

アイ・バーの計算公式について

正員 大野 諫*

STRESS CALCULATION OF EYEBAR

(JSCE June 1953)

Isamu Ōno, C. E. Member

Synopsis The author's formula for calculation of stress of eyebar is explained.

1. 緒言

アイ・バーの眼の部分の応力分布は平面問題として周辺条件を三角級数に展開し一般解としての応力函数を応用して解かれているが¹⁾、きわめて煩雑なために実地計算には通常、曲梁に対する近似式が用いられている。しかして以前には Bernhard 氏のごとく²⁾荷重として眼孔の内面に集中荷重をとつたものであるが(図-1)、Bleich 氏は実際によりよく近づけるために、荷重として分布荷重をとりその計算に対しては、Müller-Breslau 氏の曲梁に対する最小仕事の方程式を応用して³⁾アイ・バーの眼の部分の断面力の公式をだした。これらの公式は邦訳書及び最近わが国での鋼橋の著書に転載され、または研究報告にも用いられているのを見る。しかし不静定モーメント M_0 の公式⁴⁾の分子第1項の括弧内の $(\pi-\alpha)\sin\alpha$ は $2(\pi-\alpha)\sin\alpha$ と訂正しなければならないから注意したい。もちろん M_0 の式の分子の初めの項は垂直力に対応するものであるから、分子の後の項、すなわちモーメントに対応するものとちがつて、2なる数が脱落していても M_0 に及ぼす影響は甚小である。

ここでは同問題を著者の中立軸に関してたてた最小仕事の方程式⁵⁾を応用して、不静定力に対する Bleich

氏の公式に対応する公式をだした。2つの不静定力のうち水平力の方は断面常数を含まないため全く同じであるが、モーメントの方は公式がずつと簡単になる。

2. 曲梁に対する著者の最小仕事の方程式

$$\frac{\partial A_i}{\partial X} = \int \frac{N_0}{EF} \frac{\partial N_0}{\partial X} r_0 d\varphi + \int \frac{M_0}{EF_0} \frac{\partial M_0}{\partial X} r_0 d\varphi \dots\dots\dots(1)$$

ここに N_0 , M_0 はそれぞれ中立軸に関する垂直力及びモーメント、 r_0 は中立軸の曲率半径、 $J_0 = r_0 e F$ は中立軸に関する断面常数、 e は重心軸からの中立軸の偏心距、 E は弾性係数、 F は横断面、 X は不静定力、 $r_0 d\varphi$ は中立軸の長さの成分、積分は中立軸にそい部材全長について行われる。不静定力の数だけ (1) 式をたてると、それから不静定力が求められる。

3. 方程式 (1) によるアイ・バーの応力計算

まず図-2に示すようなアイ・バーの眼の部分の応力計算に対し円環として比較の便宜上 Bleich 氏と同じく荷重等について次の仮定をなすものとする。すなわち、

- a) 弾性限界を超過する点はない。
- b) 半径方向の断面は変形後も平面を保持する。

図-1

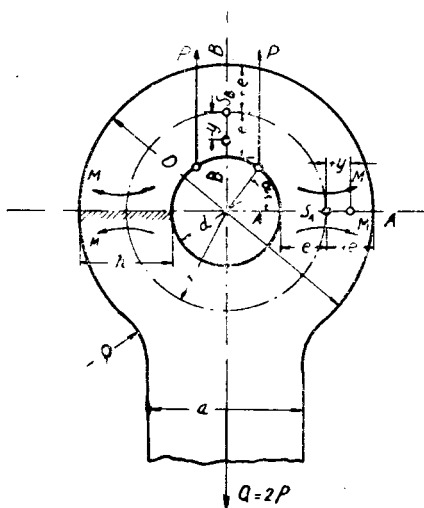
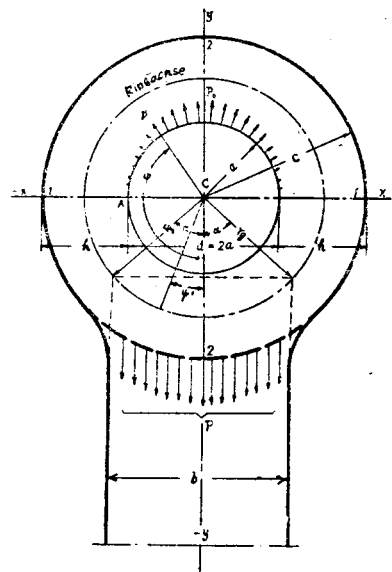


図-2



* 東京都立大学教授，工学部土木工学科

c) ピンと眼孔間にはたらく支圧力は半径方向にはたらく、その強度は次式に従い変化する。

$$p = -p_0 \cos \psi \dots\dots\dots (2)$$

d) 部材の張力 P は部材中の範囲内で等分布荷重として、閉じた円環をなす頭部に伝えられる。故にピン孔は内側の半分において圧力を受け、外側は $2r_g \sin \alpha$ の範囲で等分布の張力 P を受ける円環と考えられる。ただし P は全部材力のうち単位厚さ 1 にはたらく分を表わす。なお P と p との間には次の関係が成立つ。

すなわち

$$P = - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} p \cos \psi ds_\alpha = p_0 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^2 \psi a d\psi$$

$$= p_0 a \frac{\pi}{2}$$

従つて $p_0 = \frac{2P}{\pi a} = \frac{4P}{\pi d}$, 故に $p = -\frac{2P}{\pi a} \cos \psi$
 $= -\frac{4P}{\pi d} \cos \psi$ である。これを環軸の単位長について換算すれば

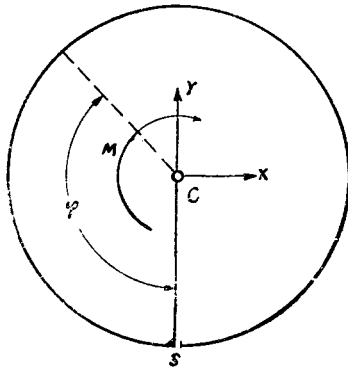
$$p = -\frac{2P \cos \psi}{\pi r_g} \dots\dots\dots (3)$$

となる。また環の外側にはたらく荷重度 σ は

$$\sigma = \frac{P}{b l} = \frac{P}{2 r_g \sin \alpha} \dots\dots\dots (4)$$

さて 図-3 に示すように切断面 s をとり、 s において環の中心まで剛部材を附しその末端すなわち円環の中心 C に不静定

図-3

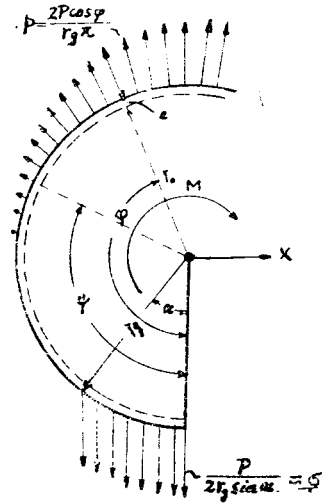


力として断面力 M , X 及び Y を取る。
 (閉じた円環は一般に 3 次不静定であつて、この不静定力を Bleich の書では M_0 , X_0 及び Y_0 と表わしてあ

るが、いまここでは任意断面における中立軸においてはたらく垂直力及びモーメントに対し N_0 , M_0 なる記号を用いているから、それと混同せぬよう不静定力を M , X , Y として表わすことにした)。対称のため Y はこの際 0 となるから不静定力として M 及び X が残る。この 2 つの不静定力を決定するため上記の最小仕事の方程式 (1) を適用する。

環の左半分について、図-4 より

図-4



$\varphi \leq \alpha$ に対して

$$N_0 = \frac{P \sin^2 \varphi}{2 \sin \alpha} + X \cos \varphi$$

$$M_0 = \frac{P}{2 r_g \sin \alpha} r_g \sin \varphi \left(r_0 \sin \varphi - \frac{1}{2} r_g \sin \alpha \right) + M + X r_0 \cos \varphi$$

$$= \frac{P}{2 \sin \alpha} \left(r_0 - \frac{1}{2} r_g \right) \sin^2 \varphi + M + X r_0 \cos \varphi$$

$\alpha \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ に対して

$$N_0 = \frac{P}{2} \sin \varphi + X \cos \varphi$$

$$M_0 = \frac{P}{2} \left(r_0 \sin \varphi - \frac{1}{2} r_g \sin \alpha \right) + M + X r_0 \cos \varphi$$

$\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi$ に対して

$$N_0 = \frac{P}{2} \sin \varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} \left(-\frac{2P}{\pi} \cos \psi \right) \sin(\varphi - \psi) d\psi$$

$$+ X \cos \varphi = P \left(\sin \varphi - \frac{\varphi \sin \varphi}{\pi} - \frac{\cos \varphi}{\pi} \right) + X \cos \varphi$$

$$M_0 = \frac{P}{2} \left(r_0 \sin \varphi - \frac{1}{2} r_g \sin \alpha \right)$$

$$+ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} \left(-\frac{2P \cos \psi}{\pi r_g} r_0 \sin(\varphi - \psi) \right) r_g d\psi$$

$$+ M + X r_0 \cos \varphi$$

$$= P r_0 \left(\sin \varphi - \frac{\cos \varphi}{\pi} - \frac{\varphi \sin \varphi}{\pi} \right)$$

$$- \frac{P}{4} r_g \sin \alpha + M + X r_0 \cos \varphi$$

従つて φ のすべての値に対して

$$\frac{\partial N_0}{\partial X} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial N_0}{\partial M} = 0; \quad \frac{\partial M_0}{\partial X} = r_0 \cos \varphi, \quad \frac{\partial M_0}{\partial M} = 1$$

これらの値を方程式 (1) に代入すれば不静定量 X 及び M の決定に対し次の 2 つの式が得られる。すなわち

$$0 = \frac{1}{J_0} \int_0^\alpha \left[-\frac{P}{2 \sin \alpha} \left(r_0 - \frac{1}{2} r_g \right) \sin^2 \varphi + M + X r_0 \cos \varphi \right] d\varphi$$

$$+ \frac{1}{J_0} \int_\alpha^\pi \left[-\frac{P}{2} \left(r_0 \sin \varphi - \frac{1}{2} r_g \sin \alpha \right) + M + X r_0 \cos \varphi \right] d\varphi$$

$$+ \frac{1}{J_0} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \left[P r_0 \left(\sin \varphi - \frac{\cos \varphi}{\pi} - \frac{\varphi \sin \varphi}{\pi} \right) - \frac{P}{4} r_g \sin \alpha + M + X r_0 \cos \varphi \right] d\varphi \dots\dots\dots (5)$$

$$0 = \frac{1}{F'} \int_0^\alpha \left(-\frac{P \sin^2 \varphi}{2 \sin \alpha} + X \cos \varphi \right) \cos \varphi d\varphi + \frac{1}{F'} \int_\alpha^\pi \left(\frac{P}{2} \sin \varphi + X \cos \varphi \right) \cos \varphi d\varphi$$

$$+ \frac{1}{F'} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \left[P \left(\sin \varphi - \frac{\varphi \sin \varphi}{\pi} - \frac{\cos \varphi}{\pi} \right) + X \cos \varphi \right] \cos \varphi d\varphi$$

$$+ \frac{1}{J_0} \int_0^\alpha \left[-\frac{P}{2 \sin \alpha} \left(r_0 - \frac{1}{2} r_g \right) \sin^2 \varphi + M + X r_0 \cos \varphi \right] r_0 \cos \varphi d\varphi$$

$$+ \frac{1}{J_0} \int_\alpha^\pi \left[-\frac{P}{2} \left(r_0 \sin \varphi - \frac{1}{2} r_g \sin \alpha \right) + M + X r_0 \cos \varphi \right] r_0 \cos \varphi d\varphi$$

$$+ \frac{1}{J_0} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \left[P r_0 \left(\sin \varphi - \frac{\cos \varphi}{\pi} - \frac{\varphi \sin \varphi}{\pi} \right) - \frac{P}{4} r_g \sin \alpha + M + X r_0 \cos \varphi \right] r_0 \cos \varphi d\varphi \dots\dots\dots (6)$$

(5) 及び (6) に含まれる三角函数の積分を示せば

$$\int_0^\alpha \cos \varphi d\varphi = \left[\sin \varphi \right]_0^\alpha = \sin \alpha, \quad \int_0^\alpha \sin^2 \varphi d\varphi = \left[\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{2} \right]_0^\alpha = \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{2},$$

$$\int_0^\alpha \cos^2 \varphi d\varphi = \left[\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{2} \right]_0^\alpha = \frac{\alpha}{2} + \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{2},$$

$$\int_0^\alpha \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi = \int_0^\alpha (1 - \cos^2 \varphi) \cos \varphi d\varphi = \int_0^\alpha \cos \varphi d\varphi - \int_0^\alpha \cos^3 \varphi d\varphi$$

$$= \left[\sin \varphi \right]_0^\alpha - \frac{\sin \varphi \cos^2 \varphi}{3} + \frac{2}{3} \int \cos \varphi d\varphi \Big|_0^\alpha$$

$$= \sin \alpha - \left(\frac{\sin \alpha \cos^2 \alpha}{3} + \frac{2}{3} \sin \alpha \right) = \frac{\sin^3 \alpha}{3} - \frac{\sin \alpha \cos^2 \alpha}{3} = \frac{\sin^3 \alpha}{3},$$

$$\int_\alpha^\pi \sin \varphi d\varphi = \left[-\cos \varphi \right]_\alpha^\pi = \cos \alpha, \quad \int_\alpha^\pi \cos \varphi d\varphi = \left[\sin \varphi \right]_\alpha^\pi = 1 - \sin \alpha,$$

$$\int_\alpha^\pi \cos^2 \varphi d\varphi = \left[\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{2} \right]_\alpha^\pi = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{2},$$

$$\int_\alpha^\pi \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = \frac{1}{4} \int_\alpha^\pi \sin 2\varphi d\varphi = \frac{1}{4} \left[-\cos 2\varphi \right]_\alpha^\pi = \frac{1}{4} (1 + \cos 2\alpha) = \frac{\cos^2 \alpha}{2},$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin \varphi d\varphi = \left[-\cos \varphi \right]_{\frac{\pi}{2}}^\pi = 1, \quad \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos \varphi d\varphi = \left[\sin \varphi \right]_{\frac{\pi}{2}}^\pi = -1, \quad \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = \frac{1}{4} \left[-\cos 2\varphi \right]_{\frac{\pi}{2}}^\pi = -\frac{1}{2},$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \varphi \sin \varphi d\varphi = \left[\sin \varphi - \varphi \cos \varphi \right]_{\frac{\pi}{2}}^\pi = \pi - 1, \quad \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos^2 \varphi d\varphi = \left[\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{2} \right]_{\frac{\pi}{2}}^\pi = \frac{\pi}{4},$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \varphi \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = \frac{1}{8} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi 2\varphi \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = \frac{1}{8} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi 2\varphi \sin 2\varphi d\varphi = \frac{1}{8} \left[\sin 2\varphi - 2\varphi \cos 2\varphi \right]_{\frac{\pi}{2}}^\pi$$

$$= -\frac{3}{8} \pi$$

これらの積分公式を用いて (5), (6) を計算し、不静定力をだせば次のごとくなる。すなわち (5) より

$$M = \frac{1}{8\pi} \left[\left(\frac{\alpha}{\sin \alpha} - \cos \alpha + 2(\pi - \alpha) \sin \alpha \right) - 2 \left(\frac{\alpha}{\sin \alpha} + \cos \alpha + \frac{8}{\pi} \right) \frac{r_0}{r_g} \right] P r_g = \beta P r_g \dots\dots\dots (7)$$

ここに $\beta = \frac{1}{8\pi} \left[\left(\frac{\alpha}{\sin \alpha} - \cos \alpha + 2(\pi - \alpha) \sin \alpha \right) - 2 \left(\frac{\alpha}{\sin \alpha} + \cos \alpha + \frac{8}{\pi} \right) \frac{r_0}{r_g} \right]$

を得る。(7) 式が Bleich : Eiserne Brücken 所載の M_0 の式に相当する著者の公式でより簡明である。括弧内の後の項が Bleich の式では 4 項あるのが上式では 3 項にまとまっているが、Bleich の断面常数 Z_g (ここでは Müller-Breslau の公式中の Z, r を混同をさけるためと重心軸に関する値なることを示すため

それぞれ Z_g, r_g にて表わし、Bleich の公式 M_0 の代りにいまの記号 M と書けば)と著者の断面常数との間の関係式 $Z_g = \frac{r_g}{r_0} J_g = \frac{r_g^2 e F'}{r_0}$, $e+r_0=r_g$ を用いての Bleich の M の公式を変形してゆくと結局 (7) 式に帰着し、表現こそちがうが同一の値を示すことがわかる。すなわち Bleich の公式 (7') は

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{\frac{1}{F} \left(\frac{\alpha}{\sin \alpha} - \cos \alpha + 2(\pi - \alpha) \sin \alpha \right) - \frac{r_g^2}{Z_g} \left(\frac{\alpha}{\sin \alpha} + 3 \cos \alpha - 2(\pi - \alpha) \sin \alpha + \frac{16}{\pi} \right)}{8 \pi \left(\frac{1}{F} + \frac{r_g^2}{Z_g} \right)} Pr_g \dots\dots (7') \\
 &= \frac{\frac{1}{F} \left(\frac{\alpha}{\sin \alpha} - \cos \alpha + 2(\pi - \alpha) \sin \alpha \right) - \frac{r_0}{eF} \left(\frac{\alpha}{\sin \alpha} + 3 \cos \alpha - 2(\pi - \alpha) \sin \alpha + \frac{16}{\pi} \right)}{8 \pi \left(\frac{1}{F} + \frac{r_0}{eF} \right)} Pr_g \\
 &= \frac{\left(\frac{\alpha}{\sin \alpha} - \cos \alpha + 2(\pi - \alpha) \sin \alpha \right) - \frac{r_0}{e} \left(\frac{\alpha}{\sin \alpha} + 3 \cos \alpha - 2(\pi - \alpha) \sin \alpha + \frac{16}{\pi} \right)}{8 \pi \left(1 + \frac{r_0}{e} \right)} Pr_g \\
 &= \frac{e \left(\frac{\alpha}{\sin \alpha} - \cos \alpha + 2(\pi - \alpha) \sin \alpha \right) - r_0 \left(\frac{\alpha}{\sin \alpha} + 3 \cos \alpha - 2(\pi - \alpha) \sin \alpha + \frac{16}{\pi} \right)}{8 \pi (e + r_0)} Pr_g \\
 &= \frac{P}{8 \pi} \left[e \left(\frac{\alpha}{\sin \alpha} - \cos \alpha + 2(\pi - \alpha) \sin \alpha \right) - r_0 \left(\frac{\alpha}{\sin \alpha} + 3 \cos \alpha - 2(\pi - \alpha) \sin \alpha + \frac{16}{\pi} \right) \right] \\
 &= \frac{P}{8 \pi} \left[(r_g - r_0) \left(\frac{\alpha}{\sin \alpha} - \cos \alpha + 2(\pi - \alpha) \sin \alpha \right) - r_0 \left(\frac{\alpha}{\sin \alpha} + 3 \cos \alpha - 2(\pi - \alpha) \sin \alpha + \frac{16}{\pi} \right) \right] \\
 &= \frac{P}{8 \pi} \left[r_g \left(\frac{\alpha}{\sin \alpha} - \cos \alpha + 2(\pi - \alpha) \sin \alpha \right) - r_0 \left(\frac{\alpha}{\sin \alpha} - \cos \alpha + 2(\pi - \alpha) \sin \alpha + \frac{\alpha}{\sin \alpha} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 3 \cos \alpha - 2(\pi - \alpha) \sin \alpha + \frac{16}{\pi} \right) \right] \\
 &= \frac{P}{8 \pi} \left[r_g \left(\frac{\alpha}{\sin \alpha} - \cos \alpha + 2(\pi - \alpha) \sin \alpha \right) - r_0 \left(\frac{2\alpha}{\sin \alpha} + 2 \cos \alpha + \frac{16}{\pi} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{8 \pi} \left[\left(\frac{\alpha}{\sin \alpha} - \cos \alpha + 2(\pi - \alpha) \sin \alpha \right) - 2 \left(\frac{\alpha}{\sin \alpha} + \cos \alpha + \frac{8}{\pi} \right) \frac{r_0}{r_g} \right] Pr_g
 \end{aligned}$$

となる。次に (6) 式より $J_0 = Fe r_0$ なることに留意し式を整頓して X をだせば Bleich の公式 X_0 と全く等しく、

$$X = \frac{1}{2 \pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sin^2 \alpha}{3} \right) P = \gamma P \dots\dots\dots (8)$$

を得る。ここに $\gamma = \frac{1}{2 \pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sin^2 \alpha}{3} \right)$

不静定力 M 及び X が求めれば任意断面の垂直力及びモーメントは容易に求めることができる。

断面における垂直力及びモーメントが求められた後、断面に生ずる最大応力度をだす際 (7) 及び (8) 式を用いる時は応力度もまた著者の公式 $\sigma_1 = \frac{N}{F} + \frac{M y_1}{J_1}$, $\sigma_2 = \frac{N}{F} + \frac{M y_2}{J_2}$; $J_1 = r_1 e F = r_1 (r_g - r_0) F$, $J_2 = r_2 (r_g - r_0) F$, $r_0 = \frac{F}{L}$ を用いると好都合である。

文 献

- 1) Timoshenko : Theory of elasticity, p. 120. (Reissner's paper)
- 2) Dr.-Ing. E. Lehr : Spannungsverteilung in Konstruktionselementen, 1934, s. 42. (J. Bernhard : Berechnung von Stangenköpfen).
- 3) Dr.-Ing. F. Bleich : Theorie und Berechnung der Eisernen Brücken, 1924, s. 257. (奥田, 綾, 猪瀬 3 氏訳: プライヒ鋼橋の理論と計算, 上, p. 274).
- 4) 同上 : s. 258 Gl. (8)
- 5) 著者 : 曲梁の歪エネルギーに対する公式, 土木学会誌, 第 36 巻第 12 号, p. 31, (16) 式.
- 6) 著者 : 曲梁の垂直応力度, 土木学会誌, 第 37 巻第 8 号, 図-2, 附図.
- 7) 同上.

(昭.28.10.23)