

報 文

勾配及び摩擦抵抗を考慮した超波速流の研究

正 員 嶋 祐 之*

ON THE STUDY OF SUPER-CRITICAL FLOW WHEN THE EFFECTS OF BED SLOPE AND FLUID RESISTANCE ARE CONSIDERED

(JSCE, Nov. 1953)

Sukeyuki Shima, C.E. Member

Synopsis Two kinds of methods for solving the super-critical flow taking place in actual open channel with bed slope and fluid resistance have been reported.

The former method is the application of characteristic theory of simultaneous partial differential equations, by which the transformation of hodograph plane to physical plane can be completed. The latter is based upon the method proposed by Kármán, but is more rigorously considered about the effects of slope and resistance both in momentum and energy equations. Then it has been concluded that the actual depth is less than the depth obtained by Kármán's method, if $i_c - i/F^2$ is positive, and vice versa, where i_c is critical slope, i bed slope, and F Froude number.

要 旨 勾配並びに摩擦抵抗のある水路を流れる超波速流の運動を解析する2つの方法を提示した。

最初の方法は連立偏微分方程式に関する特有帯の理論を応用したもので、この方法により速度面と物理面との間の特有曲線の写像が完結されることを示した。

次の方法は Kármán の提示した方法に基づくものであるが、勾配及び摩擦の影響をさらに厳密に運動量方程式並びにエネルギー方程式中で考慮したものである。しかして実際の水深は勾配並びに摩擦のない流れとして導かれた Kármán の水深より $i_c - i/F^2$ の正負に応じてそれぞれ小さくなつたり大きくなつたりすることが結論された。ただし i_c は限界勾配、 i は底勾配、 F は Froude 数である。

1. 緒 言

開水路における超波速流の性質は物理的には気体の超音速流の性質と類似していることから、すでに Riabouchinsky, Prandtl に始まり Kármán, Preiswerk により拡張せられた解析的方法を水理学の分野に導入しようとする試みが多い。なかんずく Knapp, Ippen, H. Rouse 等の研究¹⁾により直接水理学の分野に大きな成果がもたらされている。

本論文もこの種の流れに沿うものであるが、従来の方法はすべて水路の勾配及び摩擦抵抗を無視するかあるいはちようど勾配と摩擦抵抗とが釣合つた平衡状態のものとして解析を行つている。そこで本論文では水

路の境界条件が流れに微小攪乱波を伝播せしめる範囲内で問題を取扱い、このような超波速流に勾配並びに摩擦抵抗の及ぼす影響を中心として考察を行うものである。

2. 特有帯理論による解法²⁾

超波速流の流線方向の流速を q 、その方向にとつた長さを s 、また水深及び径深を h 及び R とする。一方水路は x 方向に i なる主傾斜をなし、摩擦抵抗係数を f' とし流速の自乗に比例する抵抗を受けるものとすれば、流線に沿う Bernoulli の方程式は周知のごとく

$$h + \frac{q^2}{2g} - \int i dx + \int \frac{f' q^2}{2gR} ds = \text{const.} \quad \dots\dots\dots (1)$$

(1) を x, y について微分すればそれぞれの方向の運動方程式

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} &= gi - \frac{c^2}{h} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{f' q^2}{2h} \cos \theta \\ u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{c^2}{h} \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{f' q^2}{2h} \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

をうる。ただし u, v は x, y 方向の流速であり

$$\left. \begin{aligned} q^2 &= u^2 + v^2, & c &= \sqrt{gh} = \text{波速} \\ \cos \theta &= \frac{u}{q}, & \sin \theta &= \frac{v}{q} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (3)$$

また水路巾が水深に比して大きいとし

$$R = h \quad \text{とする。}$$

一方連続の方程式は

$$\frac{\partial (hu)}{\partial x} + \frac{\partial (hv)}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

* 東京大学助教授、工学部土木工学教室

なる故 (2), (3), (4) より θ 並びに $\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}$ を消去すれば

$$(c^2 - u^2) \frac{\partial u}{\partial x} - uv \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + (c^2 - v^2) \frac{\partial v}{\partial y} + gui - f' \frac{gq^3}{2c^2} = 0 \quad \dots\dots(5)$$

さらに運動が非回転的であれば

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots(6)$$

従つて問題は u, v を従属変数, x, y を独立変数とする上記の連立偏微分方程式を解くことに帰着する。よつて以下連立偏微分方程式の特有帯の理論に従つて解を導く。

i) 特有方向 特有方向を α, β とし x, y 平面における特有方向の傾斜 λ_+, λ_- を求めれば

$$\left. \begin{aligned} \lambda_+ &= \frac{-uv + c\sqrt{u^2 + v^2 - c^2}}{c^2 - u^2} \\ \lambda_- &= \frac{-uv - c\sqrt{u^2 + v^2 - c^2}}{c^2 - u^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots(7)$$

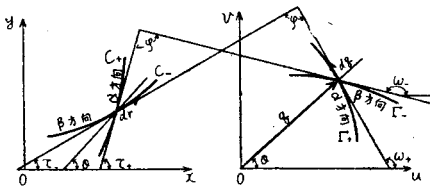
すなわち $u^2 + v^2 = q^2 > c^2$ の時, 換言すれば超波速流の時のみ λ_+, λ_- の実の方向が得られ, 物理面における特有曲線も 2本の実の分枝が得られて双曲型の特性を有する。さらにこれらの λ_+, λ_- が勾配及び摩擦のない場合と全く同型式となることは注目されるべきことと思われる。

ii) 特有連立偏微分方程式より λ_+, λ_- を消去 特有連立偏微分方程式より λ_+, λ_- を消去した式は

$$\left. \begin{aligned} u_\alpha x_\beta + v_\alpha y_\beta + \frac{1}{c^2 - u^2} \left(gui - f' \frac{gq^3}{2c^2} \right) x_\alpha x_\beta &= 0 \\ u_\beta x_\alpha + v_\beta x_\alpha + \frac{1}{c^2 - u^2} \left(gui - f' \frac{gq^3}{2c^2} \right) x_\alpha x_\beta &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(8)$$

となるので 図-1 において速度面における α 方向

図-1 物理面と速度面との対応



の特有曲線を Γ_+ , β 方向の特有曲線を Γ_- , 物理面のそれをそれぞれ C_+, C_- で表わす時, 上式より C_- と Γ_+, C_+ と Γ_- がそれぞれ相交わる角は, ともに等しいことが示され, $i, f' = 0$ の時には直交することが知られる。

iii) 特有条件の展開 特有条件を展開して Γ 特有

曲線方向 σ を線素片の直角成分 du, dv と, C 特有曲線の直角成分 d_x, d_y を使つて書き表わすと

$$(c^2 - u^2)(du)^2 - 2uvdudv + (c^2 - v^2)(dv)^2 + \left(gui - \frac{f'gq^3}{2c^2} \right) (dudx + dxdy) = 0 \quad \dots\dots(9)$$

を得る。左辺第4項は物理面の Vector を \vec{dr} とし, また速度面の Vector を \vec{dq} として両 Vector の交角を φ とする時

$$dudx + dxdy = \vec{dr} \cdot \vec{dq} \cos \varphi \quad \dots\dots(10)$$

となり, $i, f' = 0$ の時には $\varphi = \pi/2$ となることは前述のとおりであるが, かかる際は (9) 式は速度面においてただちに積分できて, 特有曲線として周知の Epicycloid 曲線を得る。一般の場合の交角 φ の値は (8) の第1式の両辺に $\frac{1}{\sqrt{u\alpha^2 + v\alpha^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x\beta^2 + y\beta^2}}$ を

掛けまた 図-1 より

$$\cos \omega_+ = \frac{u\alpha}{\sqrt{u\alpha^2 + v\alpha^2}}; \quad \cos \tau_- = \frac{x\beta}{\sqrt{x\beta^2 + y\beta^2}}$$

なることを考慮すれば

$$\begin{aligned} &\cos \tau_- \cdot \cos \omega_+ + \sin \tau_- \cdot \sin \omega_+ \\ &= -\frac{gui - f' \frac{gq^3}{2c^2}}{c^2 - u^2} \left(\frac{dx}{du} \right)_\alpha \cos \tau_- \cdot \cos \omega_+ \end{aligned}$$

しかるに

$$\cos \varphi = \cos(\omega_+ - \tau_-)$$

$$\therefore \cot \varphi = \frac{b \frac{\sin 2\tau_-}{2}}{b \cos^2 \tau_- - 1} \quad \dots\dots(11)$$

$$\text{ただし } b = -\frac{g \left(ui - f' \frac{q^3}{2c^2} \right)}{c^2 - u^2} \left(\frac{dx}{du} \right)_\alpha$$

(11) 式が交角 φ の満足すべき式となる。いま現象が境界条件の変化による流れの屈折の方が勾配, 摩擦の影響に比べて比較的大きい場合には

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \varepsilon; \quad \frac{\pi}{2} \gg \varepsilon$$

と置いて (11) へ代入すれば

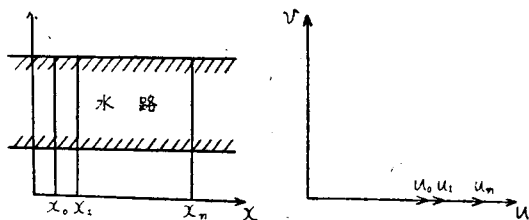
$$\begin{aligned} \varepsilon &\approx b \frac{\sin 2\tau_-}{2} \\ &= \frac{g \left(ui - f' \frac{q^3}{2c^2} \right)}{u^2 - c^2} \left(\frac{dx}{du} \right)_\alpha \frac{\sin 2\tau_-}{2} \end{aligned} \quad (12)$$

従つて (12) より求められる補正角 ε を用いればこのような場合の $\pi/2$ からの修正量がでてくる。

(11) あるいは (12) より交角 φ の値は τ_- 及び $\left(\frac{dx}{du} \right)_\alpha$ の値が知られれば決定されることになる。

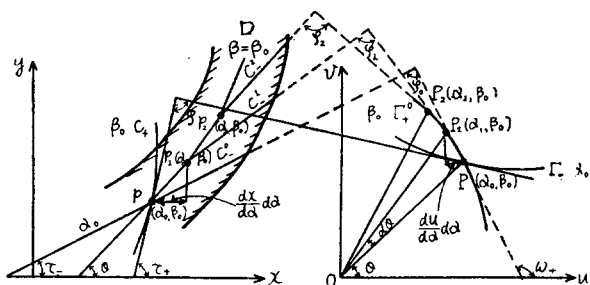
iv) 物理面と速度面との写像関係

図-2 一様水路の対応関係



a) 一様巾水路の不等流: $i, f'=0$ の時は等流であるから物理面の水路全域が速度面の1点に対応し $i, f' \neq 0$ の時には 図-2 に示すとき水路であれば $x = x_0, x_1, \dots, x_n$ の線分にはそれぞれ速度面の

図-3 単波の対応関係



$(u_0, 0), (u_1, 0), \dots, (u_n, 0)$ の各点に対応することになる。

b) 単波: 図-3 に示すごとく物理面の各点 P, P_1, P_2, \dots に従つて水路の側壁が変化する場合に水路の側壁の近傍について写像関係を求める。

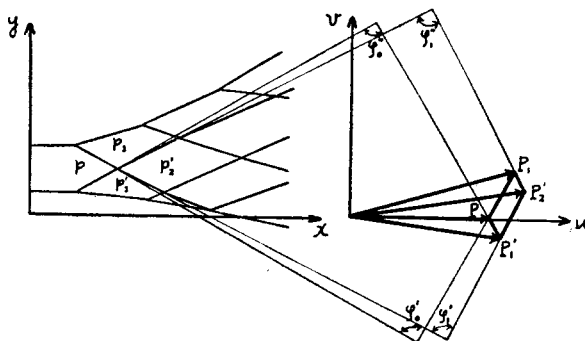
このような場合には側壁の曲り方により例えば C_- に相当する攪乱波のみ現われるのであつて C_+ は無関係であることから単波と呼ばれる。p 点の速度面における対応点を P とし P を通る特有曲線 Γ_+^θ がもし描けたとすれば単波であることから Γ_+^θ の物理面への写像は P, P_1, P_2, \dots を含む一定領域 D に対応する。すなわち (p, P) の α, β の値を α_0, β_0 とすれば側壁附近の領域 D では α は変化するが β は一定値 β_0 である。このような場合の写像方法は p 点の水深流速並びに方向がわかつていればただちに (7) から C_-^θ の方向が決定され、かつまた速度面の P を通る Γ_+^θ の切線と C_-^θ との交角が θ であることから逆に P 点を通り (11) あるいは (12) を満足する θ_0 をもつて C_-^θ と交わるような線を引く。つきに p_1 を p に比べて $d\theta$ だけ側壁の角変化した点とすれば上述の線と速度面で $\theta + d\theta$ なる径線との交点として P_1 を求める。

かくすれば P_1 は C_-^θ なる微少攪乱波を流れが通過した後の p_1 点の流れの状態すなわち流速、方向を示すことになる。従つて p_1 から出る $C_-^{\theta_1}$ の方向が決るので以下順次同様の手順を施せば単波の領域の写像を完結せしめることができる。ただし交角 θ を求めるための (11), (12) 式には τ_- と $\left(\frac{dx}{du}\right)_\alpha$ とが含まれるのであるが τ_- は C_- と x 軸とのなす角ゆえ (7) より求められるけれども $\left(\frac{dx}{du}\right)_\alpha$ の意味は 図-3 に示すごときものであつてあらかじめ知ることができない。そこで第1近似としては $i, f=0$ の際の Epicycloid 曲線の値を用いて $\left(\frac{dx}{du}\right)_\alpha$ の値を求めこれを用いてまづ PP_1 を作図し、求められた図形に対する $\left(\frac{dx}{du}\right)_\alpha$ の値をつぎに用いれば操作の回数に従つて近似度を次第に高めることができる。

また (12) に注目すれば、かような水路の $d\theta$ 区間では ε の値の正負に従つて $f'=0$ の場合の流速よりもそれぞれ大きくなつたり小さくなつたりすることがわかる。

c) 単波相互の干渉: 2本の単波が交叉する場合、すなわち最初の単波が不等流の領域と接する線上あるいは対岸の側壁より出た単波相互が交わる領域での写像関係を求める。このような場合には相互の干渉が行われるが2本の単波により分たれた4領域をそれぞれ網目を十分に細かいものとすれば4点で対応させられ、このようにした時3点の流れの状態がわかれば他の1点の状態が知られる。例えば 図-4 で p, p_1, p_1' の速度面における対応点 P, P_1, P_1' が知られていればやはり (7) より

図-4 単波相互の干渉



交叉後の単波の方向が引けるのでそれぞれ P_1, P_1' を通る直線がこれらの線と交わる角 θ_1', θ_1'' が (11) ないし (12) を満足するように引き、それらの交点として第4の点 P_2' を求める。この時も $\left(\frac{dx}{du}\right)_{\alpha, \beta}$ の値

は未知、しかも屈折後の流線の方向も未知であるので第1近似には前と同様に $i, f' = 0$ の時の $\left(\frac{dx}{du}\right)_{\alpha, \beta}$ の値を採用して逐次誤差を少なくさせてゆかなければならない。

要するに水路内を物理的に考察すれば上記の不等流簡単波及び簡単波相互の干渉する領域に分類されるか a), b), c) 3種類の写像法を併用することにより水路全域をくまなく写像し、流れの状態すなわち流速、流向、及び水深等をことごとく知ることができる。

3. Kármán の方法に従う解法³⁾

前述の方法は理論的にみて厳密かつ包括的なものであり水路の全域にわたって特有曲線の網目を完成してゆくことにより全域の解を図式的に求めてゆくことができるものであるが、実用計算ともなればいささか複雑すぎるという欠点がある。そこで近似的なものであつてもただちに必要とする地点の流れの状態が数式的に求められれば好都合である。もちろん基礎方程式が non-linear であつて双曲型であることから、流れの状態を解析的に求めることははなはだ困難なことであるが応用方面から云えばまづ第一に必要なものは壁側に沿う水深や流速である。

そこで側壁に沿う水深、流速について考慮することとし、しかも対岸の側壁から伝播される攪乱波の及ぼされない簡単波の領域に対しては、以下に述べるごとく解析的方法が成立することを示す。さらに対岸の攪乱波の影響を受けて後の側壁の流況は、もはや特有曲線法以外には厳密に求められないのであるが、この種波動方程式の解の性質さえある程度知れば、そのような領域における解もほぼ近似的にはあるが推定されぬこともない。

また簡単波領域の側壁に沿う水深流速をこの方法で知り、側壁の各点より Mach line をだしその後の各 Mach line の交叉や屈折には $i', f' = 0$ とした Epycloid 曲線を利用して干渉状態を調べても前述の特有曲線に対する近似解としてかなりの精度も予想され、かつ計算も簡単化することもできると思われる。

なお本法は Kármán の方法に従つて側壁よりでる微小攪乱波を通じての勾配及び摩擦抵抗を考慮した運動量方程式とエネルギー方程式とを連立せしめて解を導くものである。

1) 解の誘導

- 水路の条件: ① 側壁の曲線形 $y = ax^n + b \dots (13)$
- ② x 方向に i なる主傾斜 $\dots (14)$
- ③ 抵抗法則 $v = C\sqrt{RI} \dots (15)$

ただし $C^2 = \frac{2g}{f'} = \text{Chézy の定数}$

図-5 において任意の微小攪乱波を挟んだ微小4辺

図-5 Mach 波を通過する流況

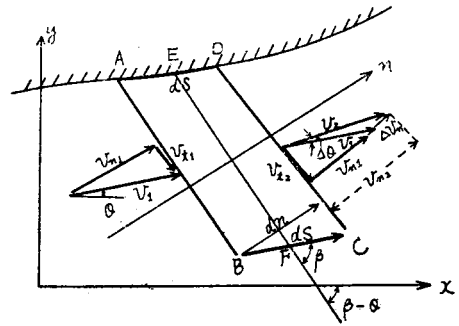
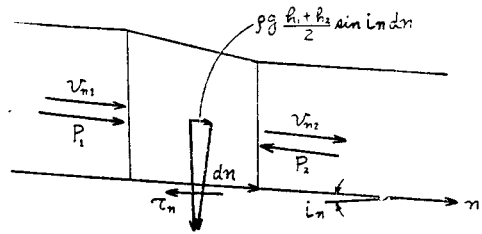


図-6 n 方向の流れ断面



形 ABCD を取出し AD と Mach 波とのなす角を β とし $AD = \Delta s$, Mach 波に垂直に Δn とすれば AB より v_1 なる流速で4辺形内に入つてきた流れは Mach 波を過つて CD を通過する際には v_2 なる流速で $\Delta \theta$ だけ屈折してでてゆくことになる。

つきに Mach 波に垂直な方向に水面を切つて考え、その方向の流速を v_{n1}, v_{n2} 勾配を i_n , 摩擦力を τ_n , 水圧を P_1, P_2 とする。

そこで Δn 区間の水深の増分を Δh 流速の増分を Δv_n としてこの方向に対する運動量方程式を求めれば次のごとくになる。

$$\begin{aligned} & \rho h_1 v_{n1} \cos i_n v_{n1} + \frac{\rho g h_1^2}{2} \cos i_n \\ & = \rho h_2 v_{n2} \cos i_n v_{n2} + \frac{\rho g h_2^2}{2} \cos i_n \\ & + \left(\tau_n - \rho g \frac{h_1 + h_2}{2} \sin i_n \right) \Delta n \end{aligned}$$

上式を整頓しかつ $\sin i_n \approx i_n; \cos i_n \approx 1$ とすれば

$$\Delta h + \frac{v_{n1}}{g} \Delta v_n = \left(i_n - \frac{\tau_n}{\rho g h} \right) \Delta n \dots (16)$$

ただし ρ は水の密度であり

$$\Delta h = h_2 - h_1; \Delta v_n = v_{n2} - v_{n1}$$

ここで n 方向の諸量をそれぞれ既知の方向の諸量に

直すため 図-5 を参照すれば

$$\begin{aligned} i_n &= i \cos \left\{ \frac{\pi}{2} - (\beta - \theta) \right\} = i \sin(\beta - \theta) \\ dn &= ds \cos \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) = ds \sin \beta \\ \tau_n &= \tau \cos \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) = \tau \sin \beta \end{aligned} \dots (17)$$

また Chézy の法則より

$$\frac{\tau}{\rho gh} = \frac{v^2}{c^2 h}$$

側壁の条件 (13) より

$$ds = \frac{\sec^2 \theta}{na} d\theta$$

図-5 より $v_{n1} \cdot dv_n = v^2 \tan \beta \cdot d\theta$

(17), (18) を (16) に代入すれば

$$-\frac{dh}{d\theta} = \frac{v^2}{g} \tan \beta + \left\{ \frac{v^2}{c^2 h} \sin \beta - i \sin(\beta - \theta) \right\} \frac{\sin \beta \sec^3 \theta}{na} \dots\dots\dots(19)$$

一方 Mach 角に対する関係式は

$$\tan \beta = \frac{\sqrt{gh}}{\sqrt{v^2 - gh}}; \quad \sin \beta = \frac{\sqrt{gh}}{v} \dots\dots\dots(20)$$

また Bernoulli の方程式は

$$\frac{v^2}{2g} + h = H_0 + \int_0^\theta \left(i \cos \theta - \frac{v^2}{c^2 h} \right) \frac{\sec^3 \theta}{na} d\theta$$

あるいは無次元化すれば

$$\bar{V}^2 + \bar{h} = 1 + \kappa \int_0^\theta \left(\cos \theta - 2\nu \frac{\bar{V}^2}{\bar{h}} \right) \sec^3 \theta d\theta = 1 + I \dots\dots\dots(21)$$

ただし

$$\bar{V} = \frac{v}{\sqrt{2gH_0}}; \quad \bar{h} = \frac{h}{H_0}; \quad 2 \frac{\bar{V}^2}{\bar{h}} = F^2$$

$$\kappa = \frac{i}{naH_0}; \quad \nu = \frac{g}{c^2 i} = \frac{i_c}{i} \dots\dots\dots(22)$$

従つて F は Froude 数, i_c は限界勾配を表わすものとすれば κ は曲率に対する勾配の, ν は勾配に対する摩擦の影響を示す Parameter となる。

(20), (21) より (22) を用いて (19) の β , v を消去すれば

$$-\frac{d\bar{h}}{d\theta} = \frac{2\{(1+I)-\bar{h}\}\sqrt{\bar{h}}}{\sqrt{2(1+I)-3\bar{h}}} + \left[\nu + \left(\sin \theta \frac{\sqrt{2(1+I)-\bar{h}}}{\sqrt{\bar{h}}} \right)^* \right. \\ \left. \frac{dF^2}{d\theta} = \frac{F^2(F^2+2)}{\sqrt{F^2-1}} + \frac{\kappa \left\{ \nu \left(1 - \frac{F^2}{2} \right) + \frac{F^2+2}{2F^2} \sqrt{F^2-1} \sin \theta + \frac{F^2-2}{2F^2} \cos \theta \right\} (F^2+2) \sec^3 \theta}{1 + \kappa \int_0^\theta (\cos \theta - \nu F^2) \sec^3 \theta \cdot d\theta} \dots\dots\dots(24)$$

つても (23) と (21) とを連立せしめ最初 (23) において $I=0$ として積分を行い, 得られた \bar{h}_0, \bar{V}_0 を (21) に代入して I_1 を求め, この I_1 を (23) に代入して第 2 近似の \bar{h}_1, \bar{V}_1 を求めてゆくという方法が考えられる。しかしながらこの方法もかなり労力を要することになるので, つぎのごとき方法を考へてみた。すなわち (23) を書き直せば

$$* -\cos \theta \left) \frac{\bar{h}}{2\{(1+I)-\bar{h}\}} \right] \kappa \sec^3 \theta \dots\dots\dots(23)$$

と書き直すことができる。

しかしながら I の中になお v が入っているの未だ \bar{h} を従属変数, θ を独立変数とした完全な微分方程式の型にはなっていない。

a) 摩擦抵抗が無視できる場合: $\nu=0$ であれば (21) より $I = \kappa \tan \theta$

となるので (23) に代入すれば完全に $-\frac{d\bar{h}}{d\theta} = F'(\bar{h}, \theta, \kappa)$ なる形式の微分方程式が基本式となりこれを積分して側壁に沿う任意点の水深を求めることができる。

b) 摩擦及び勾配ともに考慮する場合: この場合には上のごとき形式の微分方程式に帰着できないので (21) を Froude 数を用いて変形すれば

$$\bar{h} \left(\frac{F^2}{2} + 1 \right) = 1 + \kappa \int_0^\theta (\cos \theta - \nu F^2) \sec^3 \theta d\theta$$

$$\therefore -\frac{d\bar{h}}{d\theta} = \frac{\bar{h} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{F^2}{2} \right) + \kappa (\nu F^2 - \cos \theta) \sec^3 \theta}{\frac{F^2}{2} + 1}$$

また (23) も同様に变形すれば

$$-\frac{d\bar{h}}{d\theta} = \frac{F^2 \bar{h}}{\sqrt{F^2-1}} + \kappa \left\{ \nu + \left(\sin \theta \cdot \sqrt{F^2-1} - \cos \theta \right) \frac{1}{F^2} \right\} \sec^3 \theta$$

従つて両式より $-\frac{d\bar{h}}{d\theta}$ を消去すればつぎのごとき F^2 を従属変数, θ を独立変数とする微分方程式に帰着される。

従つて a), b) いづれの場合においても被積分項の函数形が複雑であるので最後の計算には数値積分を行わざるをえなくなる。

c) 近似計算: 近似算法としては多少複雑であ

$$-\frac{d\bar{h}}{d\theta} = \frac{2\{(1+I)-\bar{h}\}\sqrt{\bar{h}}}{\sqrt{2(1+I)-3\bar{h}}} + \left[\nu + \left(\sin \theta \frac{\sqrt{2(1+I)-3\bar{h}}}{\sqrt{\bar{h}}} - \cos \theta \right) \frac{1}{F^2} \right] \kappa \sec^3 \theta$$

となるので θ が小さい範囲では近似的に

$$-\frac{d\bar{h}}{d\theta} = \frac{2(1-\bar{h})\sqrt{\bar{h}}}{\sqrt{2-3\bar{h}}} \left[\nu + \left(\theta - \frac{\sqrt{2-3\bar{h}}}{\sqrt{h}} \right) \right. \\ \left. - 1 \right] \frac{1}{F^2} \kappa = \frac{2(1-\bar{h})\sqrt{\bar{h}}}{\sqrt{2-3\bar{h}}} \\ + \left[\nu - \frac{1}{F^2} \right] \kappa \dots\dots\dots (25)$$

となる。この方法では一応エネルギー損失を無視し θ も小さいものとしているので非常な精度を期待することは無理であるとしても、つぎのような物理的に興味のある結果に到達する。

すなわち Kármán によれば $\kappa, \nu = 0$ であるとして

$$-\frac{d\bar{h}_k}{d\theta} = \frac{2(1-\bar{h}_k)\sqrt{\bar{h}_k}}{\sqrt{2-3\bar{h}_k}} \dots\dots\dots (26)$$

なる微分方程式が導かれているので (25) 右辺第 2 項が $\kappa \nu \neq 0$ の場合の補正項となっており、両式を比較すれば

$$\left. \begin{aligned} \nu - \frac{1}{F^2} > 0 \\ \nu - \frac{1}{F^2} < 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

に従つて

$$\left. \begin{aligned} \bar{h} < \bar{h}_k \\ \bar{h} > \bar{h}_k \end{aligned} \right\}$$

と云うことになる。ただし \bar{h}_k は Kármán の方法により (26) から計算される水深である。

しかるに一様巾の水路では $i > i_0$ の底勾配で等流水深及び 限界水深をそれぞれ h_0, h_c とし不等流に関する周知の方程式

$$\frac{dh}{dx} = \frac{i - i_0 F^2}{1 - \left(\frac{h_c}{h}\right)^3} = \frac{F_1(h, x)}{F_2(h, x)}$$

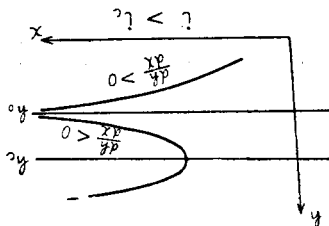
を考慮すれば $F > 1$ に対しては $F_2 < 0$ 従つて上式及び (22) から

$$\frac{dh}{dx} > 0 \text{ 従つてそれぞれ}$$

$$\nu - \frac{1}{F^2} > 0; \bar{h} < h_0$$

なる関係が成立する (図-7 参照)。

図-7 一様水路の水面形



従つてこのことと (27) の結果とを比較すれば、 θ の小さい範囲では \bar{h}_k をあたかも等流水深と考え、 $\nu - \frac{1}{F^2}$ の値の正負に応じて実際的水深が \bar{h}_k よりもそれぞれ小になるか、あるいは大となるかが決定され

ると考えてよいことが判明する。

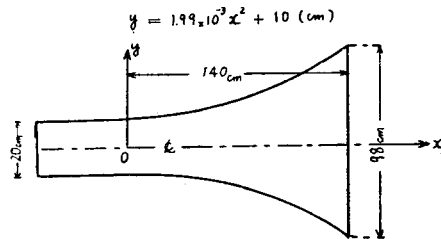
もちろん θ が大きくなれば摩擦の影響より勾配のそれの方が小さくなることは、(23) の右辺の第 2 項の示すとおりであつて、そのような際には (24) を積分しなければならないことは云うまでもない。

一方 (25) 式の右辺第 1 項の積分は Kármán によつて求められており境界条件の変化に應ずる \bar{h} の値がただちに算出できるような図表ができていたので、第 2 項で補正を行えば非常に簡単な計算で勾配及び摩擦抵抗のある場合の流れの状態を知ることができる。

ii) 実験結果 上述の所論の実験的裏づけを行うため 図-8 に示すとき装置を用いて実験を行った。

水路底はガラス板、側壁は真鍮板を折り曲げ側壁の曲線が $y = ax^2 + b$ を満足するようにしたものである。流量及び勾配は

図-8 実験水路の寸法



Q ; 2, 3, 4, 5 l/sec

i ; 0, 1/400, 1/200, 1/100, 1/50, 1/10

のごとく変化させ各流量、勾配に対する側壁に沿う水深のうち $\theta = 12^\circ$ のもの、 $\theta = 20^\circ$ のものを実験データにとり、この位置の水深と Kármán の式より出した水深 \bar{h}_{ka}' とを比較してみると 図-9のごとくになり、ほぼ $i_0 - i/F^2 = 0$ に近いものは 45° の線の附近に点在し $i_0 - i/F^2 > 0$ のものは左上半部に点在することが知られ(27)の条件式が充されていることが判明した。

なお実験水路の限界勾配 i_0 の値は各流量につき水路床を種々に変化させ、ちょうど $x=0$ の位置に Control section の生ずる勾配をもつて限界勾配と決定し本水路については 1/135 の値を得た。

一方実験結果より \bar{h}_{ka}' の値に近い水深となるのは Froude 数 3.5 程度の流れで水路勾配は 1/10 程度のものであり、 i_0 が 1/135 であることを考えると両者の間には相当の開きが実際あるものであることが認められた。

さらに (25) より計算される近似解を求めこのようにして補正した水深を \bar{h}'_{ka}' とし実験水深 \bar{h} とを比較し Plot したものが 図-10 であり両者はかなり一致した結果となつた。

図-9 実験水深と $h_{ka'}$ との比較

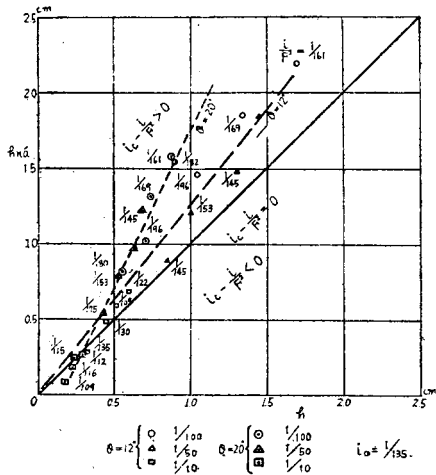
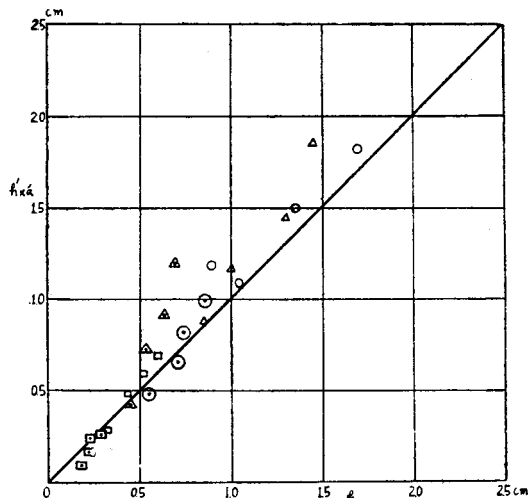


図-10 実験水深と補正水深 $h'_{ka'}$ との比較



4. 結 語

勾配及び摩擦抵抗を考慮した超流速の問題は、理論的には特有帯の理論を用いれば、勾配及び摩擦抵抗を考慮した非定常一次元流りと同様な解法を得ることが示され、ただ写像方法に上述の性質を考慮すればよいことが示された。またこの方法は相当の労力を必要とするものであるので、側壁に沿う流れだけに注目することとすれば単波の領域で比較的簡単な近似式が得られ、一様巾水路との物理的対応関係が得られた。またこの近似式は実験の結果かなりの精度が得られた。とくに Froude 数の相当に大きい水路では対岸の影響が相当に下流にならなければ及ばされぬので、単波の領域が広くなることより高い Froude 数を持ち、角変化の小さい水路では有効であるものと思われる。

本研究は東京大学本間教授の御指導の下に行われ、同内田講師よりは有益な御教示を戴き、さらに同大学院特研究生堀川君並びに学生堀口君の熱心な協力を受けた。なお文部省科学研究費の補助を受けたものであることを附記し各位に対し厚く御礼申し上げる次第である。

参 考 文 献

- 1) Ippen, Knapp, H. Rouse: High Velocity Flow in Open Channels, Symposium, Proc. of A.S.C.E., 1949
- 2) 犬井鉄郎: 応用偏微分方程式論, 岩波, 1951
Courant, Friedrichs: Supersonic Flow and Shock Waves. New York, 1948
- 3) Kármán: Eine Praktische Anwendung der Analogie zwischen Überschallströmung in Gasen und Überkritischerströmung in Ofenen Gerinnen, Z.A.M.M., 1938
Preiswerk: Application of the Method of Gas Dynamics to Water Flows, Technical Memoranda, Nos. 935 and 934, 1940
- 4) Stoker: The Formation of Breakers and Bores, New York Univ., 1948
Putman: Unsteady Flow in Open Channels, Trans. American Geophysical Union, 1948

内田茂男: 特性曲線法による洪水波の解析について, 第2回応用力学連合講演会, 1952

(昭.28.5.21)

工 学 会 手 帳 予 約 申 込 に つ い て

例年のごとく本年も昭和 29 年 (1954 年) 用工学手帳を下記により発行致しますから何卒予約御申込み下さい。なお本年のものは表紙をクロスにし、綴も改善してあります。

- 記
1. 寸 法 : 15×9.5 cm
 2. 定 価 : 170 円 (送料共 180 円)
 3. 予約 申込 期 日 : 昭和 28 年 12 月 10 日まで
 4. 予約 申込 場 所 : 土木学会または日本工学会
 5. 予約 金 支 払 期 日 : 昭和 28 年 12 月 20 日まで
 6. 手帳 発 送 開 始 : 12 月 11 日より

社 団 法 人 日 本 工 学 会

東京都千代田区丸の内 1 の 2 日本工業倶楽部 2 階
電話 東京二八 (28) 0706 振替口座 東京 5055 番