

- (2) 大規模な実験を行い、現場との相関性。
- (3) 濾床閉塞による濾過能率のみでなく、その他の細菌学的な濾過能率との関連性。

本実験研究を行うにあたって、終始、懇切な御指導を賜わった東大教授広瀬孝六郎先生に深謝致します。また実験計算を手伝って頂いた本教室助手染野貢一、大野良雄両君に感謝致します。

参 考 文 献

- 1) Gordon M. Fair & Loranus P. Hatch : "Fundamental Factors Governing the Streamline Flow of Water through Sand" J.A.W.W.A., Vol. 25, No. 11, p. 1551(1933)
- 2) Boucher, P. L. : "A New Measure of the Filtrability of Fluids with Applications

- to Water Engineering." Jour. Inst. Civ. Engrs. 27 : 415 (Feb. 1947)
- 3) Joseph M. Sanchis & John C. Merrell Jr. "Studies on Diatomaceous Earth Filtration." J.A.W.W.A., Vol. 43, No. 7 p. 475 (1951)
- 4) 合田 健 : "砂濾過における損失水頭および圧力水頭の計算について" 土木学会誌, 第37巻第3号
- 5) L.P. Hatch : "Flow through Granular Media" Jour. of Applied Mechanics, Vol. 7, No. 3, p. 109 (1940)
- 6) 合田 健・川島 普 : "砂濾過の実験的研究" 土木学会第8回年次学術講演会(昭.27)
- 7) 合田 健他2氏 : "浸透式の代表径と常致に関する実験的考察" 第3回上下水道研究発表会(昭.27) (昭.27.7.4)

UDC 624,31:534.13

平行弦トラス橋の基本振動数について¹⁾

正 員 工学博士 小 西 一 郎*
准 員 山 田 善 一**

ON THE FUNDAMENTAL FREQUENCY OF VIBRATION OF THE TRUSS BRIDGE WITH PARALLEL CHORDS

(JSCE Dec. 1952)

Dr. Eng., Ichiro Konishi, C.E. Member and Yoshikazu Yamada, C.E. Assoc. Member

Synopsis In this paper, one approximate method for the calculation of the fundamental frequency of vibration of the truss with parallel chords is derived, and then the rigidity of the truss bridge is studied, compared with the experimental results.

要旨 本文は、平行弦トラスの基本振動数を求める一近似解法につきのべ、実験結果と比較して、トラス橋の剛性につき考察を加えた。

1. 緒 言

活荷重の橋梁に対して与える動力的効果については古くから各種各方面の研究が発表せられ、衝撃係数設定の根拠となつている。しかし本文では、おもにトラス橋の剛性を振動性状から考察するという立場から、その基本振動周期の一近似計算を行つた。トラスの基本振動数を求める方法には、Pohlhausen²⁾、Federhofer³⁾ などがあり、それぞれ独自の研究がなされているが、いずれも数値計算上かなりの繁雑はまぬかれない。ここでは、トラスの振動形状を基本振動

の型に近似して仮定し、数値計算上自由度4の連成振動として、近似的にその基本振動数を求めた。

2. 基本振動数計算式

(1) トラスの自由振動 トラスにおいて部材の質量を各節点に集中した場合、すなわち質点系をもつて等価力学系と考えると⁴⁾、この振動系は $(2n-a)$ の自由度をもつ。ここに、 n は節点の数、 a は支点反力の数である。この振動系の自由振動数を求めることは、 $(2n-a)$ 次の代数方程式の根を求めることに帰着し、数値的にこれを解くことは困難である。よつて振動中の形状を適当な形に限定して、運動を拘束し、拘束された振動系についてその振動数方程式を求めた。この方法では基本振動のみに限られるが、トラスの剛性を振動性状より考察するには、多くの場合おもに基本振動のみを問題とするので、実用上かなり有効であろう。

* 京都大学教授，工学部土木工学教室

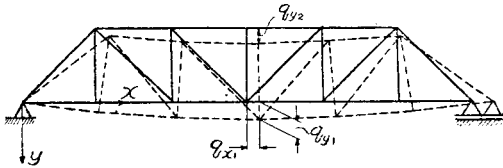
** 京都大学，大学院研究奨学生

(2) 振動中の変位曲線の仮定 一般にエネルギー法を用いる場合、その曲線の仮定が概略であつても、自由振動激に対してかなり良好な精度を与える。それで上下弦各節点の振動中の鉛直、水平両方向の変位を、それぞれ次に示すような近似曲線で表わす。

$$\left. \begin{aligned} u_i^l &= \left(1 - \cos \frac{\pi x_i}{l}\right) \cdot q_{x1} \\ u_i^u &= q_{x1} + q_{x2} \cdot \cos \frac{\pi x_i}{l} \\ v_i^l &= q_{y1} \cdot \sin \frac{\pi x_i}{l} \\ v_i^u &= q_{y2} \cdot \sin \frac{\pi x_i}{l} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 u_i^l : 下弦節点 i の水平方向変位、 u_i^u : 上弦節点 i の水平方向変位、 v_i^l : 下弦節点 i の鉛直方向変位、 v_i^u : 上弦節点 i の鉛直方向変位、 x_i : ヒンヂ端より節点にいたる水平方向長さ、 l : スパン長さ。また、時間関数 q_{x1} , q_{x2} , q_{y1} , q_{y2} はこの振動系に対する一般座標で、具体的には 図-1 に示す通りであり、 q_{x2} は上弦材、下弦材の応力の違いによる変位を補正するためにもちいた座標である。

図-1



(3) 運動方程式

a. 位置エネルギー: トラスの部材応力を S_{ij} とすれば、位置エネルギーは、

$$V = \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{S_{ij}}{EF_{ij}} s_{ij} \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 E : トラス構成部材材料のヤング率、 F_{ij} : 部材 (ij) の断面積、 s_{ij} : 部材 (ij) の長さ。

また、 S_{ij} については、高次の微小量を無視すると、

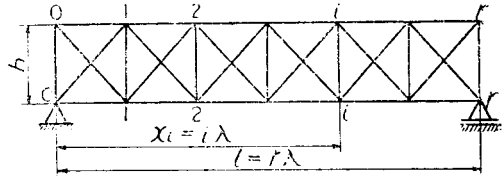
$$S_{ij} = \frac{EF_{ij}}{s_{ij}} [(u_j - u_i) \cos \alpha + (v_j - v_i) \sin \alpha] \dots (3)$$

ここに、 u_i, u_j : 部材 (ij) の両端 i, j における水平方向変位、 v_i, v_j : 部材 (ij) の両端 i, j における鉛直方向変位、 α : 節点 i よりの水平線と部材 (ij) のなす角 (時計方向を正)。

トラスの格間長を λ 、高さを h 、とし、 $x = i\lambda$, $l = r\lambda$ 、とおき、式 (1), (2), (3) を用いると、

$$\begin{aligned} 2V &= E(k_{11}q_{x1}^2 + k_{22}q_{x2}^2 + k_{33}q_{y1}^2 + k_{44}q_{y2}^2 \\ &+ 2k_{12}q_{x1}q_{x2} + 2k_{34}q_{y1}q_{y2} + 2k_{14}q_{x1}q_{y2} \\ &+ 2k_{23}q_{x2}q_{y1} + 2k_{24}q_{x2}q_{y2} + 2k_{34}q_{y1}q_{y2}) \end{aligned} \dots\dots\dots (4)$$

図-2



ここに、各係数は 図-2 に示すような一般的トラスに対して、その斜材の交点を自由と考えれば、

$$\begin{aligned} k_{11} &= \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^r F_{(i-1)i}^l \left(\cos \frac{(i-1)\pi}{r} - \cos \frac{i\pi}{r} \right)^2 \\ &+ \frac{\lambda^2}{d^3} \left(\sum_{i=1}^r F_{(i-1)i}^{a'} \cos^2 \frac{(i-1)\pi}{r} \right. \\ &\left. + \sum_{i=1}^r F_{(i-1)i}^{a''} \cos^2 \frac{i\pi}{r} \right) \\ k_{22} &= \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^r F_{(i-1)i}^u \left(\cos \frac{(i-1)\pi}{r} - \cos \frac{i\pi}{r} \right)^2 \\ &+ \frac{\lambda^2}{d^3} \left(\sum_{i=1}^r F_{(i-1)i}^{a'} \cos^2 \frac{i\pi}{r} \right. \\ &\left. + \sum_{i=1}^r F_{(i-1)i}^{a''} \cos^2 \frac{(i-1)\pi}{r} \right) \\ k_{33} &= \frac{1}{h} \sum_{i=0}^r F_{ii}^n \sin^2 \frac{i\pi}{r} + \frac{h^2}{d^3} \\ &\left(\sum_{i=1}^r F_{(i-1)i}^{a'} \sin^2 \frac{(i-1)\pi}{r} \right. \\ &\left. + \sum_{i=1}^r F_{(i-1)i}^{a''} \sin^2 \frac{i\pi}{r} \right) \\ k_{44} &= \frac{1}{h} \sum_{i=0}^r F_{ii}^n \sin^2 \frac{i\pi}{r} + \frac{h^2}{d^3} \\ &\left(\sum_{i=1}^r F_{(i-1)i}^{a'} \sin^2 \frac{i\pi}{r} \right. \\ &\left. + \sum_{i=1}^r F_{(i-1)i}^{a''} \sin^2 \frac{(i-1)\pi}{r} \right) \\ k_{12} &= \frac{\lambda^2}{d^3} \sum_{i=1}^r (F_{(i-1)i}^{a'} + F_{(i-1)i}^{a''}) \cos \frac{(i-1)\pi}{r} \cos \frac{i\pi}{r} \\ k_{13} &= \frac{\lambda h}{d^3} \left(\sum_{i=1}^r F_{(i-1)i}^{a'} \cos \frac{(i-1)\pi}{r} \sin \frac{(i-1)\pi}{r} \right. \\ &\left. - \sum_{i=1}^r F_{(i-1)i}^{a''} \cos \frac{i\pi}{r} \sin \frac{i\pi}{r} \right) \\ k_{14} &= \frac{\lambda h}{d^3} \left(- \sum_{i=1}^r F_{(i-1)i}^{a'} \cos \frac{(i-1)\pi}{r} \sin \frac{i\pi}{r} \right. \\ &\left. + \sum_{i=1}^r F_{(i-1)i}^{a''} \cos \frac{i\pi}{r} \sin \frac{(i-1)\pi}{r} \right) \\ k_{23} &= \frac{\lambda h}{d^3} \left(\sum_{i=1}^r F_{(i-1)i}^{a'} \cos \frac{i\pi}{r} \sin \frac{(i-1)\pi}{r} \right. \\ &\left. - \sum_{i=1}^r F_{(i-1)i}^{a''} \cos \frac{(i-1)\pi}{r} \sin \frac{i\pi}{r} \right) \\ k_{24} &= \frac{\lambda h}{d^3} \left(- \sum_{i=1}^r F_{(i-1)i}^{a'} \cos \frac{i\pi}{r} \sin \frac{i\pi}{r} \right. \\ &\left. + \sum_{i=1}^r F_{(i-1)i}^{a''} \cos \frac{(i-1)\pi}{r} \sin \frac{(i-1)\pi}{r} \right) \end{aligned}$$

$$k_{34} = -\frac{1}{h} \sum_{i=0}^r F_{ii}^v F_{ii}^p \sin^2 \frac{i\pi}{r} - \frac{h^2}{d^3} \sum_{i=1}^r \left(F_{(i-1)i}^{d'} + F_{(i-1)i}^{d''} \right) \sin \frac{(i-1)\pi}{r} \sin \frac{i\pi}{r} \dots\dots\dots(4')$$

ただし $d = \sqrt{\lambda^2 + h^2}$

また、 $\Sigma^l, \Sigma^u, \Sigma^d, \Sigma^{d'}, \Sigma^{d''}, \Sigma^v$ はそれぞれ下弦材、上弦材、全斜材、右上り斜材、左上り斜材、鉛直材についての和を表わし、 $F_{(i-1)i}^l, F_{(i-1)i}^u, F_{(i-1)i}^d, F_{(i-1)i}^{d'}, F_{(i-1)i}^{d''}, F_{ii}^v$ は、右下添字の節点を連結する下弦材、上弦材、右上り斜材、左上り斜材、鉛直材の断面積である。対称トラスに対しては、対称変形を対象にしているため、片側についてのみ計算を行い2倍すればよい。

b. 運動エネルギー：2. (1) にのべたような等価力学系に対し、運動エネルギーは、

$$T = \frac{1}{2g} \sum_i W_i (\dot{u}_i^2 + \dot{v}_i^2) \dots\dots\dots(5)$$

式(1)を式(5)に入れ

$$2T = \frac{1}{g} (m_{11}\dot{q}_{x1}^2 + m_{22}\dot{q}_{x2}^2 + m_{33}\dot{q}_{y1}^2 + m_{44}\dot{q}_{y2}^2 + 2m_{12}\dot{q}_{x1}\dot{q}_{x2}) \dots\dots\dots(6)$$

ここに、

$$\begin{aligned} m_{11} &= \sum_{i=0}^r W_i^u + \sum_{i=0}^r W_i^l \left(1 - \cos \frac{i\pi}{r} \right)^2 \\ m_{22} &= \sum_{i=0}^r W_i^u \cos^2 \frac{i\pi}{r} \\ m_{33} &= \sum_{i=0}^r W_i^l \sin^2 \frac{i\pi}{r} \\ m_{44} &= \sum_{i=0}^r W_i^u \sin^2 \frac{i\pi}{r} \\ m_{12} &= \sum_{i=0}^r W_i^u \cos \frac{i\pi}{r} \dots\dots\dots(6') \end{aligned}$$

ただし、 W_i^l, W_i^u は上記の等価力学系においてそれぞれ下弦、上弦節点 i の重量である。

c. 振動数方程式：式(4)及び式(6)の T, V を Lagrange の運動方程式に入れると、振動の微分方程式として、

$$\begin{aligned} \frac{1}{Eg} (m_{11}\ddot{q}_{x1} + m_{12}\ddot{q}_{x2}) + k_{11}q_{x1} + k_{12}q_{x2} \\ + k_{13}q_{y1} + k_{14}q_{y2} = 0 \\ \frac{1}{Eg} (m_{12}\ddot{q}_{x1} + m_{22}\ddot{q}_{x2}) + k_{12}q_{x1} + k_{22}q_{x2} \\ + k_{23}q_{y1} + k_{24}q_{y2} = 0 \\ \frac{m_{33}}{Eg} \ddot{q}_{y1} + k_{13}q_{x1} + k_{23}q_{x2} + k_{33}q_{y1} + k_{34}q_{y2} = 0 \\ \frac{m_{44}}{Eg} \ddot{q}_{y2} + k_{14}q_{x1} + k_{24}q_{x2} + k_{34}q_{y1} + k_{44}q_{y2} = 0 \end{aligned} \dots\dots\dots(7)$$

この式の解として

$$q_n = A_n \cos (pt + \phi) \quad (n = x, 1, x, 2, y, 1, y, 2)$$

のような単弦振動を考えればよいため、これを式(7)に入れ

$$p' = \frac{p}{Eg}$$

とにおいて A_n を消去すれば、振動数方程式として、

$$\begin{vmatrix} (m_{11}p'^2 - k_{11})(m_{12}p'^2 - k_{12}) & -k_{13} & -k_{14} \\ (m_{12}p'^2 - k_{12})(m_{22}p'^2 - k_{22}) & -k_{23} & -k_{24} \\ -k_{13} & -k_{23} & (m_{33}p'^2 - k_{33}) & -k_{34} \\ -k_{14} & -k_{24} & -k_{34} & (m_{44}p'^2 - k_{44}) \end{vmatrix} = 0 \dots\dots\dots(8)$$

を得る。式(8)は p'^2 に関する4次方程式で、この根のうち最小なものが基本振動数に相当する。他の根はこの場合撓み振動に対して意味をもたないため問題にしない。一般に最小の根に対しては、3次及び4次の項を省略し、2次方程式として解いてよいことが多い。

(4) 水平方向変位に直線式を用いる場合 振動中の変位曲線として式(1)の代りに、上下弦材各の応力度が各弦を通じ同一であるとし、水平方向変位に直線式を用いて、次のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} u_i^l &= \frac{x_i}{l} q_{x1} \\ u_i^u &= \frac{x_i}{l} q_{x1} + \left(\frac{1}{2} - \frac{x_i}{l} \right) q_{x2} \\ v_i^l &= q_{y1} \sin \frac{\pi x_i}{l} \\ v_i^u &= q_{y2} \sin \frac{\pi x_i}{l} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(9)$$

これを用い前と同様に演算を行えば、式(4)の係数は

$$\begin{aligned} k_{11} &= \frac{1}{\lambda r^2} \left(\sum_{i=1}^r F_{(i-1)i}^l + \sum_{i=1}^r F_{(i-1)i}^u \right) \\ &\quad + \frac{\lambda^2}{d^3 r^2} \left(\sum_{i=1}^r F_{(i-1)i}^{d'} + \sum_{i=1}^r F_{(i-1)i}^{d''} \right) \\ k_{22} &= \frac{1}{\lambda r^2} \sum_{i=1}^r F_{(i-1)i}^u + \frac{\lambda^2}{d^3 r^2} \\ &\quad \times \left[\sum_{i=1}^r F_{(i-1)i}^{d'} \left(\frac{r}{2} - i \right)^2 + \sum_{i=1}^r F_{(i-1)i}^{d''} \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{r}{2} - i + 1 \right)^2 \right] \\ k_{33} &= \text{式(4) } k_{33} \\ k_{44} &= \text{式(4) } k_{44} \\ k_{12} &= -\frac{1}{\lambda r^2} \sum_{i=1}^r F_{(i-1)i}^u + \frac{\lambda^2}{d^3 r^2} \\ &\quad \times \left[\sum_{i=1}^r F_{(i-1)i}^{d'} \left(\frac{r}{2} - i \right) - \sum_{i=1}^r F_{(i-1)i}^{d''} \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{r}{2} - i + 1 \right) \right] \end{aligned}$$

$$k_{11} = \frac{\lambda h}{d^3 r} \left(\sum_{i=1}^r F_{(i-1)}^{a'} \sin \frac{(i-1)\pi}{r} + \sum_{i=1}^r F_{(i-1)}^{a''} \sin \frac{i\pi}{r} \right)$$

$$k_{14} = -\frac{\lambda h}{d^3 r} \left(\sum_{i=1}^r F_{(i-1)}^{a'} \sin \frac{i\pi}{r} + \sum_{i=1}^r F_{(i-1)}^{a''} \sin \frac{(i-1)\pi}{r} \right)$$

$$k_{23} = \frac{\lambda h}{d^3 r} \left[\sum_{i=1}^r F_{(i-1)}^{a'} \left(\frac{r}{2} - i \right) \sin \frac{(i-1)\pi}{r} - \sum_{i=1}^r F_{(i-1)}^{a''} \left(\frac{r}{2} - i + 1 \right) \sin \frac{i\pi}{r} \right]$$

$$k_{24} = \frac{\lambda h}{d^3 r} \left[-\sum_{i=1}^r F_{(i-1)}^{a'} \left(\frac{r}{2} - i \right) \sin \frac{i\pi}{r} + \sum_{i=1}^r F_{(i-1)}^{a''} \left(\frac{r}{2} - i + 1 \right) \sin \frac{(i-1)\pi}{r} \right]$$

k_{34} = 式 (4') k_{44} (4'')

式 (6) の各係数は

$$m_{11} = \frac{1}{r^2} \sum_{i=0}^r i(W_i^l + W_i^u)$$

$$m_{23} = \frac{1}{r^2} \sum_{i=0}^r W_i^u \left(\frac{r}{2} - i \right)^2$$

m_{33} = 式 (6') m_{35}

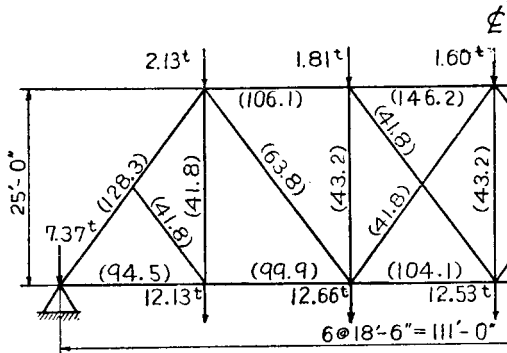
m_{41} = 式 (6') m_{44}

$$m_{12} = -\frac{1}{r^2} \sum_{i=0}^r W_i^u i \left(\frac{r}{2} - i \right) \dots \dots \dots (6'')$$

となる。式 (1) を用いた場合と式 (9) を用いる場合とはその計算結果においてほとんど変わらない。

3. 数値計算結果とその考察

図-3



つぎに以上の式を用いた計算結果と, Pohlhausen, Federhofer の各方法による計算結果とを比較する。枚方大橋左岸より第 14, 15 連トラスを例にとつて計算する。本トラスは 図-3 に示すように, 平行弦ブラケットトラスで, 部材断面積は図中 () 内に cm² 単位で, 各節点重量は図中矢印で示す。

(1) 計算結果, 実験結果 図示の各値を用いて基本振動周期を計算した結果, ならびに本橋溶接補強前に行つた振動試験による基本振動周期の実験値は表-1 に示すとおりである。

(2) 考察 表-1

表-1	
計 算 方 法	周 期 (sec)
本法式 (1) 使用	0.201
" 式 (9) 使用	0.201
Federhofer	0.202
Pohlhausen	0.204
実験値	0.177~0.180

からわかるように, 式 (1) を用いた場合と式 (9) を用いた場合とは, ほぼ同一の結果を得た。また他の方法に比してもその誤差は微小である。

つぎに計算結果と実験結果がかなり異なり, 後者が前者の約 90% であるのは, 剛節, 縦桁, 床版, 横構の剛性などの影響を計算に考慮しなかつたためと思われる。さらにスパンの大きい第 13 連に対しても同様の傾向が得られた。トラス橋では撓み量の実測値は計算値の約 80% であることから, 振動周期が撓み量の平方根に比例することを考えれば, これらの相違は容易に説明されると思う。

註

- 1) 土木学会第 8 回年次学術講演会 (昭.27.5.25.) で発表
- 2) Fr. Bleich: Theorie und Berechnung der eisernen Brücken, S.66-77, 1924.
Fr. Bleich: Stahlhochbauten I, S.421-431, 1932.
- 3) E. Federhofer: Zur Berechnung der niedrigsten Eigenschwingungszahl eines Fachwerkes, Der Stahlbau, Heft I, S.6~8, 1934.
- 4) 部材の質量を各節点に集中するものと仮定することによつて生ずる運動エネルギーの変化は実用上無視してさしつかえない。(昭.27.7.15)