

# ゲルバー梁の振動性状について(補遺)

正員 工学博士 小西 一郎\*  
准員 小松 定夫\*\*

## ON THE VIBRATION CHARACTERISTICS OF A GERBER BEAM (SUPPLEMENT)

(JSCE Sept. 1953)

Dr. Eng., Ichirō Konishi, C.E. Member and Sadao Komatsu, C.E. Assoc. Member

**Synopsis** Extending the previous report, which treated the vibration problem of a two span Gerber beam<sup>1)</sup>, the vibration characteristics of a three span Gerber beam were investigated. In the present paper, a Gerber beam are transformed into a simple beam with proper reactions and moments. These reactions and moments are introduced into the differential equation of bending vibration of a simple beam and using the characteristics of Laplace transformation, normal function is obtained. These methods are also applied to a Gerber beam with variable cross section. The procedures are illustrated by the calculation for a specific Gerber beam. From these considerations, general conclusions obtained in the previous report were ascertained.

### 1. 緒 言

著者は先に2スパン等断面ゲルバー梁について動力的な解析を行い<sup>1)</sup>, その振動性状の一端を究明する企みを述べたが, さらに本文において3スパンのゲルバー梁について動力的考察を行うこととした。ここでは新しい函数を導いて基礎微分方程式を組立て, Laplace 変換の特性を利用して正規函数を求めた。次に変断面梁にも拡張できることを示し, 等断面の場合と比較した。

以上のことによつて前報告の性状が一般性を有することを確かめることができた。

### 2. 3 スパングルバー梁の固有振動

図-1(a)に示す等断面のゲルバー梁 AF とスパン, 断面寸法及び材質が相等しい単純梁 A'F'(図-1(b)) を考える。梁 AF が振動中に支点 B 及び E で受ける反力  $R_B$  及び  $R_E$  に等しい周期的集中外力を, 単純梁 A'F' の対応点 B', E' に作用させる。さらにゲルバ

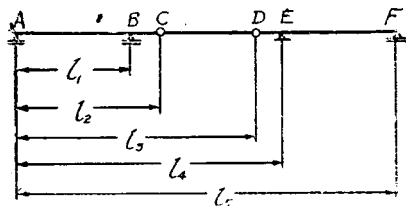


図-1 (a)

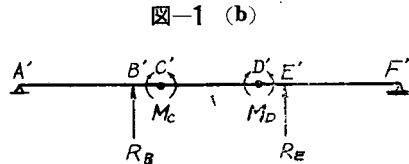


図-1 (b)

ー梁のヒンジ C, D に対応する単純梁上の 2 点 C', D' にはそれぞれ外力モーメント  $M_C, M_D$  を働かせて, 事実上それらの点で曲げモーメントが消滅するようにする。このような周期的作用力を受けつつ振動する単純梁 A'F' は, 問題のゲルバー梁と全く同等の振動性を呈する。そこで支点反力と周期的モーメントを次のように基礎微分方程式に導入した。

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = g(x, t) \dots\dots\dots (1)$$

ここに  $E$ : ヤング率,  $I$ : 断面次 2 次モーメント,  
 $\rho$ : 材料の密度,  $A$ : 断面積,

$$g(x, t) = R_B U_i(x-l_1) + h M_C U_m(x-l_2) + h M_D U_m(x-l_3) + R_E U_i(x-l_4) \dots\dots (2)$$

$U_i$ : Unit impulse function,

$$U_m = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{2U(x-l-\epsilon) - U(x-l-2\epsilon) + U(x-l+2\epsilon) - 2U(x-l+\epsilon)}{\epsilon^3}$$

$U$ : Unit step function,  $h$ : 長さの元をもつ常数  
 $y(x, t)$  は正規函数  $Y(x)$  と時間函数  $q(t)$  とで次のように表現できる。

$$y(x, t) = q(t) \cdot Y(x)$$

$R$  及び  $M$  についても  $q(t)$  を用いて

$$R(t) = q(t) \cdot R_0, \quad M(t) = q(t) \cdot M_0$$

\* 京都大学教授, 工学部土木工学教室  
\*\* 大阪市立大学理工学部土木工学教室  
1) 小西・小松: ゲルバー梁の振動性状について, 土木学会誌, 38 巻, 2 号, pp. 58-62, 1953

ここに  $R_0, M_0$  はそれぞれ  $R, M$  の振巾ともい  
べき常数である。よつて助変数  $\lambda$  を導入して 2 つの  
式に分離できる。

$$\ddot{q}(t) + \frac{EI}{\rho A} \lambda^4 q(t) = 0 \dots\dots\dots (3)$$

$$\frac{d^4 Y}{dx^4} - \lambda^4 Y = \frac{g_0(x)}{EI} \dots\dots\dots (4)^*$$

$$Y(x) = \frac{Y''(0)}{2\lambda} (\sinh \lambda x + \sin \lambda x) + \frac{Y'''(0)}{2\lambda^3} (\sinh \lambda x - \sin \lambda x) \\ + \frac{R_0 B}{2EI\lambda^3} [\sinh \lambda(x-l_1) - \sin \lambda(x-l_1)] \cdot U(x-l_1) \\ + \frac{hM_0 C}{EI\lambda} [\sinh \lambda(x-l_2) + \sin \lambda(x-l_2)] \cdot U(x-l_2) \\ + \frac{hM_0 D}{EI\lambda} [\sinh \lambda(x-l_3) + \sin \lambda(x-l_3)] \cdot U(x-l_3) \\ + \frac{R_0 E}{2EI\lambda^3} [\sinh \lambda(x-l_4) - \sin \lambda(x-l_4)] \cdot U(x-l_4) \dots\dots\dots (5)$$

次に支点 B, E, F 及びヒンジ C, D における境界  
条件を採用すれば、計 6 個の未知数を含む 6 個の式が  
えられる。これらより未知係数 1 個を残し、係数間の

$$* \text{ここに } g_0(x) = R_0 B U_l(x-l_1) + hM_0 C U_m(x-l_2) \\ + hM_0 D U_m(x-l_3) + R_0 E U_l(x-l_4)$$

方程式 (4) の両辺を Laplace 変換する、

$$\mathfrak{L}\{Y(x)\} = [s^2 Y'(0) + Y'''(0) \\ + \mathfrak{L}\{g_0(x)\}/EI] / (s^4 - \lambda^4)$$

これより逆変換すれば正規函数の形状は

比が決定するはずである。そうすれば正規函数  $Y(x)$   
が決る。次に未知係数全部を消去すれば次のような振  
動数方程式をうる。

$\sinh \lambda l_1,$	$-\sin \lambda l_1,$	$0$	= 0 \dots\dots (6)
$\sinh \lambda l_2,$	$\sin \lambda l_2,$	$\sinh \lambda(l_2-l_1) + \sin \lambda(l_2-l_1),$	
$\sinh \lambda l_3,$	$\sin \lambda l_3,$	$\sinh \lambda(l_3-l_1) + \sin \lambda(l_3-l_1),$	
$\sinh \lambda l_4,$	$-\sin \lambda l_4,$	$\sinh \lambda(l_4-l_1) - \sin \lambda(l_4-l_1),$	
$0$	$-\sin \lambda l_5,$	$-\sin \lambda(l_5-l_1),$	
$\sinh \lambda l_5,$	$0$	$\sinh \lambda(l_5-l_1),$	
$0$	$0$	$0$	
$0$	$0$	$0$	
$\sinh \lambda(l_3-l_2) - \sin \lambda(l_3-l_2),$	$0$	$0$	
$\sinh \lambda(l_4-l_2) + \sin \lambda(l_4-l_2),$	$\sinh \lambda(l_4-l_3) + \sin \lambda(l_4-l_3),$	$0$	
$\sin \lambda(l_5-l_2)$	$\sin \lambda(l_5-l_3)$	$-\sin \lambda(l_5-l_4)$	
$\sinh \lambda(l_5-l_2)$	$\sinh \lambda(l_5-l_3)$	$\sinh \lambda(l_5-l_4)$	

一方において方程式 (3) を解けば 周知のように常  
数  $A_j, \varepsilon_j$  として

$$q_j(t) = A_j \sin(\alpha_j t + \varepsilon_j) \dots\dots\dots (7)$$

をうる。ここに

$$\alpha_j = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \lambda_j^2 \dots\dots\dots (8)$$

であつて  $\lambda_j$  は振動数方程式 (6) の第  $j$  番目の根で  
ある。この  $\lambda_j$  を正規函数  $Y(x)$  の式中に採用すれば  
任意常数 1 個を含み第  $j$  次振動の函数  $Y_j(x)$  が確  
定する。

3. 強制減衰振動

(1) 固定周期力 梁上の 1 定点  $x=\xi$  に周期的強  
制力  $F = F_0 e^{i\omega t}$  が働くときの基礎微分方程式は

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2K\rho A \frac{\partial y}{\partial t} = g(x, t) \quad *$$

$$* + F_0 e^{i\omega t} U_l(x-\xi) \dots\dots\dots (9)$$

いま固有振動の第  $j$  次正規函数  $Y_j(x)$  を用いて、  
一般振動変位  $y$  を次の級数に展開する。また  $g(x, t)$   
についても同じ取扱いができて

$$y = \sum_{j=1}^{\infty} q_j(t) Y_j(x), \quad g = \sum_{j=1}^{\infty} q_j(t) g_0(x) \dots\dots (10)$$

これらを原方程式 (9) に代入し  $Y_j(x)$  が方程式 (4)  
を満足することに注目すれば

$$\rho A \left[ \sum_{j=1}^{\infty} \ddot{q}_j(t) Y_j(x) + \sum_{j=1}^{\infty} q_j(t) \alpha_j^2 Y_j(x) \right. \\ \left. + 2K \sum_{j=1}^{\infty} \dot{q}_j(t) Y_j(x) \right] = F_0 e^{i\omega t} U_l(x-\xi)$$

上式の両辺に  $Y_j(x)$  を乗じて  $x$  につき梁の全長にわ  
たつて積分すれば直交性により

$$\int_0^{l_5} Y_s(x) Y_r(x) dx = 0 \quad (s \neq r) \\ = M_j \quad (s=r) \dots\dots\dots (11)$$

で、結局

$$\ddot{q}_j(t) + 2K\dot{q}_j(t) + \alpha_j^2 q_j(t) = F_0 e^{i\omega t} Y_j(t) / \rho A M_j \dots\dots\dots (12)$$

この方程式の  $F = F_0 \sin \omega t$  に対する解は

$$q_j(t) = \frac{F_0 Y_j(t)}{\rho A M_j \sqrt{(\omega^2 - \alpha_j^2)^2 + 4K^2 \omega^2}} \left[ -\frac{\omega}{\omega_f} e^{-Kt} \times \sin(\omega_f t + \delta_1) + \sin(\omega t + \delta_2) \right] \dots\dots\dots (13)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \omega_f &= \sqrt{\alpha_j^2 - K^2}, \\ \delta_1 &= \tan^{-1} \frac{2\omega_f K}{\omega^2 - \alpha_j^2 + 2K^2}, \quad \delta_2 = \tan^{-1} \frac{2\omega K}{\omega^2 - \alpha_j^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

$$\begin{aligned} q_j(t) &= \frac{a_j'}{\sqrt{(\alpha_j^2 + \lambda_j^2 v^2)^2 - 4\lambda_j^2 v^2 K^2}} \left\{ \left[ \frac{\lambda_j v}{\omega_f} e^{-Kt} \sin(\omega_f t + \vartheta_i) + \sinh(\lambda_j vt + \zeta_j) \right] \right. \\ &+ b_j \left[ \frac{\lambda_j v}{\omega_f} e^{-K(t - \frac{l_1}{v})} \sin\left(\omega_f t - \frac{l_1}{v} + \vartheta_j\right) + \sinh(\lambda_j vt - l_1 + \zeta_j) \right] \cdot U\left(t - \frac{l_1}{v}\right) + c_j \left[ \frac{\lambda_j v}{\omega_f} e^{-K(t - \frac{l_2}{v})} \sin\right. \\ &\left. \left(\omega_f t - \frac{l_2}{v} + \vartheta_j\right) + \sinh(\lambda_j vt - l_2 + \zeta_j) \right] \cdot U\left(t - \frac{l_2}{v}\right) + d_j \left[ \frac{\lambda_j v}{\omega_f} e^{-K(t - \frac{l_3}{v})} \sin\left(\omega_f t - \frac{l_3}{v} + \vartheta_j\right) \right. \\ &+ \sinh(\lambda_j vt - l_3 + \zeta_j) \left. \right] \cdot U\left(t - \frac{l_3}{v}\right) + e_j \left[ \frac{\lambda_j v}{\omega_f} e^{-K(t - \frac{l_4}{v})} \sin\left(\omega_f t - \frac{l_4}{v} + \vartheta_j\right) + \sinh(\lambda_j vt - l_4 \right. \\ &+ \zeta_j) \left. \right] \cdot U\left(t - \frac{l_4}{v}\right) \left. \right\} + \frac{a_j'}{\sqrt{(\alpha_j^2 - \lambda_j^2 v^2)^2 + 4\lambda_j^2 v^2 K^2}} \left\{ a_j \left[ \frac{\lambda_j v}{\omega_f} e^{-Kt} \sin(\omega_f t + \nu_j) + \sin(\lambda_j vt + \varphi_j) \right] \right. \\ &- b_j \left[ \frac{\lambda_j v}{\omega_f} e^{-K(t - \frac{l_1}{v})} \sin\left(\omega_f t - \frac{l_1}{v} + \nu_j\right) + \sin(\lambda_j vt - l_1 + \varphi_j) \right] \cdot U\left(t - \frac{l_1}{v}\right) \\ &+ c_j \left[ \frac{\lambda_j v}{\omega_f} e^{-K(t - \frac{l_2}{v})} \sin\left(\omega_f t - \frac{l_2}{v} + \nu_j\right) + \sin(\lambda_j vt - l_2 + \varphi_j) \right] \cdot U\left(t - \frac{l_2}{v}\right) + d_j \left[ \frac{\lambda_j v}{\omega_f} e^{-K(t - \frac{l_3}{v})} \right. \\ &\left. \sin\left(\omega_f t - \frac{l_3}{v} + \nu_j\right) + \sin(\lambda_j vt - l_3 + \varphi_j) \right] \cdot U\left(t - \frac{l_3}{v}\right) - e_j \left[ \frac{\lambda_j v}{\omega_f} e^{-K(t - \frac{l_4}{v})} \sin\left(\omega_f t - \frac{l_4}{v} \right. \right. \\ &\left. \left. + \nu_j\right) + \sin(\lambda_j vt - l_4 + \varphi_j) \right] \cdot U\left(t - \frac{l_4}{v}\right) \left. \right\} \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ここに } \vartheta_j &= \tan^{-1} \frac{-2\omega_f K}{\alpha_j^2 + \lambda_j^2 v^2 - 2K^2}, \\ \nu_j &= \tan^{-1} \frac{-2\omega_f K}{\alpha_j^2 - \lambda_j^2 v^2 - 2K^2}, \\ \zeta_j &= \tanh^{-1} \frac{-2\lambda_j v K}{\alpha_j^2 + \lambda_j^2 v^2}, \\ \varphi_j &= \tan^{-1} \frac{-2\lambda_j v K}{\alpha_j^2 - \lambda_j^2 v^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

そして  $a_j'$  は任意常数,  $a_j, b_j, c_j, d_j, e_j$  は既知常数である。

(3) 移行する周期力 一定速度  $v$  で移動する周期外力  $F = F_0 e^{i\omega t}$  が働く場合には基礎微分方程式は

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2K\rho A \frac{\partial y}{\partial t} = g(x, t) + F_0 e^{i\omega t} \cdot U_t(x-vt) \dots\dots\dots (19)$$

これも (1) 項と同じくして

$$\ddot{Y}_j(t) + 2K\dot{Y}_j + \alpha_j^2 Y_j = F_0 e^{i\omega t} Y_j(vt) / \rho A M_j \dots\dots\dots (20)$$

\* (2) 移行する一定強制力 一定大きさ  $F_0$  の強制力が左支点 A から右へ一定速度  $v$  で走行するときは基礎微分方程式として

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2K\rho A \frac{\partial y}{\partial t} = g(x, t) + F_0 U_t(x-vt) \dots\dots\dots (15)$$

(1) 項の場合と同じ計算過程をへて

$$\ddot{Y}_j(t) + 2K\dot{Y}_j(t) + \alpha_j^2 Y_j(t) = F_0 Y_j(vt) / \rho A M_j \dots\dots\dots (16)$$

ここに  $Y_j(vt)$  は式 (5) の  $x$  に  $vt$  を代入したものをこれを解けば、

この方程式も Laplace 変換を利用してとけた。

4. 変断面梁の固有振動

実際のゲルバー橋梁では変断面形状となつている。そこで変断面の場合にその固有振動周期がどの程度変わるかについて考察してみる。このとき基礎微分方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = g(x, t) \dots\dots\dots (21)$$

そこで Ritz の方法を応用することにする。等断面梁ですでに求められた正規函数  $Y_j(x)$  は明らかに境界条件を満足するのでこの函数を用いて方程式 (21) の解を近似的に次のように表わす。

$$Y(x) = \sum_{j=1}^m C_j Y_j(x) \dots\dots\dots (22)$$

式 (22) を Ritz の式すなわち

$$\frac{\partial}{\partial C_j} \int_0^{l_0} \left[ EI \left( \frac{d^2 Y}{dx^2} \right)^2 - \alpha^2 \rho A Y^2 \right] dx = 0$$

に入ると  $C_j$  についての  $m$  個の同次方程式をうる。

$$\sum_{j=1}^m C_j \int_0^{l_5} \left[ \frac{I(x)}{I_c} \frac{d^2 Y_j}{dx^2} - \lambda^4 \frac{A(x)}{A_c} Y_j \right] dx = 0$$

$$r=1, 2, \dots, m, \dots \dots \dots (23)$$

ここに  $I_c, A_c$  はそれぞれ平均断面 2 次モーメント, 平均断面積で

$$I_c = \frac{1}{l_5} \int_0^{l_5} I(x) dx, \quad A_c = \frac{1}{l_5} \int_0^{l_5} A(x) dx \dots (24)$$

式 (23) より未知係数  $C_j$  の中の 1 個を残し, 係数間の比が定まる。また  $C_j$  を全部消去して  $\lambda$  を含む振動数方程式がえられる。これより根  $\lambda_j$  を求めれば第  $j$  次固有振動周期は

$$T_j = 2 \pi \sqrt{\rho A_c / \lambda_j^2 \sqrt{E I_c}} \dots \dots \dots (25)*$$

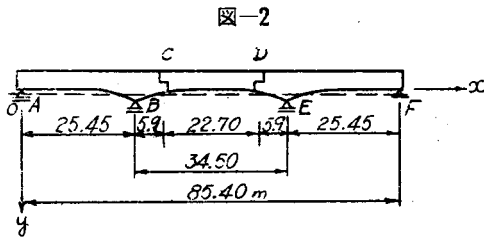
$$\begin{vmatrix} \sinh \lambda l_1, & \sin \lambda l_1, & 0 & , & 0 \\ \sinh \lambda l_2, & -\sin \lambda l_2, & \sinh \lambda(l_2-l_1) + \sin \lambda(l_2-l_1), & , & 0 \\ 0 & , & \cos \lambda l_5/2, & -\cos \lambda(l_5/2-l_1) & , & \cos \lambda(l_5/2-l_2) \\ \cosh \lambda l_5/2, & 0 & , & \cosh \lambda(l_5/2-l_1) & , & \cosh \lambda(l_5/2-l_2) \end{vmatrix} = 0 \dots \dots \dots (26)$$

(2) 偶数 Mode (逆対称型振動)  $j=2, 4, 6 \dots$

$$\begin{vmatrix} \sinh \lambda l_1, & \sin \lambda l_1, & 0 & , & 0 \\ \sinh \lambda l_2, & -\sin \lambda l_2, & \sinh \lambda(l_2-l_1) + \sin \lambda(l_2-l_1), & , & 0 \\ 0 & , & \sin \lambda l_5/2, & -\sin \lambda(l_5/2-l_1) & , & \sin \lambda(l_5/2-l_2) \\ \sinh \lambda l_5/2, & 0 & , & \sinh \lambda(l_5/2-l_1) & , & \sinh \lambda(l_5/2-l_2) \end{vmatrix} = 0 \dots \dots \dots (27)$$

6. 数値計算例

図-2 のようなスパンを有し, 表-1 で示される各



部の断面 2 次モーメント及び断面積をもつ変断面ゲルバー梁について, その固有振動周期を計算してみた。

$$I_c = 9.698 \times 10^6 \text{ cm}^4, \quad A_c = 299.55 \text{ cm}^2$$

となりこれらの値を用いて, まづ平均断面  $I_c, A_c$  をもつ等断面梁の固有値を式 (26), (27) より求めてみると  $\beta_j = \lambda_j l_5$  として,

$$\beta_1 = 8.75, \beta_2 = 9.87, \beta_3 = 12.19, \beta_4 = 15.50, \beta_5 = 18.38$$

これらを用いて Normal Mode を計算すれば図-3 のようになる。

次に変断面梁の振動の正規函数  $Y(x)$  を

$$\left. \begin{aligned} \text{奇数 Mode は } & Y = C_1 Y_1 + C_3 Y_3, \\ \text{偶数 Mode は } & Y = C_2 Y_2 + C_4 Y_4 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (28)$$

$$\begin{vmatrix} 4529.45 - 0.70335 \times 8540^4 \lambda^4, & -1248.305 + 0.0052904 \times 8540^4 \lambda^4 \\ -1248.305 + 0.0052904 \times 8540^4 \lambda^4, & 13883.83 - 0.56019 \times 8540^4 \lambda^4 \end{vmatrix} = 0$$

\*5. 等断面对称形状のゲルバー梁

3 スパンゲルバー梁は通常左右対称の型式で用いられる。この特別な場合には正規函数は  $0 \leq x \leq l_5/2$  において

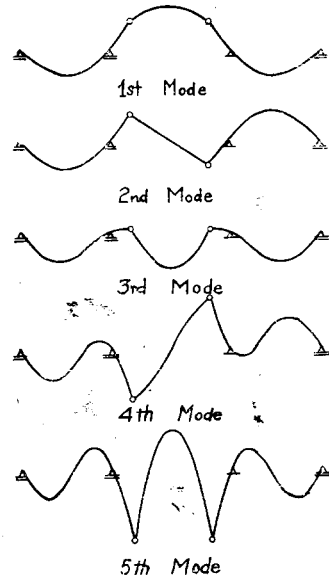
$$Y_j(x) = a_j' \{ \sin \lambda_j x + a_j \sinh \lambda_j x + b_j [ \sinh \lambda_j (x-l_1) - \sin \lambda_j (x-l_1) ] U(x-l_1) + c_j [ \sinh \lambda_j (x-l_2) + \sin \lambda_j (x-l_2) ] U(x-l_2) \}$$

の形式で与えられる。

次に振動数方程式は吊桁中点において考えられる境界条件を用いて次のように簡単化される。

(1) 奇数 Mode (対称型振動)  $j=1, 3, 5 \dots$

図-3 正規振動形 Normal Mode of Vibrations



として近似解を求めた。式 (23) を数値積分して次の振動数方程式をうる。

これより式 (25) を用いて周期を求めると

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= 0.203 \text{ sec} \quad (T_{1u} = 0.208 \text{ sec}) \\ T_3 &= 0.101 \text{ sec} \quad (T_{3u} = 0.107 \text{ sec}) \end{aligned} \right\} \dots (29)$$

$$\left| \begin{array}{cc} 3535.35 - 0.33034 \times 8540^4 \lambda^4, & -1156.830 - 0.057427 \times 8540^4 \lambda^4 \\ -1156.830 - 0.057427 \times 8540^4 \lambda^4, & 57830.47 - 0.63954 \times 8540^4 \lambda^4 \end{array} \right| = 0$$

$T_{1u}, T_{3u}$  はそれぞれ等断面梁の第1次, 第3次の固有振動周期である。同じようにして逆対称型については

表-1 桁断面諸量

$x/l_5$	$x(m)$	$I(\text{cm}^4)$	$A(\text{cm}^2)$	$I/I_c$	$A/A_c$
0 (支点A)	0	$4.934 \times 10^5$	210	0.50876	0.70107
0.04	3.44	7.214	264	0.74386	0.88134
0.08	6.88	9.564	318	0.98370	1.06161
0.12	10.3	11.994	372	1.25674	1.24189
0.16	13.75	9.564	318	0.98370	1.06161
0.20	17.2	7.214	264	0.74386	0.88134
0.24	20.6	7.214	264	0.74386	0.88134
0.28	24.1	15.400	349	1.58794	1.16510
(支点B)	25.45	23.559	391.5	2.42924	1.30699
0.32	27.5	15.400	349	1.58794	1.16519
0.36	31.0	4.934	210	0.50876	0.70107
0.40	34.4	4.934	210	0.50876	0.70107
0.44	37.8	9.819	324	1.01247	1.08164
0.48	41.3	12.379	381	1.27643	1.27193
0.50	43.0	12.379	381	1.27643	1.27193

これより

$$T_2 = 0.156 \text{ sec} \quad (T_{2u} = 0.165 \text{ sec.})$$

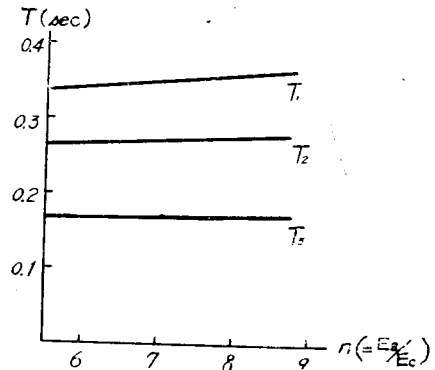
式 (29) より  $100(T_1 - T_{1u})/T_1 = 2.5$  すなわち第1次固有振動周期は等断面として計算してもその誤差は本例では 2.5% にすぎない。

以上は質量  $\rho A$  及び剛性  $EI$  とともに橋梁の主桁のみを考えたものであるが、実際の橋梁においては床版その他の附加構造物がある。 $\rho A$  は全橋梁重量を考えれば、主桁以外の部分の重量が主桁に比し相当大きいので式 (21) 中の  $\rho A$  を取扱う際には  $\rho A$  を常数とし、単位長さあたりの重量  $\text{kg/cm}$  を採用してもよい。よつて以後はこの方針に従うことにする。剛性については振動中のような低応力状態においては床板が主桁と一体になつて合成されて曲げモーメントに抵抗しているものと考えられる。従つて合成桁としての各部の鋼に換算した断面2次モーメント  $I_0$  を  $n = E_s/E_c$  が 6, 7, 8 の 3 つの場合について計算すれば表-2 に示すようになる。その結果固有振動周期と  $n$  との関係を図示すれば図-4 のようになる。予想のように  $n=6$  は  $n=8$  に比し短かい周期であるが  $n$  の差異による  $T$  の変化は微小であることが認められる。なお  $n=8$  の場合に合成された平均断面2次モーメントを持つ等断面梁を仮定し、その1次固有振動周期  $(T_{1u})_{n=8}$  を求めれば  $(T_{1u})_{n=8} = 0.367(\text{sec})$  となる。これに対して変

表-2  $I_V$  の値

$x/l_5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$
0 (支点A)	13.605	13.151	12.743
0.04	17.259	16.655	16.120
0.08	20.783	20.035	19.381
0.12	24.228	23.344	22.579
0.16	20.783	20.035	19.381
0.20	17.259	16.655	16.120
0.24	17.259	16.655	16.120
0.28	29.256	28.287	27.444
(支点B)	47.338	45.578	44.060
0.32	29.256	28.287	27.444
0.36	13.605	13.151	12.743
0.40	13.605	13.151	12.743
0.44	21.158	20.395	19.728
0.48	24.769	23.864	23.081
0.50	24.769	23.864	23.081
平均断面2次モーメント	20.606	20.352	19.728

図-4  $T-n$  曲線  
 $T-n$  Curves



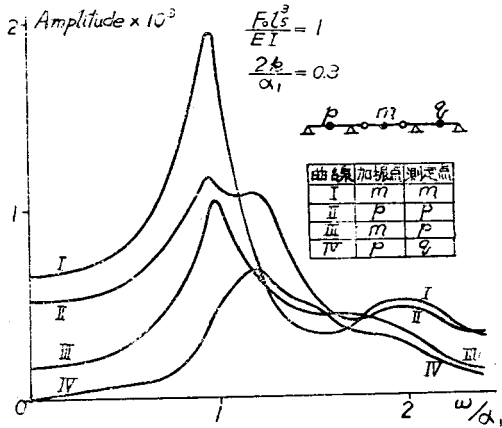
断面梁としての計算値  $(T_1)_{n=8}$  は図示のように  $(T_1)_{n=8} = 0.356 \text{ sec}$  従つて  $(T_{1u})_{n=8}$  との誤差の百分率は 3.0% 弱である。式 (29) の数値とこの結果とを考慮合わせて、とにかく変断面としての計算値が平均断面の等断面梁としての計算値と比較して約 5% 以内の差異しか認められないことがわかる。だから実際のゲルバープレートガーダー橋の振動計算においては式(24)による等断面梁として計算しても差支えないと考えられる。

本数値計算例に用いたゲルバープレートガーダー

一橋についてさきに現地振動試験を実施したが、その固有周期の測定値は  $T_{1t} = 0.285 \text{ sec}$  であつて、 $n=6$  の場合の  $(T_1)_{n=6} = 0.340 \text{ sec}$  に比して  $T_{1t}/T_1 = 0.84$  すなわち 84% である。これは応力測定を行つた結果でも同程度の数値がでており、特に測定値と計算値との差異は他の原因によるものであると思われる。例えば (1) 本橋では高欄が鉄筋コンクリート造でかなりの剛性をもつこと。(2) 現地試験では起振機及び自動車の走行による共振から振動計を用いて測定したのであるから、その共振のピークは必ずしも理論的周期とは厳密には一致しないこと。(3) 試験の強制周期力は床板中の 1 点に集中する荷重であるが、これが床板より立体構造的に 4 本の主桁に伝達されるもので理論的考察の集中荷重の場合とは様子が違う。すなわち床板としての振動が橋梁全体の振動周期に影響している事実も考えられる。よつてわれわれがここに取扱つた単純化された梁の理論値の妥当性は上記の比較によつて決して否定されないと思う。

計算値を用いて共振曲線を画けば図-5 のようにな

図-5 共振曲線  
Resonance Curves

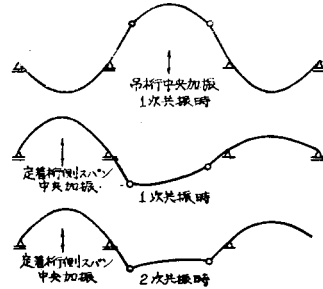


る。これより 3 スパングルバー梁の場合には定着桁中点加振し、同点を測定すれば共振のピークが 3 箇所で見られ、2 スパンの場合より山が 1 つ増える傾向がある。従つて一層共振の機会が多いことになる。そしてまたこの場合の振巾がかなり大きい。

固定周期力が働いたときの梁の振動形状を算出すれば図-6 のようになる。定着桁を加振した場合、反対

側の定着桁の振巾が小さいのは 逆対称型振動 Mode の影響のためである。

図-6 強制振動振巾  
Amplitudes by Forced Vibration



7. 結 語

- (1) 基礎微分方程式に立脚し、これに Laplace 変換を利用して固有振動、強制振動に関する解を求めた。
- (2) 対称型式のゲルバー梁について振動方程式の形を求めた。事例につき Normal Mode を示した。
- (3) 変断面の場合について Ritz の方法を用い、展開関数  $Y_j$  には等断面の正規関数を利用する。しかし変断面による、その振動周期に及ぼす影響はきわめて小さい。本計算例では約 5% 前後である。
- (4) 床板と鋼桁とが合成されている状態で振動しているとすれば、かなり実測値に近い計算値が得られた。従つてプレート ガーダー橋の振動を考える際には必ず床板を考慮に入れるべきである。
- (5) 固定周期力による共振曲線及び振動形状を示した。

なお、最初に  $M_{OC}, M_{OD}$  をともに 0 とすれば 3 スパン連続梁となり、 $R_{OB}, M_{OC}$  を 0 とすれば 2 スパングルバー梁の場合に一致する。もし対称形状の連続梁ならば 9 スパンの場合まで本文の方法で実用的に固有振動周期を求められるものと思う。

本研究は昭和 27 年度文部省科学試験研究「橋梁の耐荷力及び耐久力に関する研究」及び総合研究「橋梁の動力学的諸問題に関する研究」の成果の一部であつて、本研究に対する援助に対し深謝の意を表する。

(昭.28.6.6)