

験式中の含水量によるパラメーター ( $k, \beta$ ) を決定する常数は興味深い傾向を示しており、まづ  $k$  を決める  $a, b$  のうち  $b$  はそれほど大差ないから、土質による変形しやすさの差は含水量がない ( $w=0$ ) の場合には大差ないということを示し、水が増えるに従つて各土としての特性が現われることを示している。

また  $\beta$  に関して  $N_0, v_{a_0}$  のごとき交点があるということは土のある特性を見出したのではないかと思つている。

以上述べたことは突固め現象に対する一つの提案であり、さらに多くの試料を用いて実験を続ければ土の新しい特性を明らかにし得るであろう。また空気間隙の追出される現象に対しては、別な実験を計画してお

り、土の変形機構を幾分なりとも明らかにしたいと考えている。

終りに当り、東京大学最上教授の御懇切な御指導と M. I. T. の Prof. Taylor 及び Prof. Lambe の御好意とに深く感謝するとともに、卒業論文としてこの問題を研究された藤田正年君に御礼を申し上げる次第である。

#### 参考文献

- 1) Stanley D. Wilson: Engineering News Record, Nov. 1950, p. 34~36
- 2) 久野悟郎: 土の突固め試験について (第2報) 東大理工研報告第4巻, 第5~6号(1950, 5~6)

(昭.27.11.27)

## 粘弾性体の圧密\*

UDC 539.214.9  
624.131.439.3

正員 篠田 仁 吉\*\*

### ONE-DIMENSIONAL CONSOLIDATION OF VISCO-ELASTIC BODY

(JSCE May 1953)

Jinkichi Shinoda, C.E. Member

**Synopsis** The secondary compression in the laboratory consolidation test of clay is due to its visco-elastic property. The one-dimensional consolidation equation is solved by the operational calculus, expressing the modulus of visco-elasticity by  $E \frac{p+\beta}{p+\alpha} \frac{p+\delta}{p+\gamma}$  (Fig. 2 (b)), where  $E$  is the modulus of elasticity,  $p$  Heaviside's operator and  $\alpha, \beta, \gamma$  and  $\delta$  are constants having the dimension  $[T^{-1}]$ . The theory has a good agreement with experimental data continuing for about one month (Fig. 3). Compressional visco-elastic constants are the same order as shearing ones obtained from the torsional test.

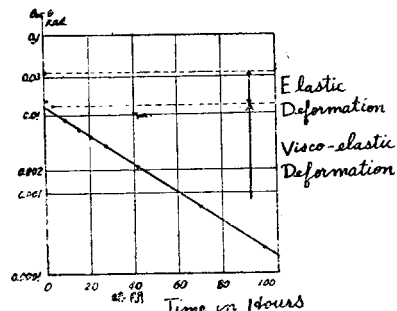
**要旨** 圧密試験における2次圧密量を合理的に決定するために、粘土の粘弾性を時定数が異なる2つの粘弾性の組合せで表わし、これによつて数10日程度の2次圧密量まで正しく求められるようにした。

#### 1. 緒言

粘土の圧密試験を実験室で行うとき2次圧密という現象が現われることは衆知のことである。Terzaghiの圧密理論では粘土を弾性体と仮定しているが、これによつて理論的に求めた圧密曲線と実験値とは次第に差違を生じ、実験値の方が次第に圧密量を増してくる。これが2次圧密と称されるものであつて、この差違は粘土を弾性体と仮定したため生じたものである。しかし筆者が以前発表した<sup>1)</sup>ように粘土は粘弾性体として取扱われなければならない。例えば石本、飯田両

氏の実験<sup>2)</sup>に見られるごとく(図-1)、粘土に振りモー

図-1 Torsional Test of Clay



メントを与えるると瞬間的に一定の変位が起りその後徐々に変位が増す。これを最終変位と各時間における変位との差の対数を縦軸にとり時間を横軸にとると、変位の徐々に増加する部分は直線になる。この関係を模型的に弾性を表わすスプリングと、粘性を表わすダ

\* 昭.27.12.1. 第2回応用力学連合講演会で講演

\*\* 鉄道技術研究所

ッシュポットとの組合せで表わすと図-2 (a) で表わされる。上のスプリングにより最初の弾性的変形が表わされ、下の並列のスプリングとダッシュポットにより粘弾性的変形が表わされる。図-2 (a) においてスプリングの弾性係数を  $E_1, E_2$ , ダッシュポットの粘性係数を  $\eta$  とし、全体の応力、歪を  $\sigma, \varepsilon$  とし、 $E_2, \eta$  の応力を  $\sigma_1, \sigma_2$  とし、 $E_1, E_2$  の歪を  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  とすると  $\eta$  の歪も  $\varepsilon_2$  である。図の関係より

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2, \quad \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad \sigma = E_1 \varepsilon_1, \quad \sigma_1 = E_2 \varepsilon_2, \\ \sigma_2 = \eta \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_2$$

この5つの関係から  $\sigma_1, \sigma_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2$  を消去すると

$$\left( E_1 + E_2 + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) \sigma = E_1 \left( E_2 + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) \varepsilon$$

$\frac{\partial}{\partial t}$  なる微分演算を演算子  $p$  で表わすと

$$(E_1 + E_2 + \eta p) \sigma = E_1 (E_2 + \eta p) \varepsilon$$

$\sigma/\varepsilon$  は弾性体における弾性係数に相当するもので、これを粘弾性係数と称すると

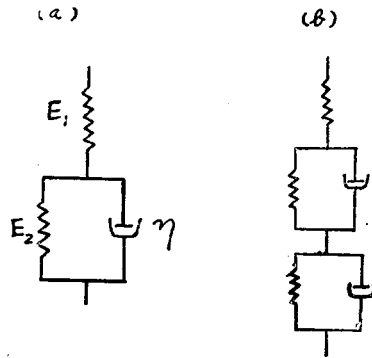
$$\frac{\sigma}{\varepsilon} = E_1 \frac{E_2 + \eta p}{E_1 + E_2 + \eta p} = E \frac{p + \beta}{p + \alpha} \dots \dots \dots (1)$$

と表わされる。ここに  $E_1, (E_1 + E_2)/\eta, E_2/\eta$  の代わりに  $E, \alpha, \beta$  と書いた。 $\alpha, \beta$  は時間の逆数の元を持つ常数でこの逆数が粘弾性的変形の行われる時間の長短の目安を与える。

$E_2$  または  $\eta$  が無限大になると (1) より粘弾性係数は  $E_1$  となり弾性体を表わす。これは模型で考えれば上のスプリングだけである。 $E_1$  が無限大になると粘弾性係数は  $E_2 + \eta p$  となり模型ではスプリングとダッシュポットの並列となる。これは Voigt が与えたものである。 $E_2$  が 0 になるとスプリングとダッシュポットの直列となり粘弾性係数は  $E p / (p + \alpha)$  となる。これは Maxwell が求めたものである。粘土の性質はこの両者を含む式 (1) で実用的に充分表わされることを示したのが 1) の論文の要旨であった。

圧密試験の結果を粘弾性体として解くことは運輸省石井技官<sup>3)</sup> もすでに行っているが、粘弾性係数を  $E(p + \beta)/(p + \alpha)$  としたものでは数時間程度までは表わせるが、それ以後は実験値が理論値より離れてくる。これは短時間に終る粘弾性と長時間のものを組み合わせれば説明される。筆者は粘弾性係数を図-2 (b) のごとく表わした結果、実験値とよく一致した結果が得られることが認められた。このとき係数は  $E = \frac{p + \beta}{p + \alpha} \cdot \frac{p + \delta}{p + \gamma}$  となる。ここに  $E$  は弾性係数、 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  は時間の逆数の元を持つ常数で  $\alpha > \beta > \gamma > \delta$  である。粘弾性係数が  $E \frac{p + \beta}{p + \alpha} \cdot \frac{p + \delta}{p + \gamma}$  であるということは、応力と歪と

図-2 Model of Visco-Elastic



の関係は微分形で書けば

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \alpha \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} + \gamma \right) \sigma(t) = E \left( \frac{\partial}{\partial t} + \beta \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} + \delta \right) \varepsilon(t) \dots \dots \dots (2)$$

ということであり、積分形で書けば

$$\sigma(t) = E \left[ \varepsilon(t) - \frac{(\alpha - \beta)(\alpha - \delta)}{\alpha - \gamma} \int_0^t e^{-\alpha(t - \tau)} \varepsilon(\tau) d\tau - \frac{(\beta - \gamma)(\gamma - \delta)}{\alpha - \gamma} \int_0^t e^{-\gamma(t - \tau)} \varepsilon(\tau) d\tau \right] \dots (3)$$

で表わされるという意味である。

2. 圧密理論

$w$ : 間隙水圧力,  $u$ : 沈下量,  $c_v$ : 圧密係数

とするとき弾性体の圧密方程式は

$$\frac{\partial w}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \dots \dots \dots (4)$$

である。 $c_v$  の中には弾性係数が入っているから粘弾性体では

$$\frac{\partial w}{\partial t} = c_v \frac{p + \beta}{p + \alpha} \frac{p + \delta}{p + \gamma} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \alpha' \frac{p + \beta}{p + \alpha} \frac{p + \delta}{p + \gamma} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \dots (5)$$

となる、ただし  $c_v = a^2$ 。ここに (5) の右辺の演算子は (3) で表わされるような積分を表わすものと承知されたい。この圧密の式は弾性体の場合と同じく微少部分について式をたてることによつて誘導される。

初期条件;  $t = 0: w = w_0$   
境界条件;  $z = 0, z = 2h: w = 0$

のときに演算子法によつてこれを解くと、(5) の左辺は変換して  $p(w - w_0)$  となり (5) の右辺は次のようにして計算される。 $\int_0^t e^{-\alpha(t - \tau)} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} d\tau$  は  $e^{-\alpha t}$  と  $\partial^2 w / \partial z^2$  との合成函数であるから、この変換は  $e^{-\alpha t}$  の変換を  $p$  で割つた値と  $\partial^2 w / \partial z^2$  の変換との積である。 $\partial^2 w / \partial z^2$  の変換を  $d^2 w / dz^2$  と書くと、これは  $(d^2 w / dz^2) / (p + \alpha)$  となる。 $e^{-\gamma t}$  についても同様でこれらに係数をかけて  $d^2 w / dz^2$  との和をとると (5) の右辺の交換が得られ、結局 (5) は

$$p(w-w_0) = a^2 \frac{p+\beta}{p+\alpha} \cdot \frac{p+\delta}{p+\gamma} \cdot \frac{d^2w}{dz^2} \dots\dots\dots(6)$$

となる。土粒子に働く圧縮応力は  $w_0-w$  であるから沈下量の式は

$$-E \frac{p+\beta}{p+\alpha} \frac{p+\delta}{p+\gamma} \frac{\partial u}{\partial z} = w_0-w \dots\dots\dots(7)$$

(6) より間隙水圧力  $w$  を求めこれを (7) に代入して圧密沈下量  $u$  を求める。

(6) を境界条件の下に解くと

$$w = w_0 - \frac{w_0}{\cosh(qh)} \cosh q(h-z) \dots\dots\dots(8)$$

ただし  $q = \frac{\sqrt{p}}{a} \sqrt{\frac{p+\alpha}{p+\beta}} \sqrt{\frac{p+\gamma}{p+\delta}}$

これを (7) の右辺に代入して  $u$  を求めると

$$-u = \frac{w_0}{E} \frac{1}{q \cosh(qh)} \cdot \frac{p+\alpha}{p+\beta} \frac{p+\gamma}{p+\delta} \{ \sinh q(z-h) - \sinh qh \} \dots\dots\dots(9)$$

ただし  $z=2h$  で  $u=0$  とした。平均の沈下量を  $\bar{u}$  とすると

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{1}{2h} \int_0^{2h} u dz \\ &= \frac{w_0}{E} \cdot \frac{a}{\sqrt{p}} \sqrt{\frac{p+\alpha}{p+\beta}} \sqrt{\frac{p+\gamma}{p+\delta}} \tanh(qh) \dots\dots\dots(10) \end{aligned}$$

演算子では  $t \rightarrow 0$  は  $p \rightarrow \infty$ ,  $t \rightarrow \infty$  は  $p \rightarrow 0$  に対応するから、これより

$$t \rightarrow 0: \bar{u} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty: \bar{u} \rightarrow \frac{w_0}{E} \cdot \frac{a\gamma}{\beta\delta} h$$

$t \rightarrow \infty$  で  $\bar{u}$  が 1 になるように係数を加減したものを  $U$  と書くと

$$U = \frac{\beta\delta}{a\gamma} \cdot \frac{a}{h} \cdot \frac{1}{\sqrt{p}} \sqrt{\frac{p+\alpha}{p+\beta}} \sqrt{\frac{p+\gamma}{p+\delta}} \tanh\left(\frac{h}{a} \sqrt{p} \sqrt{\frac{p+\alpha}{p+\beta}} \sqrt{\frac{p+\gamma}{p+\delta}}\right) \dots\dots\dots(11)$$

この式より試験の始め及び終りの圧密度は次のようにして評価される。まず  $p$  が充分大きいときは  $\tanh, \sqrt{(p+\alpha)/(p+\beta)}, \sqrt{(p+\gamma)/(p+\delta)}$  はともに 1 となるから  $t \rightarrow 0: p \rightarrow \infty$  として

$$U \rightarrow \frac{\beta\delta}{a\gamma} \cdot \frac{a}{h} \frac{1}{\sqrt{p}} = \frac{\beta\delta}{a\gamma} \cdot \frac{a}{h} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t} \dots\dots\dots(12)$$

これを弾性体の式と比べると 1 次圧密度は  $\beta\delta/a\gamma$  で表わされることがわかる。

$t \rightarrow \infty$  のときの値を評価する場合には  $(a/h)^2$  と  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  との大小によつて 2 つの場合が生ずる。

(1)  $(a/h)^2 \gg \alpha$  のとき、すなわち試料の厚さが充分薄いときは  $\tanh$  の括弧内の数が小さいから  $\tanh x = x$  とおいて差支えないから

$$U \rightarrow \frac{\beta\delta}{a\gamma} \cdot \frac{p+\alpha}{p+\beta} \frac{p+\gamma}{p+\delta} = 1 - \frac{1}{a\gamma(\beta-\delta)}$$

$$\{ \delta(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)e^{-\beta t} + \beta(\alpha-\delta)(\gamma-\delta)e^{-\delta t} \} \dots\dots\dots(13)$$

$\alpha, \beta \gg \gamma, \delta$  のとき、これは

$$U \approx 1 - \frac{\delta(\alpha-\beta)}{a\gamma} e^{-\beta t} - \frac{\gamma-\delta}{\gamma} e^{-\delta t} \dots\dots\dots(14)$$

(2)  $\delta \gg (a/h)^2$  のとき、すなわち地盤の厚さが充分厚いときは  $t \rightarrow \infty$  に相当する  $p \rightarrow 0$  の値は  $(a/h)^2$  の程度に小さいものであり、このとき  $p+\alpha$  等は  $\alpha$  等とおいてよくなるので、従つて

$$U \rightarrow \sqrt{\frac{\beta\delta}{a\gamma}} \cdot \frac{a}{h} \cdot \frac{1}{\sqrt{p}} \tanh\left(\frac{h}{a} \sqrt{\frac{a\gamma}{\beta\delta}} \sqrt{p}\right) \dots\dots\dots(15)$$

となる。これは弾性体の圧密と同じ式でその圧密の時定数が  $(h/a)^2$  でなく、 $(h/a)^2 a\gamma/\beta\delta$  となることを示している。すなわち実験室内での試験より求めた  $(h/a)^2$  の代りに  $(h/a)^2 a\gamma/\beta\delta$  を使わねばならない。  $U$  は時間がたつと指数的に変るがこれは弾性体では  $\exp\{-(a\pi/2h)^2 t\}$  と表わされるが、粘弾性体ではこれが  $\exp\{-(a\pi/2h)^2 t \beta\delta/a\gamma\} a\gamma/\beta\delta$  となる。すなわち弾性理論より求めた結果より時間が  $a\gamma/\beta\delta$  倍になる。そのとき圧密度も実験室で求めた 1 次圧密度の  $a\gamma/\beta\delta$  倍になる。

### 3. 実験値の解析

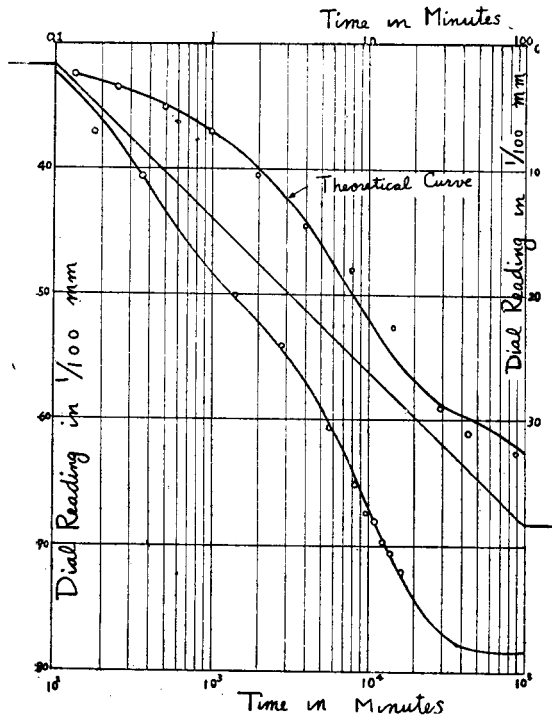
実験室内の試験では試料が薄く  $(a/h)^2 \gg \alpha$  であるから時間が充分たつと圧密度  $U$  は (13), (14) で表わされる。  $\alpha, \beta$  と  $\gamma, \delta$  とが同じ程度のときは両者を区別する必要はない。  $\alpha, \beta \gg \gamma, \delta$  のときは圧密度の最終部分に着目すると、これは  $e^{-\delta t}$  に従つて変化するから、最終圧密度を仮定しこれと測定圧密度との差の対数を縦軸に、時間を横軸にとるとこれは直線になる。この直線の傾斜より  $\delta$  を求め、時間軸の原点との交わりの値より  $\beta(\alpha-\delta)(\gamma-\delta)/a\gamma(\beta-\delta) = (\gamma-\delta)/\gamma$  を求める。次にこの値を実験値より差引いて同じ操作を繰返すことにより、  $\beta$  と  $\delta(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)/a\gamma(\beta-\delta) = \delta(\alpha-\beta)/a\gamma$  とを求める。これより  $\alpha, \gamma$  が求まる。時間の始めの部分の測定値は (12) で表わされるように  $\sqrt{t}$  に比例するから  $U-\sqrt{t}$  曲線の傾斜よりいま求めた  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  を使えば  $a/h$  が求まる。これより 1 次圧密を計算し 2 次圧密の部分より差引き 2 次圧密の  $\alpha, \beta$  を修正する。

横浜の高島駅構内粘土の実験結果を示すと図-3 のようである。縦軸に圧密度、横軸に時間の対数をとつて示してある。上記の方法で計算した結果は全圧密度は 1/100 mm 単位で 785, 1 次圧密 275, 2 次圧密は時定数が  $\beta$  のもの 190,  $\delta$  のもの 320 である。これより諸量の値を求めると

$$\alpha = 0.275 \text{ hour}^{-1}, \quad \gamma = 0.234 \text{ day}^{-1}$$

$$\beta = 0.163 \text{ hour}^{-1}, \quad \delta = 0.139 \text{ day}^{-1}$$

図-3 Consolidation Test of  
YOKOHAMA Clay



$$(a/h)^2 = 0.050 \text{ min}^{-1} = 3.0 \text{ hour}^{-1}$$

この値を使つて計算した値は 図-3 の線に示すようなものであつて実験値とよく一致している。図を見ると実験値は 20 分の附近で圧密量が波打つているがこれは理論値でよく説明される。また 1 日の附近でも波打が認められるがこれも理論で求められる。

剪断変形試験で求めた粘弾性係数の値と比較すると、前記の石本、飯田両氏の試料では

$$\alpha = 1.9 \times 10^{-5} \text{ sec}^{-1} = 1.64 \text{ day}^{-1}$$

$$\beta = 1.0 \times 10^{-5} \text{ sec}^{-1} = 0.86 \text{ day}^{-1}$$

であつて圧密試験より求めた  $\alpha$ ,  $\beta$  と  $\gamma$ ,  $\delta$  とのちょうど中間である。粘弾性係数が圧密と剪断と両者より求めたものが大体同じくらいというのは、粘土の粘弾性的性質が動かし難いものであることを示しているといえよう。

なお実験は針生幸治氏にやつていただいたものである。記して厚く感謝の意を表したい。

#### 文 献

- 1) 篠田仁吉：二、三の物質の粘弾性，応用力学，第 2 巻第 12 号，昭.24.
- 2) 石本巳四雄，飯田波事：土の粘弾性と剪断抵抗，震研彙報，第 14 号第 4 冊，昭.11.
- 3) 石井靖丸：大阪の地盤沈下に関する研究，昭.24.7，大阪港湾技術調査会 (昭.27.12.8)

UDC 624.27.057.4

## 島根県江川橋梁架設工事について

正 員 陶 山 襄\*

### REPORT ON THE CONSTRUCTION WORK OF THE GŌGAWA BRIDGE

(JSCE May 1953)

Noboru Suyama, C.E. Member

**Synopsis** The following report is on the construction work of the Gōgawa bridge. The original bridge was washed away by the terrific flood in 1943.

Immediately afterward a wooden bridge was built, but this structure was washed away by another flood in 1944, then another wooden bridge was built in 1945.

Frequently people barely managed to cross the river by means of primitive ferry boats.

In view of this fact, the necessity of this bridge is obvious, and the construction of a permanent bridge was earnestly demanded.

#### I. 総 説

従来の江川橋梁は国道島根県那賀郡江津町地内中国一の江川に架設された木鉄混合構橋及び I 型単桁橋で

あつたが昭和 18 年風水害のため流失し爾来木造仮橋をもつて連絡に努めていたが 1 年に 1~2 度の仮橋の流失あるいは破損は避けられない状態となりその都度交通は杜絶し人のみを辛じて渡船で連絡していた。国道 18 号は山陰の動脈とも云うべき最も重要な幹線

\* 島根県土木部道路課