浮砂濃度と流速分布の関連について

准員　室　田　　明*

ON THE RELATIONSHIP BETWEEN THE CONCENTRATION OF SUSPENDED SEDIMENT AND THE VELOCITY DISTRIBUTION OF WATER FLOW.

(JSCE Nov. 1953)

Akira Murota, C.E. Assoc. Member

Synopsis By this time, the concentration formulase of suspended sediment has been investigated independently of the velocity change due to containing suspended particles. In this paper, this concentration—and velocity—distribution was solved simultaneously using the equation of momentum and continuity. Theoretical prediction for the maximum transferable quantity of suspended sediment was also given under the Richardson's criterion.

要旨　現在までに発表された浮砂濃度の分布式は，すべて，浮砂を含むことによる流速の変化を考慮していないものである。本文では，運動量及び連続式から出発して，浮砂濃度と流速分布の関連性を，理論的に解明する。さらに，乱流の安定性の考えから，浮砂乱流輸送の最大値を求めることを試みた。

1. 緒　言

浮砂を含む流れの理論はすでに多数発表され，実験においてそれ等が確かめられている。すなわち，流れ方向に変動がない場合で，しかも垂直断面において定常的な濃度勾配があるとき，考える volume element に対して次式がなり立つ。

$$\varepsilon\frac{dm}{dy}+w_0m=0 \quad\cdots\cdots(1)$$

ここに ε：乱流拡散係数，w_0：沈降速度，m：濃度。

浮砂に関するこの種の問題はすべて (1) 式を基本式として，ε に適当な仮定を設けて境界条件を満足するように解かれている。

たとえば，ε を一定とすると次のような exponential な分布になる[1]。

$$\frac{m}{m_a}=e^{-\frac{w_0}{\varepsilon}(y-a)} \quad\cdots\cdots(2)$$

最も新らしい理論では，流速分布が Kármán の分布に従うものとし，ε を

$$\varepsilon\equiv l\boldsymbol{v}=\kappa U_* y\left(1-\frac{y}{h}\right)\quad\cdots\cdots(3)$$

とし，

$$\frac{m}{m_a}=\left(\frac{h-y}{y}\times\frac{a}{h-a}\right)^{\xi},\ \xi=\frac{w_0}{\kappa U_*}\quad\cdots\cdots(4)$$

ここに l：混合長$=\kappa y$

$\boldsymbol{v}$：乱流垂直変動速度の絶対値の平均

U_*：底面の摩擦速度$=\sqrt{\tau_0/\rho}$

(4) 式は Kármán の示唆によつて Ippen[2] の導いたもので，最近は Vito. A. Vanoni[3] が実験を行い，この式が水面附近を除いて，実験結果と見事に一致することが示されている。

しかしながら，(1) 式は明らかにこの場合の連続式であつて，浮砂を含まぬときの流速分布が，この場合にも成り立つとの仮定から，単に連続方程式のみで解法を進めるのは，基本的な解析上の不合理をきたすことになる。実際問題としても，浮砂を含むことによる流速の低下があるはずで，この流速の変化と濃度との関連を統一的に解明することができない。

筆者はこの点に着目して，運動量方程式と連続方程式を連立に解いて，乱流場で濃度（密度）変化のある場合を計算して，流速及び濃度分布を求めてみた。

最後に，Energy Method による乱流の安定理論から出発して，Richardson 数を用い，浮砂乱流輸送量の最大値を求めることを試みた。

2. 濃度勾配のある流れの流速分布及び濃度分布

密度：$\rho=\rho_0+m\rho_s=\rho_0(1+\gamma m)\quad\cdots\cdots(2.1)$

ここに ρ_0：純水密度　ρ_s：含有物質密度

m：濃　度　γ：含有物質の比重>1

乱流による Reynolds Stress τ は

$$\tau=-\overline{\rho uv}=l\boldsymbol{v}\frac{d}{dy}\rho U$$

$$=\rho_0 l\boldsymbol{v}\frac{d}{dy}U(1+\gamma m)\quad\cdots\cdots(2.2)$$

ここに u,v：乱流による x 及び y 方向の変動速度。一方含有物質の沈降速度 w_0 により，$-y$ 方向に運

*大阪大学助手，工学部構築工学科

ばれる量，$-w_0\rho_0\gamma m$ と，乱流交換によつて $+y$ 方向に運ばれる量 $-l\nu\dfrac{d\rho}{dy}$ が釣合つて，x 軸に平行な面を通る輸送がなく，従つて定常的な濃度勾配があるとき，

$$l\nu\frac{dm}{dy}+w_0m=0 \cdots\cdots (2.3)$$

混合長 l が (2.2) と (2.3) で同じであるかどうかは種々疑問があつて[4]，粒子が加速される場合 slip の問題[5] 等が入つて来るが，一応等しいものとおいても大した差違はないようである[6]。

それで l を運動量及び浮砂輸送の両方の場合に等しいとおいて（換言すれば，渦動粘性係数と浮砂の乱流拡散係数を等しいとして）かつ，最初は境界壁附近に着目すれば，l は Prandtl に従つて，

$$l=\kappa y \cdots\cdots (2.4)$$

また $$\tau=\tau_0\left(1-\frac{y}{h}\right)\doteqdot\tau_0 \cdots\cdots (2.5)$$

もし相関係数 $R=\overline{uv}/\overline{u}^2\cong 1$ であれば $\bar{u}=\bar{v}$ でかつ，運動量が輸送し得る量であることを考えて，

$$\rho u=\rho\nu=l\frac{d}{dy}\rho U=l\frac{d}{dy}\rho_0U(1+\gamma m)$$

または

$$\varepsilon=l\nu=\frac{\kappa^2y^2}{1+\gamma m}\cdot\frac{d}{dy}U(1+\gamma m) \cdots\cdots (2.6)$$

(2.6) を (2.2), (2.3) に入れると，

$$\frac{1}{\sqrt{1+\gamma m}}\cdot\frac{d}{dy}U(1+\gamma m)-\frac{U_*}{\kappa y}=0 \cdots\cdots (2.7)$$

$$\frac{\kappa^2y^2}{1+\gamma m}\cdot\frac{dm}{dy}\cdot\frac{d}{dy}U(1+\gamma m)+w_0m=0 \cdots\cdots (2.8)$$

(2.7), (2.8) が各運動量及び連続方程式で，これを連立に解けばこの場合の流速分布，濃度分布を厳密に解明し得るはずである。

(2.7), (2.8) から $\dfrac{d}{dy}U(1+\gamma m)$ を消去し，

$y=a$ で，$m=m_a$ とすると，

$$\frac{m_a}{m}\left(\frac{\sqrt{1+\gamma m}-1}{\sqrt{1+\gamma m_a}-1}\right)^2=\left(\frac{y}{a}\right)^{-\xi}\quad \xi=\frac{w_0}{\kappa U_*} \cdots\cdots (2.9)$$

(2.9) が求める濃度分布の式である。

(2.9) で m^2 の order まで考えると，

$$\frac{m}{m_a}=\left(\frac{y}{a}\right)^{-\xi} \cdots\cdots (2.10)$$

となつて (4) と同じ形になるので Ippen の式は m^2 程度まで考えた近似式であることがわかる。

次に流速分布を求めるために (2.7) を開いて，

$$\sqrt{1+\gamma m}\,\frac{dU}{dy}+\frac{\gamma U}{\sqrt{1+\gamma m}}\,\frac{dm}{dy}-\frac{U_*}{\kappa y}=0 \cdots\cdots (2.11)$$

これに (2.9) の dm/dy を入れると，

$$\sqrt{1+\gamma m}\,\frac{dU}{dy}-\frac{\gamma m w_0}{\kappa U_*}\cdot\frac{U}{y}-\frac{U_*}{\kappa y}=0 \cdots\cdots (2.12)$$

$O(U)\cong O(U_*)$ とすると，第1項，第3項の order は等しく，これを1とすれば，第2項は $O(mw_0/U)$ となつて w_0, m ともに普通きわめて小さいので，第2項は省略し得る。換言すれば，流度勾配には，濃度勾配よりもむしろ，濃度自身が支配的な影響を及ぼすことになる。

従つて，m が小さいことを考えて (2.12) は，

$$\frac{dU}{dy}\cong\frac{U_*}{\kappa y}\left(1-\frac{1}{2}\gamma m\right) \cdots\cdots (2.13)$$

(2.13) を積分する際，境界壁で $U=0$ となるため積分の下限を0とせねばならぬように見えるが，境界壁のごく近くでは，粘性による層流抵抗を加え，

$$\tau=l^2\left(\frac{d\rho U}{dy}\right)^2+\mu\frac{dU}{dy} \cdots\cdots (2.14)$$

とせねばならぬのを，右辺第2項を省略したので，この粘性の作用する範囲を除かねばならず，従つていまの場合，積分の下限を y_0 とする。この y_0 については後に検討する。

以上のことを注意し，かつ，m が小さい場合，充分の近似で (2.10) がつかえるので，(2.13) を y_0 から y まで積分すると，

$$U=\frac{U_*}{\kappa}\left[\ln\frac{yU_*}{\nu}-\ln\beta-\frac{\gamma}{2\xi}m_0\left\{1-\left(\frac{y}{y_0}\right)^{-\xi}\right\}\right]$$
$$=\frac{U_*}{\kappa}\left[\ln\frac{yU_*}{\nu}+C_1-\frac{\gamma}{2\xi}(m_0-m)\right] \cdots\cdots (2.16)$$

ここに，$y_0=\dfrac{\beta\nu}{U_*}$, $\xi=\dfrac{w_0}{\kappa U_*}$, $C_1=-\ln\beta$,

$m_0=m(y_0)$

上式は，浮砂のない場合は，

$$U=\frac{U_*}{\kappa}\left[\ln\frac{yU_*}{\nu}+C_1\right] \cdots\cdots (2.17)$$

となつて，普通の分布則に一致する。

滑らかな円管を用いた Nikuradse の実験では，Kármán の universal const. κ は 0.40, $\beta=\dfrac{1}{9}$ をとると，壁の近傍を除いて実験と完全に一致する。

ところで以上の議論は，最初に注意したように，境界壁の比較的近い部分での計算であるが，浮砂のない場合の流速分布式(2.17)が，初めの仮定範囲をこえて全断面でよい結果を示すことと，$\tau=\tau_0\left(1-\dfrac{y}{h}\right)$ として全断面に用いうるようにした濃度分布の式，

$$\frac{m}{m_a}=\left\{\left(\frac{y}{a}\right)\frac{h-a}{h-y}\right\}^{-\xi} \cdots\cdots (4)$$

も，基準点 a を適当に大きくとると充分の近似を与

つて (2.10) を用いうるので，(2.16)は全水深にわたつて適用し得るものとしてさしつかえない。

(2.16) を0から h まで積分して，平均流速 U_m を求めると，

$$U_m=\frac{U_*}{\kappa}\left[\ln\frac{U_*h}{\nu}+C_2-\frac{\gamma}{2\xi}(m_0-\overline{m})\right] \quad \cdots\cdots\cdots(2.18)$$

ただし $\overline{m}$：断面での平均濃度

また C_2 は (2.16) が $y=0$ まで適用できないので C_1 とは少しくことなり，実験により求めねばならぬ。

また抵抗係数：$f=2\left(\frac{U_*}{U_m}\right)^2$ は (2.18) から簡単に，

$$\sqrt{\frac{2}{f}}=\frac{1}{\kappa}\left[\ln R\sqrt{\frac{f}{2}}+C_2-\frac{\gamma}{2\xi}(m_0-\overline{m})\right] \quad \cdots\cdots\cdots(2.19)$$

ただし　$R=U_mh/\nu$

以上を要約して，浮砂を含むための流れの変動量に dash をつけて表わせば，

$$U'=-\frac{U_*^2}{2w_0}\gamma(m_0-m) \quad \cdots\cdots\cdots(2.20)$$

$$U_m'=-\frac{U_*^2}{2w_0}\gamma(m_0-\overline{m}) \quad \cdots\cdots\cdots(2.21)$$

$$f'\fallingdotseq\frac{f_0\kappa\gamma U_*(m_0-\overline{m})}{w_0\left(1-\kappa\sqrt{\frac{2}{f_0}}\right)} \quad \cdots\cdots\cdots(2.22)$$

ただし f_0：純水の場合の抵抗係数

(2.20)，(2.21) は $m/m_0=(y/y_0)^{-\xi}$ を画いておけば作図的に容易に求まる。

また，浮遊物質を輸送するに要するエネルギーは，

$$E=\frac{\rho U_{m0}^2}{2}\left\{\left(\frac{U_m}{U_{m0}}\right)^2+f'\right\} \quad \cdots\cdots\cdots(2.23)$$

この一部は (2.21) で与えられる平均流速の低下によつて，残りは，

$$h'=\frac{1}{2g}f'U_m^2 \quad \cdots\cdots\cdots(2.24)$$

で与えられる水位上昇で補給される。

最後に，問題となるのは m_0 である。普通 1(4) で与えられる濃度分布は相対濃度を与えるもので輸送総量等を論ずる場合効力がない。浮砂の問題は要するにこの基準濃度の決定と云うことに帰着するわけで，特に水路底からの舞上りの機構が研究される所以である。

Reichardt の最近の研究によれば[7]，純層流とみなし得る層，すなわち境界底層 Boundary Sublayer の厚さ δ_0，及び境界層厚 δ は次のようにとつてよいようである。

$$\delta_0\fallingdotseq\frac{5\nu}{U_*} \qquad \delta=\frac{30\nu}{U_*}$$

(Kármán は$\delta=11.5\nu/U_*$ を与えている)

例えば Reynolds 数が 10^4，10^6 程度のとき，

$R=10^4$ で　$\delta=7.1\times10^{-2}h$　$\delta_0=1.2\times10^{-2}h$

$R=10^6$ で　$\delta=1.1\times10^{-3}h$　$\delta_0=1.8\times10^{-4}h$

しかるに　$y_0=\frac{\beta\nu}{U_*}\fallingdotseq\frac{0.1\nu}{U_*}=0.02\delta_0$ で $10^{-5}h$～$10^{-6}h$ のきわめて小さい値であるので，いまの場合は境界壁の充分近くの濃度をもつ m_0 としてよいように思う。

3. 乱流輸送量の最大値

密度勾配があるときの乱流の安定性については，いわゆる Richardson 数：Θ なるものによつて，乱流限界が定められることが知られている。すなわち，

$$\Theta\equiv\left(\frac{dU}{dy}\right)^2\Big/-\frac{g}{\rho}\cdot\frac{d\rho}{dy} \quad \cdots\cdots\cdots(3.1)$$

$\Theta>\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_m}$ が乱流の起り得る条件であることがエネルギーの方法から簡単に導かれる[8)9)]。

ここに　ε_s：浮砂の乱流拡散係数

ε_m：渦動粘性係数

前節で $\varepsilon_s=\varepsilon_m$ とおいたので，条件は

$$\Theta>1 \quad \cdots\cdots\cdots(3.2)$$

これに前節で導いた速度勾配及び密度勾配を入れて整頓すると，

$$m\sqrt{1+\gamma m}<\frac{U_*^3}{\kappa g\gamma w_0}\cdot\frac{1}{y} \quad \cdots\cdots\cdots(3.3)$$

簡単のため m^2 を省略し両辺を y_0 から h まで取つて，平均濃度にしてみると，

$$\overline{m}<\frac{U_*^3}{\kappa\gamma gw_0}\cdot\frac{1}{h}\ln\frac{h}{y_0} \quad \cdots\cdots\cdots(3.4)$$

上式が乱流の起り得る条件である。

すなわち，平均濃度が (3.4) の右辺で与えられるものより大きくなれば，乱流は減衰して，最初に仮定した乱流交換による上向きの輸送と沈降による下向きの輸送の平衡が破れて，粒子の沈降が起ると考えられる。

ところで，普通の浮砂 (0.1～0.01 mm) では粒径が大に過ぎて分子拡散による輸送はおこり得ない。きわめて短かい周期で，きわめて小さい粒径を考えると Brown 運動をするようであるが，この場合も，拡散係数はきわめて小さい（例えば，比重2の粒子で絶対温度 300°K の場合，1 100 sec の周期を考えると，Brown 運動をするはずの最大浮砂径は 23.4×10^{-4}mm となる)。

従つて層流には定常的な運搬能力はなく，濃度は単調に減少するのみで，外から何等かのエネルギーを加えぬ限り定常的な浮砂の輸送は起り得ぬものと考えて

よい。

以上のことから，定常等流の浮砂輸送の最大値：$\overline{m}_c$ は次式で与えられる。

$$\overline{m}_c=\frac{1}{\kappa g}\ln\frac{h}{y_0}\cdot\frac{U_*^3}{\gamma w_0 h}\quad\cdots\cdots(3.5)$$

しかるに

$$U_*^2=ghI\quad\cdots\cdots(3.6)$$

ただし　I：エネルギー勾配

また $\ln\frac{h}{y_0}$ は Reynolds 数によつてわずかに変化する数で，

$$\ln\frac{h}{y_0}=\ln\frac{R}{\beta}\sqrt{\frac{2}{f}}\quad\cdots\cdots(3.7)$$

(3.6)，(3.7)を用いると輸送し得る最大平均濃度は，

$$\overline{m}_c=\frac{\sqrt{g}}{\kappa}\ln\frac{R}{\beta}\sqrt{\frac{2}{f}}\cdot\frac{\sqrt{hI^3}}{\gamma w_0}\quad\cdots\cdots(3.8)$$

すなわち $\overline{m}_c$ は，粒子の比重，沈降速度（粒径）に逆比例し，水深の 1/2 乗，勾配の 3/2 乗に比例することになる。

以上の議論は，エネルギーの方法から導いた安定理論を基礎としているので，$\Theta=1$ の 1 にはもちろん重きをおくことはできないけれども，乱流輸送の最大値に及ぼす，諸種の要素を解明するには，充分である。

4. 結　び

以上はすべて滑面開水路についての計算であるが，境界壁の凸凹が，粘性層の厚さを起す場合は，(2.13) の積分下限を，粘性に無関係な値 $y_0=\beta k$ として同様な計算を進めればよく，この場合の流速式は，

$$U=\frac{U_*}{\kappa}\left[\ln\frac{y}{k}-\ln\beta-\frac{\gamma}{2\xi}(m_0-m)\right]\quad\cdots\cdots(4.1)$$

ただし　k：境界壁の roughness element の平均の高さ

β：Roughness element の種類によつて定まる定数

この場合も y_0 は小さいので，m_0 は滑面の場合と同様河床濃度（Roughness element の top 附近の濃度）と考えればよく，以下の計算は全く滑面の場合と同様である。

表現の簡単のため，濃度を小さいとして近似計算を進めたが，含有物質があるための流況の変化量はきわめて小さいので，この程度の近似度で，充分であると思う。

参考文献

1) H. Rouse : Proc. of 5 th International Congress of Applied Mechanics (1938, Sept.)
W. Schmidt : Der Massenaustauch in freier Luft und verwandte Erscheinungen. Probleme der kosmischen Physik, 1925 Pt.7.
2) H. Rouse : Mondern Conception of the Mechanics of Fluid Turbulence, Trans. A.S.C.E. vol. 102 (1937) p.536.
3) Vito A. Vanoni : Transportation of Suspended Sediment by Water, Proc. A.S.C.E. vol.70 (1944) p.793.
4) Theodor von Kármán : Some Aspect of Turbulent Probleme, Proc. of 4 th International Cong. of Applied Mechatics. 1934, p.54～91.
5) Vito.A. Vanoni : 前出 3).
6) H. Rouse : 前出 1)
7) Reichardt : Z. angew. Math. Mech. 20(1940) 297～328.
8) 谷：乱流理論 p.27.
9) S. Goldstein : Modern Developments in Fluid Dynamics, 1938 vol.1 p.229.

（昭.28.3.3）

地震時の STABILITY NUMBER について*

正員　工学博士　倉田宗章**

ON STABILITY NUMBERS AT EARTHQUAKE TIME

(JSCE Nov. 1953)

Dr. Eng., Muneaki Kurata, C.E. Member

Synopsis The auther presents the charts of stability number prepared for investigating the slope failure of cuts and embankments by inclined gravity force.

These charts may be applied for determination of the maximum height of slope which can be stable at earthquake time, in this paper the other application is also delivered. The assumption is established as the failure line is circular arc. The charts are produced through graphical process.

*昭.28.5.24，土木学会第9回年次学術講演会にて発表

**北海道大学助教授，工学部土木工学教室