が 0.2 kg/cm² を切るから第6回目で一時載荷を中止せねばならないことがわかる。このような計算を地盤内の他のすべての点について行えばよいのであるが，いづれにしても時間間隔 Δt を大きく採れば連続して載荷できる量が増加することが予想される。またこのような瞬時載荷の累積に換えて漸増載荷に対する理論式を適用すれば，さらに現実に合致した結果が得られるものと考えられる*。

なおここでは簡単のため均一基礎地盤について塑性流動機構を考察したが，非等方性透水度の地盤に対しても式 (8) を用いて計算することができる。この場合の流動機構は 2. で述べたことから均一地盤に対するものと傾向的には大差がないものと思われる。

4. あとがき

アースダムを始め河川堤防，鉄道築堤などのいわゆる堤状構造物は往々非常に貧弱な基礎地盤上に築造せねばならないことがあるので，その安定解析にあたつては軟弱地盤の圧密による破壊現象の把握が必要である。本文ではこれら盛土の施工速度の過大によつて基礎地盤内に発生する高い間隙圧が地盤の剪断抵抗を減少させ，圧密破壊の原因となることがあるから，施工速度の適当な制御によりその発生を防がねばならないことを主眼として，おもに間隙圧を有する地盤の塑性流動機構を理論的に究明することに努めた。その結果載荷時及び地盤の圧密過程において間隙圧が場所的時間的に変化してゆくにつれて，地盤の塑性流動に種々の興味ある現象が見られた。そしてこの圧密過程中の塑性流動機構が盛土の施工制御に関して重大な要素になつていることを確かめることができた。しかし地盤内応力分布がどの程度になるまで盛土の施工を許容すべきかについては，現地における水圧計による間隙圧の実測記録と地盤の流動現象の観察を待つて決定すべきであろう。

この研究は昭和 28 年度文部省科学研究助成補助金の交付を受けたものであつて，京大教授村山博士に御指導をいただいた。同教授に厚くお礼を申し上げるとともに，計算の一部を手伝われた学生安間泰介君の労を謝する。

* 漸増載荷に対しては前述論文の式 (20)，(21) を用いることができる。

参考文献

1) 赤井浩一：堤体2次元圧密の研究，土木学会論文集 No.16, pp. 51～59, (1953)
2) D.P. Krynine: Soil Mechanics, pp. 69～70, (1941)
3) O. K. Fröhlich: Druckverteilung im Baugrunde, pp. 72～82, (1934)
4) 星埜 和：基礎の支持力論， pp. 107～114, (1948)

(昭.28.4.16)

開水路における垂直流速曲線について

正員　春日屋伸昌*

ON THE VERTICAL VELOCITY CURVE IN AN OPEN CHANNEL

(JSCE Sept. 1953)

Nobumasa Kasugaya, C.E. Member

Synopsis The author described a process to determine the order of the vertical velocity curve by the mean-value method, and introduced an equation of the vertical velocity curve when it is supposed to be a parabola.

要旨　平均値法を応用して，垂直流速曲線の次数を決定する方法をのべ，曲線が2次抛物線であると考えられるとき，垂直流速曲線式を導いた。

1. まえがき

前に発表した論文[1]では河巾に沿つてえらばれた観測点下の水深を h，深さに沿つて z 軸をとり，水表面から深さ z の点の流速を v，平均流速を v_m として，

$$v_m=\frac{1}{h}\int_0^h v\,dz \qquad (1)$$

を，つぎの変数変換，

$$z=h(1+t)/2 \qquad (2)$$

によつて，

$$v_m=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} v\,dt \qquad (3)$$

と書く。ここで，$v=f(z)=g(t)$ を t に関する級数に展開したつぎの式，

$$v=a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots\cdots \qquad (4)$$

$$a_0=g(0),\ a_1=g'(0),\ a_2=g''(0)/2!,\ \cdots\cdots$$

を (3) 式の右辺に入れて積分した v_m の値が，区間 [−1, 1] の間に適当にとつた n 個の t の値 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ に対する流速 v の値 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ と，これ

* 中央大学助教授，工学部土木工学科

らにそれぞれ乗じるべき係数 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ とをもつて，

$$v_m=A_1v_1+A_2v_2+\cdots+A_nv_n \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

の形に近似的におかれるように，t と A との値を定める。t，A を定めるべき連立方程式は，

$$\left.\begin{array}{l} A_1+A_2+\cdots\cdots+A_n=1 \\ A_1t_1+A_2t_2+\cdots\cdots+A_nt_n=0 \\ A_1t_1^2+A_2t_2^2+\cdots\cdots+A_nt_n^2=1/3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots(6)$$

一般に，$\sum_{i=0}^{n} A_it_i^m=0$　　（m：奇数）

$=1/(m+1)$　（m：偶数）

であつて，与えられた n に対して，(5) 式をもつて (1) 式に代用するときの誤差 E は，ほぼ，つぎの式で評価される。

$$E=\frac{g^{(2n)}(0)}{(2n)!}\left(\frac{1}{2n+1}-\sum_{i=1}^{n} A_i\,t_i^{2n}\right)\cdots\cdots(7)$$

前の論文に掲げた 表—1 は，与えられた n に対する t, A の値であつて，$n=2$（2点法），$n=3$（3点法）における平均流速の算定式は，つぎのようになる。

$$n=2\,;\ v_m=(1/2)(v_{0.211}+v_{0.789})\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

$$n=3\,;\ v_m=(1/18)(5\,v_{0.113}+8v_{0.500}+5\,v_{0.887})\cdots(9)$$

そして，これらの各式が誤差をともなわないための垂直流速曲線の最大次数は，$n=2$ において 3 次，$n=3$ において5次である。

さて，ここでは，垂直流速曲線の次数を決定するための方法について考察を進め，さらに進んで，垂直流速曲線を2次抛物線としたときの，平均流速と最大流速との位置の関係を求め，これを用いて，垂直流速曲線式を誘導することとする。

2. 平均流速算定補助式の誘導

垂直流速曲線の次数の決定，ならびに，従来の平均流速算定式の誤差の検討と既往の観測値を補正するのに必要なため，つぎにのべるような，各種の補助式を誘導しておく。

まず，器深を $z_1=0.2\,h$，$z_2=0.6\,h$，$z_3=0.8\,h$ の3点として，正確な平均流速を算定すべき式を導く。それには，(2) 式より，

$$t_1=(2\,z_1/h)-1=-0.6,\quad t_2=(2\,z_2/h)-1=0.2,$$

$$t_3=(2\,z_3/h)-1=0.6$$

であるから，(6) の連立方程式における未知数は A_1，A_2，A_3 の3つとなり，したがつて，これらを解くべき連立方程式は，上から3個をとつて，

$$A_1+A_2+A_3=1,\ -0.6\,A_1+0.2\,A_2+0.6\,A_3=0,$$

$$0.36\,A_1+0.04\,A_2+0.36\,A_3=1/3$$

この連立方程式を解けば，

$$A_1=17/36,\ A_2=1/12,\ A_3=4/9$$

ゆえに，平均流速 v_m は，z_1，z_2，z_3 における流速 $v_{0.2}$，$v_{0.6}$，$v_{0.8}$ を実測すれば，つぎの式で与えられる。

$$v_m=(1/36)\ (17\,v_{0.2}+3v_{0.6}+16\,v_{0.8})\cdots\cdots\cdots(10)$$

この算定式の誤差 E は，高次の項を省略すれば，ほぼ，つぎの式で評価される。

$$E=-a_3(A_1t_1^3+A_2t_2^3+A_3t_3^3)=-\{g^{(3)}(0)/3!\}$$
$$\{(17/36)\cdot(-0.6)^3+(1/12)\cdot(0.2)^3+(4/9)\cdot(0.6)^3\}=g^{(3)}(0)/1\,125$$

ゆえに，(10)式は，垂直流速曲線が2次式ならば誤差がないが，3次式以上ならば誤差がある。

つぎに，器深を $z_1=0.2\,h$，$z_2=0.4\,h$，$z_3=0.6\,h$，$z_4=0.8\,h$ の4点とし，上と同様な方法により，4個の連立方程式を解いて係数を定めれば，つぎのような3次式までは誤差がなく4次式以上では誤差をともなう平均流速算定補助式がえられる。

$$v_m=(100/192)\{(v_{0.2}+v_{0.8})-(v_{0.4}+v_{0.6})\}$$
$$[E=g^{(4)}(0)/360]\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

さらに，4次式までは誤差がなく，5次式以上ならば誤差が生じるような算定式を導いておく。このときえらぶべき器深すなわち t の値を，水深の中央($t=0$)に関して対称にえらんだり (Newton-Cotesの方式)[2]，水深を等分して，その中点となるようにえらんだり (Maclaurinの方式)[3]，Gauss の1組の坐標点を介入させたりすると，高い精度の式，すなわち，5次式まで誤差のない式が導かれて，この場合の目的にそわない。そこで，このような坐標点を避けながら，しかもいままで導いた各算定式における器深となるべく同じものを用いて，目的にそうような算定式をつくることを考える。このような考慮のもとに導かれた算定式は

$$v_m=0.174\,v_{0.1}+0.198\,v_{0.2}-0.278\,v_{0.4}+0.653\,v_{0.5}+0.253\,v_{0.9}\,[E\doteqdot-g^{(5)}(0)/12\,000]\cdots\cdots(12)$$

3. 垂直流速曲線の次数の決定

垂直流速曲線の次数を決定したいときには，上に掲げた各式を用いて，つぎのようにすればよい。まず，$v_{0.2}$，$v_{0.6}$，$v_{0.8}$ を測定し，(10) 式の補助式に入れて v_m を計算する。同時に，3次式まで誤差のない2点法の (8) 式，

$$v_m=(1/2)(v_{0.211}+v_{0.789})\doteqdot(1/2)(v_{0.2}+v_{0.8})$$

の右辺に入れて v_m を計算する。これら2つの v_m の値の間に，観測誤差以上の誤差がないと考えられるときには，垂直流速曲線の次数は2次である。もし，観測誤差以上の誤差があるときには，さらに $v_{0.4}$ を実測し，(11)式の補助式に入れて v_m を計算し，2点法によつてすでに計算されている値と比較し，一致すれ

ば，次数は3次である。これでも不十分なときには，さらに，$v_{0.1}$，$v_{0.5}$，$v_{0.9}$ を実測し，(12)式の補助式に入れて v_m を計算し，同時に，5次式まで誤差のない3点法の (9) 式，

$$v_m=(1/18)(5\,v_{0.113}+8\,v_{0.500}+5\,v_{0.887})\fallingdotseq(1/18)(5v_{0.1}+8\,v_{0.5}+5\,v_{0.9})$$

の右辺に入れて v_m を計算する。これら2つの v_m の値が一致すれば，次数は4次である。これでもなお一致しないときには，さらに高次の次数を決定すべき式をたてなければならないが，垂直流速曲線の次数が，6次以上と考えねばならぬような場合はないと考えられるから，(12) 式と (9) 式とで，なお，v_m の値が一致しなければ，垂直流速曲線の次数は，5次であると考えてよいと思われる。

例題　図―1 は，雲形定規を用いて方眼紙上に画いた任意の滑らかな連続曲線である。平均値法を用いてこの曲線と x 軸と $x=0$，$x=180$ を通る2本の縦線とで囲まれた面積 A，および，この曲線の次数を求める。

巾を $h=180$ とし，原点より $0.1\,h$，$0.2\,h$，$0.4\,h$，$0.5\,h$，$0.6\,h$，$0.8\,h$，$0.9\,h$ の点を通る縦線の長さ y を方眼紙上で計ると，$y_{0.1}=66.0$，$y_{0.2}=73.9$，$y_{0.4}=33.2$，$y_{0.5}=17.7$，$y_{0.6}=18.1$，$y_{0.8}=80.0$，$y_{0.9}=116.4$ がえられた。

まず，(10) 式を用いて，

$$A_1=180\times(1/36)(17\,y_{0.2}+3\,y_{0.6}+16\,y_{0.8})=12\,953$$

(8) 式を用いて，

$$A_2=180\times(1/2)(y_{0.2}+y_{0.8})=13\,851$$

$$差=(A_1-A_2)/A_1=-6.9\%$$

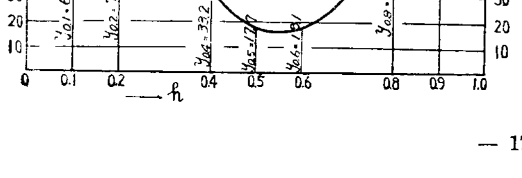
差が相当にあるから，2次式ではない。

つぎに，(11) 式より，

$$A_3=180\times(100/192)\{(y_{0.2}+y_{0.8})-(y_{0.4}+y_{0.6})\}=9\,619$$

$$差=(A_3-A_2)/A_3=-44.0\%$$

図―1



ゆえに，3次式でもない。

さらに，(12) 式および (9) 式より，

$$A_4=180(0.174\,y_{0.1}+0.198\,y_{0.2}-0.278\,y_{0.4}+0.653y_{0.5}+0.253\,y_{0.9})=10\,421$$

$$A_5=180\times(1/18)(5\,y_{0.1}+8\,y_{0.5}+5\,y_{0.9})=10\,536$$

$$差=(A_4-A_5)/A_4=-1.1\%$$

これで，満足すべき値がえられたから，次数は4次で，求める面積は 10 421 である。

あらかじめ，プラニメーターで測つておいた値は，10 422 であつた。したがつて，$A_1\sim A_5$ の誤差 E は $E_1=-24.2\%$，$E_2=-32.9\%$，$E_3=7.7\%$，$E_4=0.0\%$，$E_5=-1.1\%$ である。

試みに，Simpson 公式によつて面積を求めると，3つの坐標点で $E=39.6\%$，5つの坐標点で $E=4.9\%$，7つの坐標点で $E=-2.0\%$ となり，正確な値をうるためには，9つの坐標点をとらねばならなかつた。平均値法では，わづか3つの坐標点で正確な値がえられるのであるから，このことからしても，Simpson 公式はすでに過去のものであり，平均値法がこれにとつて代わるべきものと思う。

この例題からつぎのようなこともわかる。すなわち，普通の近似公式は，坐標点を増せば正確な値に漸次近づくというように漸近的なものであるが，平均値法では，1つでも小さい坐標点に対する値は割合大きな誤差をともなうのが普通であり，それより1つ坐標点をふやして必要かつ十分な坐標点とすると，飛躍して完全な値がえられる。これが，平均値法のもう1つの特色で，このように，漸近的近似性がないからこそ，上にのべたような方法で，曲線の次数が決定されうるものと考えられる。

また，相当振動の激しい図―1 の曲線に対してすら，$y_{0.211}\fallingdotseq y_{0.2}$，$y_{0.789}\fallingdotseq y_{0.8}$，$y_{0.113}\fallingdotseq y_{0.1}$，$y_{0.887}\fallingdotseq y_{0.9}$ としても，曲線の次数を決定するには，ほとんど差支えなかつた。垂直流速曲線は，図―1 ほど振動は激しくないから，上と同じような坐標点をとつても，全く差支えないことがうなづかれる。

4. 平均流速と最大流速との位置の関係式

以上のべた方法によつて，垂直流速曲線の次数を決定することができるわけであるが，水面巾が水深に比してきわめて大きい普通の水路においては，曲線の次数を2次として十分満足すべき結果のえられることが知られ[4]，解析的にも，流水に直角な方向に流速の変化がなく，かつ，乱流係数は Boussinesq にしたがつて垂直線上で定数であるとの仮定を設ければ，2次であることが証明される[5]。そこで，いま，垂直流速曲線の次数が2次であると考えられるとき，その曲線

式を誘導するために，まず，平均流速と最大流速との位置の間に成立する関係を求めておく。

坐標原点を，平均値公式を誘導したときと同じように，水深の中点にとり，垂直流速曲線式を t に関する 2 次式，

$$v=c_0+c_1t+c_2t^2 \cdots\cdots(13)$$

とし，この係数 c_0, c_1, c_2 を定めるために，平均値公式における $n=3$ を採用する。このとき，$t_1=-\sqrt{3/5}$, $t_2=0$, $t_3=\sqrt{3/5}$ であつて，平均流速 v_m を与える式は，(9) 式である。

(13) 式に t_1, t_2, t_3 の値を入れて，つぎの連立方程式をつくる。このとき，c_0 は明らかに $v_{0.500}$ に等しいから，

$$v_{0.113}=v_{0.500}-\sqrt{3/5}\,c_1+(3/5)c_2,$$
$$v_{0.887}=v_{0.500}+\sqrt{3/5}\,c_1+(3/5)c_2$$
$$\therefore\ c_1=-(\sqrt{15}/6)(v_{0.113}-v_{0.887}),$$
$$c_2=-(5/6)\{2v_{0.500}-(v_{0.113}+v_{0.887})\}$$

これらを (13) 式に入れれば，

$$v=v_{0.500}-(\sqrt{15}/6)(v_{0.113}-v_{0.887})t-(5/6)\{2v_{0.500}-(v_{0.113}+v_{0.887})\}t^2 \cdots\cdots(14)$$

さて，平均流速 v_m に等しい流速を与える t の値を t_m とすれば，(14) 式の右辺の t に t_m を入れたとき，左辺の v の値は，$v_m=(1/18)(5v_{0.113}+8v_{0.500}+5v_{0.887})$ となるから，

$$(1/18)(5v_{0.113}+8v_{0.500}+5v_{0.887})=v_{0.500}-(\sqrt{15}/6)(v_{0.113}-v_{0.887})t_m-(5/6)\{2v_{0.500}-(v_{0.113}+v_{0.887})\}t_m^2$$
$$\therefore\ 2v_{0.500}-(v_{0.113}+v_{0.887})=(3\sqrt{15}/5)(v_{0.113}-v_{0.887})\}t_m+3\{2v_{0.500}-(v_{0.113}+v_{0.887})\}t_m^2 \quad (15)$$

つぎに，最大流速の位置を t_0 とし，(14) 式の右辺を t に関して微分して 0 とおけば，

$$-\{2v_{0.500}-(v_{0.113}+v_{0.887})\}\,t_0=(\sqrt{15}/10)(v_{0.113}-v_{0.887}) \cdots\cdots(16)$$

(16) 式を (15) 式の右辺の第 1 項に入れれば，実測値のすべてが消去されて，つぎの関係式がえられる。

$$3t_m^2-6t_0t_m-1=0 \cdots\cdots(17)$$

いま，平均流速，最大流速を与える点の深さをそれぞれ z_m, z_0 とすれば，(2) 式より，

$$z_m=h(1+t_m)/2\ \therefore\ t_m=2(z_m/h)-1=2\beta-1 \cdots(18)$$
$$z_0=h(1+t_0)/2\ \therefore\ t_0=2(z_0/h)-1=2\alpha-1 \cdots\cdots(19)$$

これらを (17) 式に入れて，β を α で表わせば，

$$\beta=\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\alpha+(1/3)} \cdots\cdots(20)$$

ここに，β: 水表面より平均流速の位置までの深さの割合，

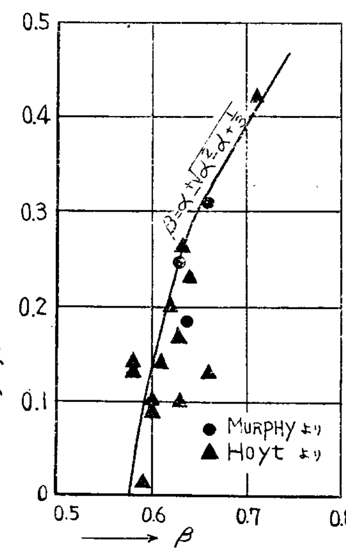
α: 水表面より最大流速の位置までの深さの割合。

(20) 式の関係は，垂直流速曲線が 2 次抛物線ならば必ず成立すべきものであつて，逆に，この関係が満足されているならば，その垂直流速曲線は，2 次抛物線であると断定しても差支えないであろう。

自然河川の個々の垂直流速曲線について検討してみると，流れの中央部の垂直流速曲線は，水深，河巾，流速の大きさ，河底の粗度などには無関係に 2 次抛物線を呈し，(20)式の関係が満足されているが，岸の近傍では，垂直流速曲線は，直線状をなすこともあれば対数曲線状をなすこともあり，さらには，4 次あるいはそれ以上の次数の曲線となることもあつて，曲線形は一定していない。したがつて，岸の近傍では，(20) 式の関係は満足されていないのが普通である。

図—2 は，E. C. Murphy の著書[6] および J. C. Hoyt の論文[7]から，それぞれ，Cornell 大学水理実験室での実験結果 (1900年)，および，アメリカの各地方の自然河川での実測結果 (1905～1910年) を摘出し，図示したものである。ただし，α の値が 0.00 と記録されている資料は採用しなかつた。その理由は，つぎのとおりである。

図—2



E. C. Murphy の数多くの観測の結果からいうと β の値は，水深が大きいほど，また，水深と河巾との比が大きいほど，大きくなるものである[8]。(20) 式より，β は α の増加函数となるから，上の結論は，そのまま，α の値の大小にも適用できる。したがつて，水深が浅く，水面巾が広い場合には，α の値は負となることが考えられる。すなわち，このような場合には，最大流速を与える点，数学的にいえば極大点が，水面下に生じないで，水面よりも上方にあると考えら

れる。このようなときにも，便宜上，α を最大流速の深さの割合とよぶこととする。ところが，Murphy の実験のうち，水深が浅い（15〜60 cm）1 組の実験では，実際の最大流速が水表面において観測されたため，最大流速の位置の割合を 0.00（彼の著書では，最大流速の位置の割合を，河底から測つているため，1.00 と記録されている）と記したものである。Hoyt の文献における 0.00 の数値も，その意味するところは，上と同じである。したがつて，これらの著書や論文にいうところの最大流速の位置の割合と，筆者の考えている α とは，$\alpha \geqq 0$ の場合に一致し，$\alpha < 0$ の場合に一致しない。

合理的な垂直流速曲線式を誘導するために，α の負の値をも考慮しなければならないことについては，β の値の範囲についての考察や，既往の観測値に対する補正などによつて明らかとなるが，これらについてはつぎの論文に譲ることとする。

さて，**図—2** より明らかなように，実測値の多くは最大 10% の誤差をともなつてはいるが，(20)式の表わす曲線の近傍に集まつている。United States Geological Survey によつて行われた自然河川での実験は，相当大々的に，かつ，精密に実施されたものであるから，個々の垂直流速曲線についての生まの資料は信頼されるべきものである。しかし，これらの資料から計算して 1 つの正断面についての平均値として考えると最大 10% の誤差をともなうのである。これは，前にものべたように，主として岸の近傍での垂直流速曲線が 2 次抛物線でないのに基因する。

ところで，ここで，Murphy が採用した，全断面での平均流速の求め方について少しくのべておく必要がある。この方法は，普通法（Ordinary method）とよばれていたもので，人工水路のように巾に沿つて深さが等しい場合には，巾に沿つて数個の観測点をとり，各観測点下に，4，5 点をえらんで，横方向の各点はすべて同高とし，同時に流速計を挿入してえた流速の平均をもつて，その高さの流速とする。このように，各高さについて平均の流速を求め，これらを方眼紙上にとり，これらを通る曲線をもつて，その全断面の平均の垂直流速曲線とし，これから，平均流速の大きさやその位置，および，最大流速の大きさや位置などを求めるのである。しかし，この方法は，相当大きな誤差をともなうように思われ，Murphy が，63 個の断面で行つた，流速計による流量と堰による流量との比較実験では，最大 27.75% の誤差を示し，20% 以上の誤差は 6 個，10〜20% の誤差は 8 個，5〜10% の誤差は 16 個で，1% 以下の誤差はわづか 8 個に過ぎない。Murphy は，このような誤差について，流速計の性能や検定の際の誤差などによつて説明しているが，これには相当無理な点が看取される。このような誤差は，全く，普通法の非合理性によるもので，生まの資料を使用して平均値法を用いるならば，誤差は 1% 以内に収めうると筆者は確信している。これらの実際の計算方法とその結果については，後の論文の既往の観測値に対する補正の項でのべることとする。

普通法によつて求められた個々の断面についての平均流速の位置と最大流速の位置との関係を図示すると（前にのべた理由によつて，α が 0.00 と記録されているものを除いた 47 個），(20) 式の曲線からは相当に偏移し，20〜30% の誤差をともなう点が数多く散在する。したがつて，47 個の値を 3 つの組にわけ，その平均をとつて図示された**図—2** の・の 3 点が，(20) 式の曲線の近傍にあるのは，全く偶然というのほかはない。

Hoyt の論文よりとつた値は，普通法によつて求められたものではなく，個々の垂直流速曲線に，その付近の微小面積を掛けたものの総和として全流量を求めるという方法によつたものであろうから，これは相当な精度をもつものと考えられる。

そこで，**図—2** から明らかなことは，全断面についての平均流速の位置の深さと最大流速の位置の深さとの間にも，個々の垂直流速曲線におけると同じ (20) 式の関係が，ほぼ成立しているものと考えられる。

5. 垂直流速曲線式の誘導

垂直流速曲線が 2 次抛物線であると考えられるとき **4.** の結果を用いて，曲線式を誘導する。曲線式には，つぎの諸量を含ませるのが合理的であると考えられる。すなわち，(i) 平均流速 $v_m = C\sqrt{Ih}$（C : Chézy の流速係数，I : 水面勾配，h : 水深），(ii) 最大流速の深さの割合 α，(iii) 表面流速 v_s と平均流速 v_m との比 k（表面流速を考慮するのは，無風，順風，逆風などにより，表面流速の値が異なり，曲線式に影響を与えるからである）。

そこで，曲線式をつぎのようにおいても，決して一般性を失わない。

$$v = \sqrt{Ih}\{C + f(z/h)\} \qquad (21)$$

ここに，$f(z/h) = a(z^2/h^2) + b(z/h) + c \qquad (22)$

(21) 式と (22) 式とより，明らかに，

$$f(\beta) = a\beta^2 + b\beta + c = 0$$

これに，(20) 式の関係を入れると，

$$a\{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \alpha + (1/3)}\}^2 + b\{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \alpha + (1/3)}\} + c = 0 \qquad (a)$$

また，$(dv/dz)_{z/h=\alpha} = 0$ であるから，

$$\sqrt{Ih}\,(1/h)(2a\alpha+b)=0 \quad \therefore\ b=-2a\alpha \cdots\cdots(b)$$

(b) を (a) に入れて c を求めれば，

$$c=a\{\alpha-(1/3)\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(c)$$

(b), (c) を (21) 式に入れれば，

$$v=\sqrt{Ih}\,\{C+a(\alpha-\frac{1}{3}-2\alpha\frac{z}{h}+\frac{z^2}{h^2})\} \cdots(23)$$

Bazin の公式[9]は，(23)式において，$\alpha=0, a=-24$ とおいてえられる特別な場合であり，安芸博士の公式[10]は，(23) 式において，$a=-20$ とおいてえられる。

(23) 式において，$z=0$ としたとき，$v=v_s$ とすれば，

$$v_s=\sqrt{Ih}\,[C+a\{\alpha-(1/3)\}] \cdots\cdots\cdots\cdots(d)$$

$v_s=kv_m=kC\sqrt{Ih}$ として，(d) 式より a を定めれば，

$$a=C(k-1)/\{\alpha-(1/3)\}$$

この結果を (23) 式に入れれば，つぎの垂直流速曲線式がえられる。

$$v=\frac{C\sqrt{Ih}}{p}\left(pk+2\alpha\frac{z}{h}-\frac{z^2}{h^2}\right)\left[p=\frac{1-3\alpha}{3(k-1)}\right]\cdots(24)$$

(24) 式は，最大流速の位置の割合 α，表面流速と平均流速との比 k が含まれているが，これがどのような値になるかについての検討は，つぎの論文に譲ることとする。

6. 結　語

（1） 垂直流速曲線の次数を決定するには，平均値法によつて誘導した2点法，3点法の式(8), (9)と，2. で誘導した補助式 (10)～(12) とを交互に用い，両方から計算された平均流速 v_m の値が一致するとき，その補助式に誤差をともなわない最高次数をもつて，曲線の次数とする。

（2） 水面巾が水深に比してきわめて大きい普通の水路において，流れの中央部の垂直流速曲線は，水深，河巾，流速の大きさ，河底の粗度などには無関係に2次抛物線を呈し，水表面より平均流速の位置までの深さの割合 β と水表面より最大流速の位置までの深さの割合 α との間には，

$$\beta \doteqdot \alpha \pm \sqrt{\alpha^2-\alpha+(1/3)}$$

の関係があり，この関係は，全断面のそれぞれの平均値の間にもほぼ成立する。

（3） 流れの中央部の垂直流速曲線は，つぎの式で与えられる。

$$v=\frac{C\sqrt{Ih}}{p}\left(pk+2\alpha\frac{z}{h}-\frac{z^2}{h^2}\right)\left[p=\frac{1-3\alpha}{3(k-1)}\right]$$

ここに，C：Chézy の流速係数，I：水面勾配，h：水深，α：水表面より最大流速の位置までの深さの割合，k：表面流速と平均流速との比。

参 考 文 献

1) 拙著：平均値法による流量算定式について（土木学会誌，第 38 巻，第7号）
2), 3) 拙著：自然科学のための数学汎論（微積分・数値計算）
4), 7) J.C. Hoyt : The use and care of the current meter, as practiced by the United States Geological Survey (Trans. of A.S.C.E. Vol.66)
5), 10) 安芸皎一：浮子特に竿浮子に依る観測流速の更正係数に就て（土木学会誌，第 18 巻，第1号）
6), 8) E.C. Murphy : Accuracy of discharge measurements
9) 土木学会：水理公式集

（昭.28.5.14）

最新刊

土木工学便覧 改訂版

青木楠男・安芸皎一・岩崎馨吉・当山道三・沼田政矩・福田武雄・堀越一三・米屋秀三 編　A6判 400頁 価380円 〒30

多岐広汎なる土木工学の全分野から，重要な法則・公式・数値等を選んでこれを集録し，土木関係職場における必備の書たらんことを期したもので，旧域の改訂に当つて，とくに至便な形態とし，データや法規等最新のものを収めすべての点に完璧を期したポケットブックの決定版である。

◆土木技術双書◆

東北大助教授・工博　河上房義著
土堰堤の設計　A5判 110頁 予価180円 〒30

芳賀公介・杉山光郎著
コンクリート用骨材　A5判 86頁 予価160円 〒30

近刊　北川 敏男　AEコンクリートの特性
　　　八木原万吉　コンクリート型枠

図書目録送呈・東京都神田局区内駿河台3・振替東京 57035 番　共立出版株式会社