせばめられたときと同様にある角度 θ だけ波面に近く屈折し、流線は

図-1 衝撃波形



側壁から剥離し剥離面と側壁との間に非常に緩やかな循環流の領域を生ずる。なお詳細に観察すると実際に

* 東京大学助教授, 工学部土木教室

**東京大学大学院特別研究生, 工学部土木教室

写真-1



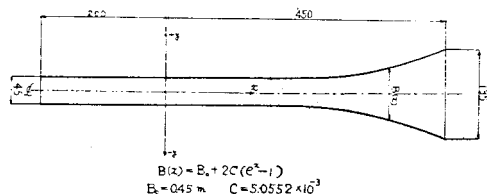
は一つの衝撃波だけでなく、鉛直速度の影響を受けて第二の衝撃波を生じているのが見られるが、第一波に比して小さい。次に左右からの衝撃波の交点では局部的に水深が増加するので波面が碎けて前進し、いわゆる Mach Jump を起しているのが見られる。衝撃波はここで反射され、さらに剥離面において反射波を生じ下流に及んでいる。

そこでまづ剥離点附近の衝撃波の特性を調べ、ついで跳水位置について考察を進めることにする。

2. 剥離点附近の衝撃波の特性 I—実験的考察

本実験には図-2に示すごとく木製水路を用い、底勾配 $i=1/50$ 、流量 $Q=5, 7.5, 10, 12.5, 15$ l/s の5種

図-2 実験水路平面図



$$B(x) = B_1 + 2C(e^{-x} - 1)$$

$$B_1 = 0.45 \text{ m} \quad C = 5.0552 \times 10^{-3}$$

とした。剝離面の位置は静圧ピトー管で、各領域の Froude 数及び水深はピトー管及びポイントゲージによつた。また衝撃波の角度は写真撮影によつて求めた。

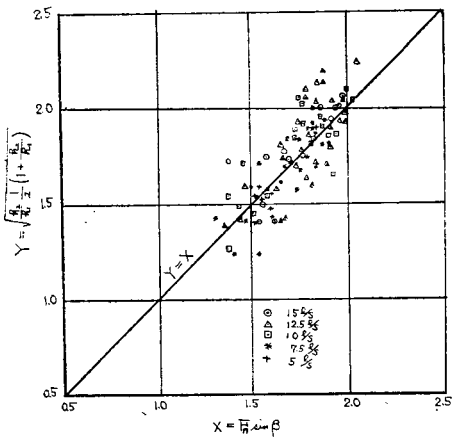
波角 β と衝撃波前後の水深 h_1, h_2 並びに Froude 数 F_{r1} との間には

$$\sin \beta = \frac{1}{F_{r1}} \sqrt{\frac{h_2}{h_1} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{h_2}{h_1}\right)} \dots\dots\dots (1)$$

の関係が成立する¹⁾。この関係がどの程度実験結果に合うか見るために $F_{r1} \sin \beta$ と $\sqrt{\frac{h_2}{h_1} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{h_2}{h_1}\right)}$ との関係を描いたのが図-3 であり、これを見るに大体満足しているとみなしうる。 β はかなりの変動を示し正確な値を決定するのが困難だからである。また θ に関しては連続の条件から

$$\tan \theta = \frac{\tan \beta [1 - (h_1/h_2)]}{1 + (h_1/h_2) \tan^2 \beta} \dots\dots\dots (2)$$

図-3 実測値による $F_{r1} \sin \beta = \sqrt{\frac{h_2}{h_1} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{h_2}{h_1}\right)}$ の検討



を得る。 θ の計算値と実験値とを比較したのが表-1 であり、あまりよい結果を示していないがこれは β, h_2 の測定が困難なこと、 θ_{exp} もあまり信頼できないなどのためである。

表-1 θ_{cal} と θ_{exp} との比較*

Q l/s	右側		左側	
	θ_{cal}	θ_{exp}	θ_{cal}	θ_{exp}
15.0	15°	13°	13°	14°
12.5	13°	14°	9°	14°
10.0	10°	15°	7°	11°
7.5	13°	13°	10°	13°
5.0	13°	15°	9°	12°

* ただし $x=3.70\text{ m}$ から衝撃波が発生せしめた場合

一方現象的に見て上流側の条件 F_{r1}, h_1 及び堰き上げの条件 h_3 とから衝撃波に関する未知量 $F_{r2}, \beta, \theta, h_2$ が求められねばならぬ。しかしながらこれらの諸量間の関係式を解析的に求めることには非常な困難をとまなるものである。そこで循環流域の水深 h_3 を算式に導入するために剝離面の条件として F_{r2} 領域が循環流域に接する際、渦面を通して失われるエネルギーが F_{r2} 領域の運動エネルギーの一部分であると考え、しかも循環流速 v_3 がきわめて小さいことは実験的に知られたのでこれを無視して次のような関係式を予想した。すなわち

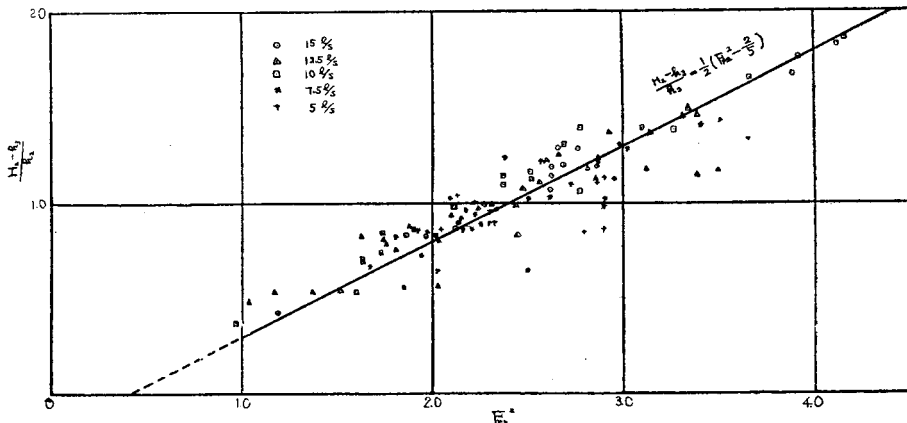
$$H_2 = h_2 + \frac{v_2^2}{2g} = h_3 + c \frac{v_2^2}{2g} \dots\dots\dots (3)$$

そこでこれを無次元化し

$$\frac{H_2 - h_3}{h_2} = c \frac{F_{r2}^2}{2}, \left(\text{ただし } F_{r2}^2 = \frac{v_2^2}{gh_2} \right) \dots\dots (4)$$

このような考えのもとに実験値を整理して $(H_2 - h_3)/h_2$ と F_{r2}^2 との関係を図示すれば図-4 のごとく、ほぼ直線関係を満足していることがわかつた。実験の精度を考慮して簡単な形に書けば

図-4 c の決定



$$\frac{H_2 - h_3}{h_2} = \frac{F_{r2}^2}{2} \left(1 - \frac{2}{5} \frac{1}{F_{r2}^2} \right) \dots\dots\dots(5)$$

となり、従つて

$$c = 1 - \frac{2}{5} \frac{1}{F_{r2}^2} \dots\dots\dots(6)$$

と書けるようである。これを使つて簡単な計算を行い

$$\frac{h_3}{h_2} = 1.2 \dots\dots\dots(7)$$

を得るが、実験結果を示せば表-2 のようになる。ただし 12.5, 10, 7.5 l/s は衝撃波発生位置を種々移動させたものである。すなわち h_3/h_2 はこの水路の条件

表-2 $\left(\frac{h_3}{h_2}\right)_{\text{mean}}$ の値

Ql/s	No.	$\left(\frac{h_3}{h_2}\right)_{\text{mean}}$	Ql/s	No.	$\left(\frac{h_3}{h_2}\right)_{\text{mean}}$	Ql/s	No.	$\left(\frac{h_3}{h_2}\right)_{\text{mean}}$
15		1.14	10	1	1.15	7.5	3	1.23
12.5	1	1.17	"	2	1.12	"	4	1.24
"	2	1.15	"	3	1.18	"	5	1.22
"	3	1.27	7.5	1	1.17			
"	4	1.20	"	2	1.24			

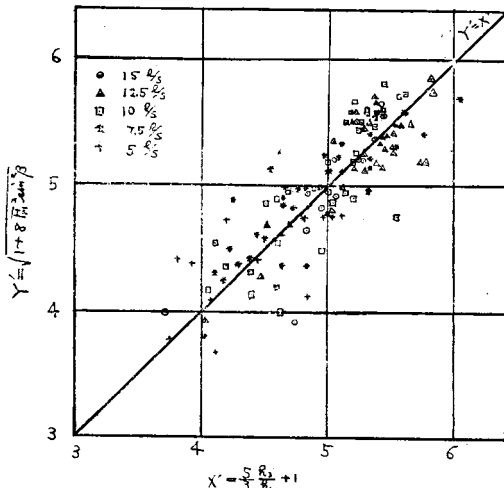
では、流量に関係なくほぼ一定値をとることが明らかになった。そこで (7) を (1) に代入すれば実験式として

$$\frac{h_3}{h_1} = \frac{3}{5} \left\{ \sqrt{1 + 8F_{r1}^2 \sin^2 \beta} - 1 \right\} \dots\dots(8)$$

を得た。実験値につき (8) 式を検討したのが図-5 で衝撃波自身が安定であることより考えてもかなり満足すべき結果が得られたと思う。従つてこれよりきわめて簡単に波角 β を計算し得る。しかしながら (1) 式は循環流域を無視して渦面に側壁を置いたと仮定し

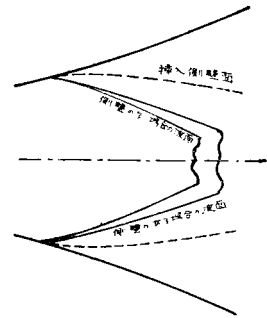
図-5 実験値による $\frac{h_3}{h_1} = \frac{3}{5}$

$\left\{ \sqrt{1 + 8F_{r1}^2 \sin^2 \beta} - 1 \right\}$ の検討



た。すなわち渦面に沿つて θ だけ側壁が急にせよめられた場合に適合するもので我々の場合には近似式に過ぎない。そこで循環流及び渦面の影響を調べるために渦面の形状に側壁を設けて比較したところ図-6 に示すごとく巾の拡がる水路の波角は、巾のせばまる水路の波角よりも、いかなる場合にも大きくなるのが知られた。上記のことがらについて以下に理論的考察を行う。

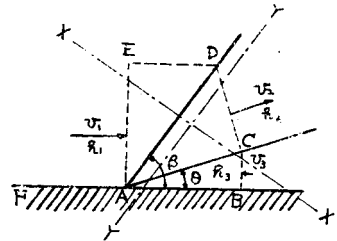
図-6 跳水形状比較図 (Q=10 l/s i=1/50)



3. 剥離点附近の衝撃波の特性 II—理論的考察

図-7 において FAB は側壁, AD は波面, AC は渦面として検査面を ABCDEA にとって X-X, Y-Y 方向の運動量方程式並びに連続の条件式を求めると、

図-7



$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{2} h_1^2 + \frac{\gamma}{g} h_1 v_1^2 \sin^2 \beta &= \frac{\gamma}{2} h_2^2 \sin^2(\beta - \theta) \\ &+ \frac{\gamma}{g} h_2 v_2^2 \sin^2(\beta - \theta) + \frac{\gamma}{2} h_3^2 \cos^2(\beta - \theta) \\ &- \frac{\gamma}{g} h_3 v_3^2 \cos(\beta - \theta) \sin \theta \sin \beta \dots\dots(9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{g} h_1 v_1^2 \sin \beta \cos \beta &= \frac{\gamma}{2} h_2^2 \sin(\beta - \theta) \cos(\beta - \theta) \\ &+ \frac{\gamma}{g} h_2 v_2^2 \sin(\beta - \theta) \cos(\beta - \theta) \\ &- \frac{\gamma}{2} h_3^2 \sin(\beta - \theta) \cos(\beta - \theta) \dots\dots(10) \end{aligned}$$

$$h_1 v_1 \sin \beta + h_3 v_3 \cos(\beta - \theta) \sin \theta = h_2 v_2 \sin(\beta - \theta) \dots\dots(11)$$

ただし g : 重力の加速度, γ : 水の単位容積重量であり、ここで $v_3=0, h_2=h_3$ とおけば (9), (11) はそれぞれ Ippen の式に一致する²⁾。

実験の結果 $v_3 \approx 0$ において差支えないことがわかつているのでこれを代入し、かつ $h_3/h_2 = 1 + \eta$ の形で与えられると仮定すれば次の関係式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{h_1^2}{2} + \frac{h_1}{g} v_1^2 \sin^2 \beta &= \frac{h_2^2}{2} + \frac{h_2}{g} v_2^2 \sin^2(\beta - \theta) \\ + \frac{\eta(2+\eta)}{2} h_2^2 \cos^2(\beta - \theta) &= \frac{h_1}{g} v_1^2 \sin \beta \cos \beta \\ = \left\{ \frac{h_2^2}{g} v_2^2 - \frac{\eta(2+\eta)}{2} h_2^2 \right\} &\sin(\beta - \theta) \cos(\beta - \theta) \quad (12) \\ \frac{v_1 \sin \beta}{v_2 \sin(\beta - \theta)} &= \frac{h_2}{h_1} \\ \frac{h_3}{h_2} &= 1 + \eta \end{aligned}$$

いま h_1, h_3, v_1 を測定しかつ η が既知とすれば未知項 h_2, v_2, β, θ を決定しうる。(12)の第1式及び第3式から

$$\sin \beta = \frac{1}{F_{r1}} \sqrt{\frac{1}{2} \frac{h_2}{h_1} \left\{ \left(1 + \frac{h_2}{h_1}\right) + \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 \right.} \\ \left. \frac{(2\eta + \eta^2) \cos^2(\beta - \theta)}{[(h_2/h_1) - 1]} \right\}} \quad \dots\dots\dots (13)$$

を得る。これを(1)式に比較すれば根号内に補正項が入った形になり(1)式で求めた波角よりも大きい値を与えることが予想される。次に(12)より $\sin^2 \beta$ について解くと

$$\sin^2 \beta = \frac{\alpha \left[2A - 2(1-H^2) - \alpha(1-H) \right] + \sqrt{\{2A - 2(1-H^2) + \alpha(1-H)\}^2 + 8\xi(1-H)(1+H-2A)}}{8A\{1-H\}} \\ \frac{2(1-H^2) + \alpha(1-H)}{(A-\alpha) + \xi} \quad \dots\dots\dots (14)$$

ただし $\frac{h_1}{h_2} = H, \frac{\eta(2+\eta)}{2} = \xi, F_{r1}^2 H^2 = A, H^2 - 1 - 2\xi = -\alpha$ である(14)において η が既知ならば

$$H = \frac{h_1}{h_2} = (1+\eta) \frac{h_1}{h_3} \text{ を代入すれば} \\ \sin \beta = G \left(F_{r1}, \frac{h_1}{h_3}; \eta \right) \quad \dots\dots\dots (15)$$

となり上流側の F_{r1}, h_1 , 下流側の堰き上げによる水深 h_3 を用いて波角 β を求める式が得られた。(14)式において $\eta \rightarrow 0$ とすれば明らかに(1)式と一致する。さて我々の取扱つた場合には $\eta = 0.2$ となつたのであるから厳密には

$$\sin \beta = G \left(F_{r1}, \frac{h_1}{h_3}; 0.2 \right) \quad \dots\dots\dots (16)$$

として与えるべきであるが、これはかなり複雑であり、従つてこの代りに(8)式あるいはこれを書き直した

$$\sin \beta = \frac{1}{F_{r1}} \sqrt{\frac{1}{2} \frac{1}{1.2} \left(\frac{h_3}{h_1} \right) \left\{ 1 + \frac{1}{1.2} \left(\frac{h_3}{h_1} \right) \right\}} \quad \dots\dots\dots (17)$$

で波角を求めても実用的には差支えない。従つて一般には η を実験的に知れば

$$\sin \beta = \frac{1}{F_{r1}} \sqrt{\frac{1}{2} \frac{1}{(1+\eta)} \left(\frac{h_3}{h_1} \right) \left\{ 1 + \frac{1}{(1+\eta)} \left(\frac{h_3}{h_1} \right) \right\}} \quad \dots\dots\dots (18)$$

で波角を求めることができるのではないかと考えられる。

4. 跳水位置に関する一考察

空気力学でよく知られている Laval 管の最小断面以降の漸次的な拡大状態は我々の取扱つている拡大水路と似通つているので、空気と水との相似性を考慮して跳水位置についての一考察を試みた。

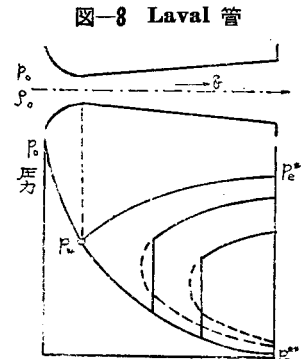
いま Laval 管が大きな容器に連なつているとすれば、そこでは流速は0となる。容器並びに任意断面における圧力、密度、音速及び流速を各 $p_0, \rho_0, c_0, q_0 = 0$; p, ρ, c, q で表わすとすれば、

$$\begin{aligned} q &= \sqrt{\frac{2}{\kappa-1} c_0^2 \left\{ 1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right\}} \\ \rho q &= \rho_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{\kappa}} \sqrt{\frac{2 c_0}{\kappa-1} \left\{ 1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right\}} \quad \dots\dots\dots (19) \\ M &= \frac{q}{c} = \sqrt{\frac{2}{\kappa-1} \left\{ \left(\frac{p}{p_0} \right)^{-\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right\}} \\ \rho q A &= (\rho q)_{\text{exit}} A_{\text{exit}} \end{aligned}$$

である。ただし A : 断面積, M : Mach 数, $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$

比熱比, である。

図-8 に示すごとく排出断面の圧力 P_{exit} が P_e^* と P_e^{**} との間にあるときは最小断面の下流で圧力が不連続的に増加し supersonic から subsonic に飛躍的に変化する³⁾。



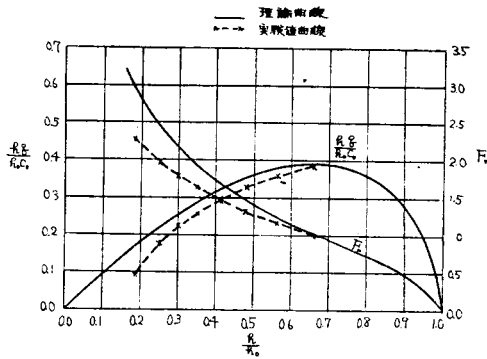
この性質を水の場合に適用するために、空気と水の相似性により $\rho \rightarrow h, \kappa = 2.0, c = \text{波速}$ とすればよい⁴⁾。従つて水路巾を b とすれば(19)式に対応して(20)式を得る。すなわち

$$\begin{aligned} q &= c_0 \sqrt{2 \left[1 - (h/h_0) \right]} \\ h q &= c_0 h_0 \frac{h}{h_0} \sqrt{2 \left[1 - (h/h_0) \right]} \\ F_{r1} &= \frac{q}{c} = \sqrt{2 \frac{[1 - (h/h_0)]}{h/h_0}} \\ h q b &= (h q)_{\text{exit}} b_{\text{exit}} \quad \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

ただし F_r は Froude 数である。図-9 に h/h_0 と $q h/c_0 h_0$ 及び F_r との関係を示す。

Laval 管においては最小断面にて $M=1$ となるが、我々の場合必ずしも最小断面 $x=0$ で $F_r=1$ とは限らない。そこで $F_r=1$ の点を最小断面に対応す

図-9 $\frac{h}{h_0} \sim F_r, \frac{h}{h_0} \sim \frac{hQ}{h_0 c_0}$ 曲線



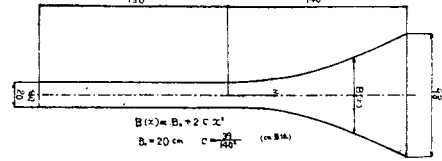
る点とし、それより拡大する部分について考えることにする。よつて $F_r=1$ となる点の水深を h_0 とす*

* るとき

$$\frac{h_0}{h_0} = \frac{2}{3} \dots\dots\dots (21)$$

となる。

図-10 実験水路平面図



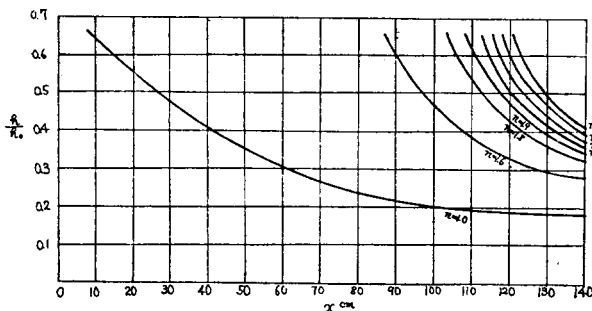
そこで図-10 に示すとき水路において $i=0, Q=3, 4, 5 \text{ l/s}$ の3とおりについて実験した。一例として $Q=4 \text{ l/s}$ のときの $(\frac{h}{h_0})_{cal}$ と $(\frac{h}{h_0})_{exp}$ とを示すと表-3のごとし、いずれの場合も実験値の方が大きく**

表-3 $Q=4 \text{ l/s}, i=0$ の $(\frac{h}{h_0})_{cal}$ と $(\frac{h}{h_0})_{exp}$ の比較

$x \text{ cm}$	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$(\frac{h}{h_0})_{cal}$	0.585	0.508	0.450	0.371	0.316	0.275	0.235	0.200	0.165	0.155
$(\frac{h}{h_0})_{exp}$	0.655	0.556	0.477	0.411	0.351	0.310	0.265	0.234	0.227	0.220

**なつているが、これは実験誤差粘性及び乱れなどの影響によると推定される。なお図-9 に実験値をあわせ記したのがかなりの相異が認められる。よつて $Q=3, 4, 5 \text{ l/s}$ の平均をとつて $h/h_0, x$ の関係を求め、さらに $x=140 \text{ cm}$ の $(\frac{h}{h_0})_{mean} = 0.18$ の値の $n=1.6, 1.8, 1.9, 2.0, 2.1, 2.2, 2.3$ 倍にしたときの水路内の h/h_0 の分布を (20) 式の第2, 第4式とから、跳水によるエネルギー損失を小さいとみなして求め 図-11 に示した。次に跳水位置においてはほぼ $F_r=1$ の関係を

図-11 n を媒介変数とした $h/h_0 \sim x$ 曲線



満足するので $\frac{h}{h_0} = \frac{2}{3}$ となることが推定される。以上のような考えにより各の下流端を堰き上げて $x=140 \text{ cm}$ における水深の倍率 $n = \frac{h_2}{h_1}$ を求め、その曲線の

$\frac{h}{h_0} = \frac{2}{3}$ に対応する x を読めば跳水位置が求められるはずである。表-4 に写真から判定した位置 x_{exp} と図より求めた x とを示してある。以上の取扱いは必ずしも厳密とは云えないが非常に簡単な計算によつて、かなり満足すべき結果を得ている。こ

表-4 跳水位置の比較

$Q \text{ l/s}$	$n = \frac{h_2}{h_1}$	$x \text{ cm}$	$x_{exp} \text{ cm}$
5	2.20	118	120
4	2.23	118	115
3	2.30	120	105

れによると流量の大きいほど一致しているが、これは跳水が大きく形成されるからであると推定される。

5. 結語

本文は実験結果を中心に巾の拡がる水路の衝撃波の特性についてその一端を解析し得たに過ぎず、また解析にあつてもなお検討を要する点が多い。得られた結果をまとめれば、

(1) 剝離点附近の衝撃波については、 $h_2/h_1 = 1 + \eta$ とすれば

$$\sin \beta = \frac{1}{F_{r1}} \sqrt{\frac{1}{2} \frac{1}{(1+\eta)} \frac{h_3}{h_1} \left\{ 1 + \frac{1}{(1+\eta)} \frac{h_3}{h_1} \right\}}$$

で与えられる。ただし本実験においては $\eta=0.2$ の結果を得た。

(2) Laval 管の相似性を考慮して跳水位置を大略決定し得た。

本研究は文部省科学研究費による研究成果の一部である。なお本研究にあたり終始御指導を賜わった東京大学教授本間博士に厚く御礼を申し上げるとともに、協力された大学院学生安守漢君並びに運輸技術研究所堀口孝男君に感謝する次第である。

参 考 文 献

- 1) "High-velocity flow in open channels ; a symposium". Proc. of A.S.C.E. 1949, Nov. p 1296
- 2) 同上 p 1295
- 3) 谷 一郎：流れ学, p 192 ; 藤本武助：応用流体力学, p 268
- 4) 藤本武助：応用流体力学, p 303

(昭.28.7.24)

水平力をうけた井筒の安定計算について

正 員 池 原 武 一 郎*

准 員 横 山 章**

THE STABILITY OF THE WELL-FOUNDATION UNDER THE LATERAL FORCE

(JSCE Dec. 1953)

Takeichirō Ikehara, C.E. Member, Akira Yokoyama, C.E. Assoc. Member

Synopsis We have calculated the stability of the Well-foundation generally using the formula by Dr. Mononobe. Really at the case of the deep, long Well-foundation Dr. Mononobe's expression may be correct, but contrarily at the case of the shallow, short Well-foundation, it may be better to calculate the stability considering the deviation of the resultant of the reaction at the bottom.

In this paper, reaction-coefficient is defined as a measure of the flexibility of the ground, and is assumed to be propotional to the depth of the ground. We assume that the Well is a rigid body, and calculate the ground reaction caused by the rotation of the Well.

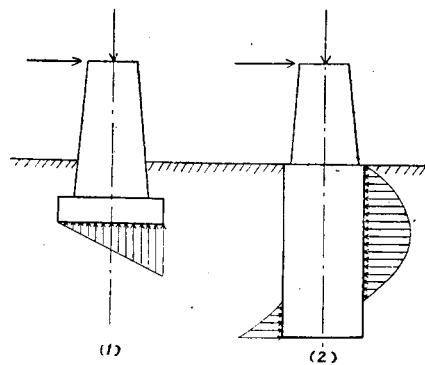
Owing to this calculation, the depth of the Well-foundation can be shallower than that of Dr. Mononobe's expression.

要旨 従来井筒の水平力に対する安定計算については、ほとんど物部博士の式が用いられている。長大井筒の場合はこれでよいが、短い井筒の場合は基礎底面反力のかたよりを考慮して水平力に対する安定計算を行つた方がよいと考える。基礎地盤は井筒の根入れに比例した反力係数 K をもつものとして、井筒を剛体と考え、その回転によつて生ずる地盤反力を計算した。その結果物部式に比較して、井筒の短い場合は根入長さをかなり短かくとつてもよいこととなる。

1. 緒 言

従来橋脚の設計にあつて水平力に対する安定を論ずる場合は橋脚底面の反力のかたよりによつて、水平力によるモーメントに耐え得るか否かを検討している(図-1 (1))。しかし井筒となると従来広く用いられて来た物部博士の式を採用し、図-1 の (2) のように水平力によるモーメントに抵抗するものとしては、

図-1



井筒の側面に作用する受働土圧のみを考えている。井筒基礎を用いるような地盤の所は多く支持力不足の所であるので、井筒は支持力を得るために長大なものとなり、この場合には物部博士の式も妥当なものと考えられる。しかし支持力は充分であるが洗掘その他を考へて井筒基礎を用いる場合も多い。ことに砂利層ある

* 日本国有鉄道, 建設部工事課

** 同 上