報　文

曲梁の歪エネルギーに対する新公式

正員　大　野　　諫*

NEW FORMULA FOR STRAIN ENERGY OF CURVED BEAM

(JSCE Sept. 1953)

Isamu Ōno, C.E. Member

Synopsis This paper presents the author's formula for strain energy of curved beam :

$$A_t=\int_0^{l_0}\frac{N_0^2}{2EF}ds_0+\int_0^{l_0}\frac{M_0^2}{2EJ_0}ds_0+\int_0^{l_0}\frac{\alpha}{2G}\frac{Q^2}{F}ds_0 \quad\cdots\cdots(1)$$

in which

$$J_0=Fer_0,\quad e=r_g-r_0,\quad r_0=\frac{F}{\displaystyle\int\frac{dF}{r}} \quad\cdots\cdots(2)$$

$$\alpha=\frac{1}{Fer_0^3}\int_{r_1}^{r_2}\frac{S^2(r)}{b(r)}rdr=\frac{r_0}{Fe^2}\int_{r_1}^{r_2}\frac{S'^2(r)}{b(r)\cdot r^3}dr \quad\cdots\cdots(3)$$

$$S(r)=\left(\frac{r_0}{r}\right)^2\int_{r_1}^{r}(r_g-r)dF=\left(\frac{r_0}{r}\right)^2S'(r) \quad\cdots\cdots(4)$$

For rectangular cross section ($F=bh=b\cdot 2a$)

$$\alpha=\frac{3er_g-a^2}{2e^2};\quad e=r_g-r_0,\quad r_0=h/\ln\frac{r_2}{r_1} \quad\cdots\cdots(5)$$

1. 緒　言

著者は土木学会誌，36巻，12号 (1951) において曲梁の歪エネルギーに対する新公式を提案したが，本論文においてはその誘導の方法をかえ，かつさらに剪力の項を追加することにした。すなわち (1) 式の誘導にあたり，今回は基本の仕事方程式

$$A_t=\int\frac{N}{2}\Delta ds+\int\frac{M}{2}\Delta d\varphi$$

から出発せずに，応力度 σ, τ の函数として表わした仕事方程式

$$A_t=\frac{1}{2}\int\!\!\int\Big[\frac{m+1}{mE}(\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2)-\frac{1}{mE}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)^2+\frac{1}{G}(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2)\Big]dV$$

を用うることにした。それはこの方が一般に何等技巧を要することなく公式の誘導に便利であるからである。

曲梁に対する歪エネルギーの公式として従来剪力に対してはその係数として近似的に直梁の場合の値を採用してきたが[1]，最近 Der Stahlbau, 21 Jahrgang, Heft 7, Juli, 1952 に転載されている Dr.-Ing. R. Kappus の曲梁の歪エネルギーの公式において初めて剪力の項に対し曲梁としての係数 α' が示されている (R. Kappus : Les contraintes de cisaillement dans les barres courbes, La Recherche Aéronautique 21, 1951, s. 49)。しかしモーメントと垂直力とに対する項が Timoshenko (Strength of Materials, Part II, 2nd. Edition, 1951, p.84) の公式と同様に式のまとめ方がまだ不充分である。

Kappus の曲梁の歪エネルギーに対する公式を原文のままの記号で書くと

$$\Pi_t=\frac{1}{2E}\int_0^l\left\{\frac{1+\kappa}{\kappa}\frac{M^2}{Fr^2}-\frac{2MN}{Fr}+\frac{N^2}{F}+\alpha'\frac{E}{G}\frac{Q^2}{F}\right\}ds \quad\cdots\cdots(1\,a)$$

$$\kappa=\frac{1}{F}\int\frac{y}{r-y}dF=\frac{1}{F}\int_{y_a}^{y_i}\frac{y\cdot b(y)}{r-y}dy \quad\cdots\cdots(2\,a)$$

$$\alpha'=\frac{1}{\kappa^2Fr}\int_{y_a}^{y_i}\frac{S^2(y)}{b(y)\cdot(r-y)^3}dy \quad\cdots\cdots(3\,a)$$

$$S(y)=+\int_y^{y_i}\bar{y}\cdot b(\bar{y})\cdot d\bar{y}=-\int_{y_a}^{y}\bar{y}\cdot b(\bar{y})\cdot d\bar{y} \quad\cdots\cdots(4\,a)$$

矩形断面 ($F=bh$) に対しては

* 徳島大学名誉教授，東京都立大学教授，工学部建設工学科

$$\alpha' = \frac{3\kappa - (h/2r)^2(1+\kappa)}{2\kappa^2},$$

$$\kappa = \frac{r}{h}\ln\frac{1+h/2r}{1-h/2r} - 1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5\,\mathrm{a})$$

または級数の形にして

$$\alpha' = \frac{6}{5} - \frac{72}{175}\left(\frac{h}{2r}\right)^2 - \frac{96}{875}\left(\frac{h}{2r}\right)^4 - \frac{19\,352}{336\,875}\left(\frac{h}{2r}\right)^6 - \cdots \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (5\,\mathrm{b})$$

r が h に対し大であれば 2 項以下はきわめて小さくなる。第1項の $\frac{6}{5}=1.2$ なる数値は直梁の歪エネルギーの剪断力の項に対する係数値に相当する(最上武雄: 応用力学, 下巻, p.47, ただしこの本の κ は α'/bh に相当する)。

しかして Kappus 氏はその結論において, 曲梁の応力度公式を直梁の場合と比べて $\kappa F r^2$ (Kappus の公式で r は重心軸の曲率半径を表わすから, ここでは以後それを明示するため r_g で表わし, また ds も重心軸の長さの成分を表わすから ds_g と書くことにする) を曲梁の場合の修正慣性モーメント (Modifizierter Trägheitsmoment) とただちに取るのは注意すべきことで, 歪エネルギーの式 (1a) においてはモーメントに対応する項が $M^2/2EJ$ の形にならず $(1+\kappa)M^2/2EJ$ なる形となるから応力度と歪エネルギーの場合モーメントに対し2つの異なつた修正慣性モーメントをとる必要を生ずると述べているが, 実はこれは考えが不充分で, 後で示すごとく $\kappa F r_g^2$ を Z_g, $N-\frac{M}{r_g}$ を $\mathfrak{N}$ と置いて (1a) 式を変形すると結局

$$\Pi_l = \frac{1}{2E}\int_0^l \left\{\frac{\mathfrak{N}^2}{F} + \frac{M}{Z_g} + \alpha'\frac{E}{G}\frac{Q^2}{F}\right\} ds_g \quad \cdots (1\,\mathrm{b})$$

とまとめられるから, 応力度に対しても, 歪エネルギーの式に対しても $\kappa F r_g^2 = Z_g$ なる一つの修正モーメントを取ればよいことになる (Z_g なる記号の代りに本により Z, Y, J_0, J' なる記号が用いられ一定していない)。式 (1b) は Müller-Breslau の歪エネルギーの形であるが, Müller-Bereslau は Timoshenko の式

$$U = \int_0^s \left(\frac{M^2}{2AEeR} + \frac{N^2}{2AE} - \frac{MN}{AER} + \frac{\alpha V^2}{2AG}\right) ds \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\,\mathrm{c})$$

と同じく, 剪力に対しては近似的として曲梁に対しても直梁の場合の常数をとつている。Müller-Breslau は α/A の代りに F' なる常数を考えている。しかして直梁の場合矩形断面に対し $F' = \frac{5}{6}F$, $\alpha = 1.2$ である。しかし曲梁の場合は常数でなく断面の高さと曲率半径の比によつて変化するのは (5) または (5a), (5b) からわかる。Müller-Breslau も Timoshenko も近似的に曲梁に対して直梁の場合の値をとつているのは曲梁に対する剪断応力度公式を出していないからである。

著者の公式 (1)～(5) 及び Dr.-Ing. R. Kappus の公式 (1a)～(5a) の主な相違は, 係数または積分が前者は中立軸に関して考えたものであり, 後者は重心軸に関して考えたことにある。

歪エネルギー公式は曲梁の撓み, または不静定力の計算に大切であり, 剪力の項は梁の高さが比較的大なる場合, またはI形断面の場合重要である。しかして歪エネルギーの実際の応用に際し1項でも少なくまとめてあればそれだけ便利である[2]。

次に曲梁の歪エネルギーに対する著者の公式 (1)～(5) の誘導, Kappus 氏の公式 (1a)～(5a) との関係, 公式 (1a) の齊整等について述べよう。

2. 著者の公式 (1)～(5) の誘導

記 号

A_l : 長さ l なる曲梁の全歪エネルギー

N : 任意横断面の重心軸に対する垂直力

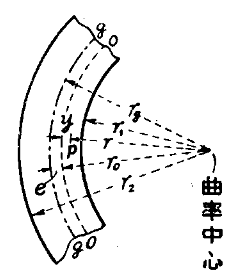
M : 〃 〃 〃 曲げモーメント

N_0 : 〃 中立軸 〃 垂直力

M_0 : 〃 〃 〃 曲げモーメント

Q : 〃 剪断力

図—1



E : 弾性係数

G : 剪断弾性係数

F : 横断面

J_0 : 中立軸に関する修正慣性モーメント

e : 中立軸の重心軸に対する偏心距離

r_0 : 曲梁の両端にモーメント M がはたらく場合の中立軸の曲率半径

r_g : 重心軸の曲率半径

r : 断面の任意点に対する曲率半径

r_1 : 曲梁の内縁点の曲率半径

r_2 : 〃 外縁点 〃

ds_0: 中立軸の長さの成分

α : 断面の形状に関する剪断力の補正係数

$S(r)$: r の函数としての修正断面1次モーメント

$S'(r)$: r の函数としての断面1次モーメント

$b(r)$: r の函数としての横断面の巾

h : 矩形断面の高さ

a : 矩形断面の高さの 1/2

l_0 : 全長 l に対応する中立軸の全長

著者はさきに (1) 式の誘導にあたり基本の仕事方程

式 $A_i=\int\frac{N}{2}\Delta ds+\int\frac{M}{2}\Delta d\varphi$ から出発して出した。これは公式誘導の過程が明白な利点はあるが，一般の場合には次のごとく応力度の函数として表わした仕事方程式より出発した方が技巧がいらず便利であるから，いまはそれによることにする。しかして著者のこれまで提案せる垂直応力度及び剪断応力度の公式の成立が中立軸の概念を入れたものであるから，歪エネルギーの公式もまた中立軸に関する積分として考えた方が適当である。

応力度 σ 及び τ の函数として表わした曲梁の全歪エネルギーを極座標により，中立軸の全長 l_0 に関する積分として表わせば（一般形は土木学会誌，第29巻，第4号，p. 338，(5.1) 式参照）

$$A_i=\int_0^{l_0}\left\{\int_F\left[\frac{\sigma^2}{2E}+\frac{\tau^2}{2G}\right]\frac{r}{r_0}dF\right\}ds_0 \cdots\text{(A)}$$

式（A）の中の σ 及び τ に著者の公式[3]

$$\sigma=\frac{N}{F}+\frac{My}{J};\ J=Fer=F(r_g-r_0)r \cdots\cdots\text{(B)}$$

$$\tau=\frac{QS}{bJ_0};\ J_0=Fer_0,\ S=\left(\frac{r_0}{r}\right)^2\int_{r_1}^{r}(r_g-r)dF \cdots\cdots\text{(C)}$$

を代入すれば，歪エネルギーの公式 (1) が得られる，すなわちまず（B）より

$$\sigma=\frac{N}{F}+\frac{M(r_0-r)}{Fer},\quad \text{しかるに}\quad N=N_0,$$

$$M=M_0+N_0e$$

故に

$$\sigma=\frac{N_0}{F}+\frac{N_0e(r_0-r)}{Fer}+\frac{M_0(r_0-r)}{Fer}$$

$$=\frac{N_0}{F}\frac{r_0}{r}+\frac{M_0}{Fe}\frac{r_0-r}{r}$$

$$\sigma^2=\frac{N_0^2r_0^2}{F^2r^2}+\frac{M_0^2(r_0-r)^2}{F^2e^2r^2}+2\frac{N_0r_0}{Fr}\frac{M_0}{Fe}\frac{r_0-r}{r}$$

$$\sigma^2\frac{r}{r_0}=\frac{N_0^2}{F^2}\frac{r_0}{r}+\frac{M_0^2}{F^2e^2}\frac{(r_0-r)^2}{rr_0}+2\frac{M_0N_0}{F^2e}\frac{r_0-r}{r}$$

$$\int_F\sigma^2\frac{r}{r_0}dF=\frac{N_0^2}{F^2}r_0\int_F\frac{dF}{r}$$
$$+\frac{M_0^2}{F^2e^2r_0}\int_F\frac{r_0^2-2r_0r+r^2}{r}dF$$
$$+2\frac{M_0N_0}{F^2e}\int_F\left(\frac{r_0}{r}-1\right)dF$$

しかるに

$$r_0=\frac{F}{\int_F\frac{dF}{r}}\ \therefore \int_F\frac{dF}{r}=\frac{F}{r_0};\ r_g=\frac{\int_F rdF}{F},$$

$$\therefore \int_F rdF=Fr_g;\quad J_0=Fer_0$$

$$\therefore \int_F\sigma^2\frac{r}{r_0}dF=\frac{N_0^2}{F^2}r_0\frac{F}{r_0}$$
$$+\frac{M_0^2}{F^2e^2r_0}\left(r_0^2\frac{F}{r_0}-2r_0F+Fr_g\right)$$
$$+2\frac{M_0N_0}{F^2e}\left(r_0\frac{F}{r_0}-F\right)$$
$$=\frac{N_0^2}{F}+\frac{M_0^2F}{F^2e^2r_0}(r_0-2r_0+r_g)$$
$$=\frac{N_0^2}{F}+\frac{M_0^2}{J_0}\frac{r_g-r_0}{e}$$
$$=\frac{N_0^2}{F}+\frac{M_0^2}{J_0}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(D)}$$

次に剪断応力度 τ に対する歪エネルギーに対しては

$$\int_0^{l_0}\left\{\int_F\frac{\tau^2}{2G}\frac{r}{r_0}dF\right\}ds_0=\int_0^{l_0}\frac{\alpha}{2G}\frac{Q^2}{F}ds_0 \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(E)}$$

と置けば

$$\alpha=\frac{F}{Q^2}\int_F\tau^2\frac{r}{r_0}dF \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(F)}$$

となる，しかるに著者の剪断応力度公式によれば

$$\tau=\frac{QS}{bJ_0};\qquad J_0=Fer_0,$$

$$S=\left(\frac{r_0}{r}\right)^2\int_{r_1}^{r}(r_g-r)dF=S(r)$$

故にこれを（F）式に代入すれば

$$\alpha=\frac{F}{Q^2}\int_{r_1}^{r_2}\frac{Q^2\cdot S^2(r)}{b^2(r)\cdot F^2e^2r_0^2}\frac{r}{r_0}b(r)\cdot dr$$
$$=\frac{1}{Fe^2r_0^3}\int_{r_1}^{r_2}\frac{S^2(r)}{b(r)}rdr$$
$$=\frac{r_0}{Fe^2}\int_{r_1}^{r_2}\frac{S'^2(r)}{b(r)\cdot r^3}dr\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(G)}$$

ここに

$$S(r)=\left(\frac{r_0}{r}\right)^2\cdot S'(r)=\left(\frac{r_0}{r}\right)^2\int_{r_1}^{r}(r_g-r)dF \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(H)}$$

故に (D), (E), (G), (H) より所求の曲梁に対する歪エネルギーの公式 (1) が得られる。すなわち

$$A_i=\int_0^{l_0}\frac{N_0^2}{2EF}ds_0+\int_0^{l_0}\frac{M_0^2}{2EJ_0}$$
$$+\int_0^{l_0}\frac{\alpha}{2G}\frac{Q^2}{F}ds_0\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(1)}$$

ここに

$$\alpha=\frac{r_0}{Fe^2}\int_{r_1}^{r_2}\frac{S'^2(r)}{b(r)\cdot r^3}dr;\ S'(r)=\int_{r_1}^{r}(r_g-r)dF$$

次に特別の場合として矩形断面 ($F=bh=b\cdot 2a$) に対する係数 α を出せば次のごとくになる。この場合巾 b は const. であるから

$$S'(r)=b\int_{r_1}^{r}(r_g-r)dr=b\Big[r_g r-\frac{r^2}{2}\Big]_{r_1}^{r}=b\Big\{r_g(r-r_1)-\frac{r^2-r_1^2}{2}\Big\}$$

$$=b(r-r_1)\Big(r_g-\frac{r+r_1}{2}\Big)=\frac{b}{2}(r-r_1)\,(r_2-1)$$

$$\therefore\ \alpha=\frac{r_0}{Fe^2}\int_{r_1}^{r_2}\frac{b^2(r-r_1)^2(r_2-r)^2}{4\,b\cdot r^3}dr=\frac{br_0}{4\,Fe^2}\int_{r_1}^{r_2}\frac{(r-r_1)^2(r_2-r)^2}{r^3}dr$$

しかるに

$$r_2-r_1=h,\quad r_1+r_2=r_g-\frac{h}{2}+r_g+\frac{h}{2}=2r_g,\quad r_1^2+r_2^2+4r_1r_2=6r_g^2-\frac{h^2}{2},\quad r_0=\frac{h}{\ln r_2/r_1},$$

$$\int_{r_1}^{r_2}\frac{(r-r_1)^2(r_2-r)^2}{r^3}dr=\int_{r_1}^{r_2}\Big\{r-2(r_1+r_2)+\frac{1}{r}(r_1^2+r_2^2+4r_1r_2)-\frac{2r_1r_2(r_1+r_2)}{r^2}+\frac{r_1^2r_2^2}{r^3}\Big\}dr$$

$$=\Big[\frac{r^2}{2}-2(r_1+r_2)r+(r_1^2+r_2^2+4r_1r_2)\ln r+\frac{2r_1r_2(r_1+r_2)}{r}-\frac{r_1^2r_2^2}{2r^2}\Big]_{r_1}^{r_2}$$

$$=\frac{r_2^2-r_1^2}{2}-2(r_1+r_2)(r_2-r_1)+(r_1^2+r_2^2+4r_1r_2)\ln\frac{r_2}{r_1}-2r_1r_2(r_1+r_2)\frac{r_2-r_1}{r_1r_2}$$

$$+\frac{1}{2}r_1^2r_2^2\frac{r_2^2-r_1^2}{r_1^2r_2^2}$$

$$=\frac{h}{2}(r_1+r_2)-2h(r_1+r_2)+(r_1^2+r_2^2+4r_1r_2)\ln\frac{r_2}{r_1}-2h(r_1+r_2)+\frac{h}{2}(r_1+r_2)$$

$$=(r_1+r_2)\Big(\frac{h}{2}-2h-2h+\frac{h}{2}\Big)+\Big(6r_g^2-\frac{h^2}{2}\Big)\frac{h}{r_0}$$

$$=2r_g(-3h)+2\Big(3r_g^2-\frac{h^2}{4}\Big)\frac{h}{r_0}=2h\Big\{-3r_g+\frac{1}{r_0}(3r_g^2-a^2)\Big\}$$

故に矩形断面に対する係数 α は

$$\alpha=\frac{2bhr_0}{4Fe^2}\Big\{\frac{1}{r_0}(3r_g^2-a^2)-3r_g\Big\}=\frac{1}{2e^2}\Big\{(3r_g^2-a^2)-3r_gr_0\Big\}$$

$$=\frac{1}{2e^2}\Big\{3r_g^2-a^2-3r_g(r_g-e)\Big\}=\frac{3er_g-a^2}{2e^2}\quad\cdots\cdots\cdots(5)$$

3. Dr.-Ing. Kappus の公式の検討

記　号　　式 (1a)～(5a) において

Π_l : 長さ l の曲梁の全歪エネルギー

N : 任意横断面における重心軸に対する垂直力

M : 〃　曲げモーメント

κ : Bach (Elastizität u. Festigkeit) の σ 公式中の κ と同じ係数であつて，著者の公式中における中立軸の曲率半径 r_0 との間に次の関係が成立つ。

$$\kappa=\frac{r_g}{r_0}-1=\frac{r_g-r_0}{r_0}=\frac{e}{r_0}\quad\cdots\cdots\cdots(\alpha)$$

E : 弾性係数

G : 剪断弾性係数

Q : 剪断力

ds : 重心軸の長さの成分（以後 ds_g にて表わすことにする）

r : 重心軸の曲率半径（以後 r_g にて表わすことにする）

y : 任意断面点の重心軸よりの距離（Kappus 氏の公式における $r-y$ は著者の公式における r に等しい）

y_i : 曲梁内縁の重心軸よりの距離

y_a : 曲梁外縁の　〃

$b(y)$: y の函数と考えた横断面の巾

$S(y)$: y の函数と考えた断面1次モーメント

$\bar{y}$: $S(y)$ の積分区間内における断面点の重心軸よりの距離

α' : 剪断力の項における補正係数，しかしてKappus氏の公式における係数 α' と著者の公式 (1) における係数 α との間には次の関係が成立つ。すなわち

$$\alpha'=\frac{r_0}{r_g}\alpha\quad\cdots\cdots\cdots(\beta)$$

何となれば

$$\int_0^l\frac{\alpha'}{2G}\frac{Q^2}{F}ds_g=\int_0^{l_0}\frac{\alpha}{2G}\frac{Q^2}{F}ds_0$$

$$=\int_0^l\frac{\alpha}{2G}\frac{Q^2}{F}\frac{r_0}{r_g}ds_g=\int_0^l\frac{\alpha}{2G}\frac{r_0}{r_g}\frac{Q^2}{F}ds_g$$

これより　$\alpha'=\alpha r_0/r_g$

矩形断面に対し補正係数 α' は (5a) より

$$\alpha'=\frac{3\kappa-(h/2r_g)(1+\kappa)}{2\kappa^2}$$

この式の κ に (α) の関係 $\kappa=e/r_0$ 及び $h=2a$ を代入して書き変えると

$$\alpha'=\frac{3\,er_g-a^2}{2\,\epsilon^2}\,\frac{r_0}{r_g}=\alpha\frac{r_0}{r_g}$$

となる。

Kappus 氏の公式 (1a) において ds 及び r はそれぞれ曲梁の重心軸に対する長さの成分及び曲率半径であるからそれを明示するため ds_g, r_g と書けば (1a) 式は

$$\Pi_i=\frac{1}{2E}\int_0^l\left\{\frac{1+\kappa}{\kappa}\frac{M^2}{Fr_g^2}-\frac{2\,MN}{Fr_g}+\frac{N^2}{F}+\alpha'\frac{E}{G}\frac{Q^2}{F}\right\}ds_g$$

となる。これを快美な形にまとめるため変形してゆくと次のようになる。

$$\begin{aligned}\Pi_i&=\frac{1}{2E}\int_0^l\left\{\frac{M^2}{\kappa Fr_g^2}+\frac{M^2}{Fr_g^2}-\frac{2\,MN}{Fr_g}+\frac{N^2}{F}+\alpha'\frac{E}{G}\frac{Q^2}{F}\right\}ds_g\\&=\frac{1}{2E}\int_0^l\left\{\frac{M^2}{\kappa Fr_g^2}+\frac{1}{F}\left(N^2-2\,N\frac{M}{r_g}+\frac{M^2}{r_g^2}\right)+\alpha'\frac{E}{G}\frac{Q^2}{F}\right\}ds_g\\&=\frac{1}{2E}\int_0^l\left\{\frac{M^2}{\kappa Fr_g^2}+\frac{1}{F}\left(N-\frac{M}{r_g}\right)^2+\alpha'\frac{E}{G}\frac{Q^2}{F}\right\}ds_g\end{aligned}$$

故に

$$\kappa Fr_g^2=Z_g,\quad N-\frac{M}{r_g}=\mathfrak{N}$$

とおけば (1a) 式は結局次のごとき齊整された式となる。

$$\Pi_i=\frac{1}{2E}\int_0^l\left\{\frac{\mathfrak{N}^2}{F}+\frac{M^2}{Z_g}+\alpha'\frac{E}{G}\frac{Q^2}{F}\right\}ds_g \quad\cdots\cdots\cdots(1\,b)$$

従つて $\kappa Fr_g^2=Z_g$ を応力度に対しても，また歪エネルギーの公式に対してもただ一種の修正慣性モーメントを取ればよいことになる。Z_g は断面素 dF を r_g/r 倍した修正断面の重心軸に関する慣性モーメントとして定義されるものである。すなわち

$$\begin{aligned}Z_g&=\int y^2\left(\frac{r_g}{r}dF\right)=r_g\int y^2\frac{dF}{r}=r_g\int(r_g-r)^2\frac{dF}{r}\\&=r_g\int\left(r_g^2\frac{dF}{r}-2\,r_gdF+rdF\right)\\&=r_g^3\int\frac{dF}{r}-2\,r_g^2F+r_g\cdot r_gF=\frac{r_g^3}{r_0}F-r_g^2F\\&=\left(\frac{r_g}{r_0}-1\right)Fr_g^2=\kappa Fr_g^2\end{aligned}$$

結　び

従来曲梁に対する応力度及び歪エネルギーに対する公式が複雑なものに思えたのは常数に対する明快なる概念が把握されていなかつたためで，著者の修正慣性モーメント J_0 の導入により応力度 σ 及び τ の公式のみならず歪エネルギーの公式もきわめて自然な直梁の場合に類似な形に表現することができ，なお著者の公式にならい従来の重心軸に関してたてた公式もすでに本誌にのべたごとく簡潔な形に表わされ便利である[4]。

剪断力に対する補正係数 α または α' の値は横断面形が積分可能のものであれば完結した式として出すことができる。もしまた積分のできない不規則断面形であれば図解によらねばならない。これらについては次の機会にのべたい。

従来曲梁の応力度公式としてはもつぱら垂直応力度のみ述べているものが普通であり，かつ公式を簡単化する場合影響小なる値を省略しての形の式であるが以上著者の示す公式はかような省略なしに完結した公式としてまとめ得たことに特色がある。

脚　註

1) Timoshenko and Lessels : Applied Elasticity, 1925, p. 228 に曲梁の計算に剪力の補正係数を矩形断面に対し直梁の場合の値，1.5 と取つているが，Timoshenko : Strength of Material, Part II, 1941, Second Edition, reprinted March 1951, p. 84 (88) には 1.2 と訂正している（片山・北畠訳：ティモシェンコ，材料力学，p. 279 には 1.5 となつている。我国の材料力学の書にいまでも 1.5 としてあるのがある)。最上武雄：フェップル：応用力学，p. 91 では 1.2 となつている。Hütte des Ingenieurs Taschenbuch, Bd. I, 27 Aufl. p.685 の説明によると直梁の場合 Timoshenko が $\mu Q/F={}_{\max}\tau_s$ としてきめた値（矩形断面に対し 1.5）は Tetmajer の彎曲試験と一致しないとのべている。そして $\mu=1.2$ または $F'=F/\mu=5/6\,F$ を正しい値としている。係数の記号は本によつて一定していない。しかし 1.2 という値は直梁の矩形断面に対する値（もちろん巾についての平均値）であつて，曲梁の場合，公式より明らかなるごとく，曲梁の高さと曲梁軸の曲率半径の比いかんによつて異なる数値をとる。直梁の場合でも厳密にいえば巾が断面高さに比し大なる時は常数とはならない。
2) 応用例題は例えば著者：中空円筒ローラーの応力計算，徳島大学研究報告，第 3 巻第 1 号参照
3) 著者：曲梁の垂直応力度，土木学会誌，第37巻第 8 号及び著者：曲梁の剪断応力度及び半径方向の垂直応力度に対する新公式，土木学会誌，第37巻第 7 号
4) 同上，及び本論文公式 (1b)
半径方向の垂直応力度に対する歪エネルギーの式は，著者により求められた応力度公式があるから求められるが，剪断応力度のごとく簡単にはならない。 （昭.28.4.14）