

年最大洪水流量の長期予報について*

正員 工学博士 石原藤次郎**

准員 上山惟康***

ON THE LONG RANGE FORECASTING OF ANNUAL FLOOD DISCHARGE

(JSCE Nov. 1952)

Dr. Eng., Tojiro Ishihara, C. E. Member, Koreyasu Ueyama, C. E. Assoc. Member

Synopsis Referring to the fact that the annual flood discharge may be assumed to be a stationary process, we analyzed the series of observed values based on the theory of time series and also forecast the annual flood discharges of the TONE- and YODO-Rivers in long range.

要旨 年最大洪水流量を定常確率過程とみなしてよいくことに着目し、時系列論によつて観測系列を解析し、利根川及び淀川の年最大洪水流量の長期予報を試みたものである。

1. 前書き

河川流量が大局的にみると移動平均的な意味で週期的変動をしていることは、前報^{*)}に述べた通りである。こうした移動平均で得られる曲線は平均値曲線に相当し、流量の観測値は洪水系列ではもちろん、自然流量系列でも、その平均値曲線の上下に不規則に分布するわけである。このように不規則分散をする原因としては、例えば降雨を支配する多くの気象的要素、林相や河相などの流出条件の変化、観測法の巧拙及び個人誤差などが考えられる。このうちで流出条件以下の諸要素はなるべく取り除く必要があるが、技術的な制約などのために、実際にはなかなか困難である。一方気象要件については、系列の長期傾向によつて流量の増減を予想したとしても、多雨コースを進んでいた台風針路が少しずれるとか、気象条件によつてたいした降雨をみずに予想外の結果をうむことはよく経験され、この逆の場合についても同様である。こうして生じた結果が常に平均値曲線に接近した値を示せば問題はないが、河川流量では一般に分散が大きいので、平均値曲線のみによる予報は粗雑たるをまぬかれない。それで別途の考慮によつて平均値曲線よりの偏倚の大きさを推定しなければならぬが、そのためには時間的に変

わる確率変数相互間の依存関係によつて追及してゆく以外にないようである。

上述のごとく河川流量の平均値からの分散は極めて不規則な要素に支配されているが、この不規則という意味を確率的なものと考えてよい場合を考えよう。そうすればこういう変動を、ある物体に不規則な外力が働いた場合の振動と同様に取扱い、その自由振動から週期や振幅などが推定される。こうして得られた週期、振幅などを用い、かつ現実を得られた系列によつて条件付確率変数を定めると、外挿公式、従つて予報が可能となる。以上の解析法を一般に時系列論^{*)}というが、これによつて本文の研究を進めたわけである。

2. 相関係数による単純な予想

変数相互間の最も簡単な確率的依存関係としては、 $X(t)$ と $X(t-i)$ との系列相関係数を用いることが考えられる。例えば利根川栗橋地先の年最大洪水系列では、週期2年の波が特に多いことに着目すると、この過程を単純マルコフ過程^{*)}として近似的に取扱つてよいように思われる。それで X_n の確率法則が X_{n-1} のとつた値だけに依存し、 X_{n-2} , X_{n-3} , ... のとつた値に無関係な場合と考え、標本値 x_n と $(x_{n+1}-x_n)$ との相関関係を調べると、図-1のごとく相関係数は $r = -0.6470$ で、回帰直線は

$$(x_{n+1}-x_n) = 0.8652 x_n + 3140 \pm 2150 \dots \dots (1)$$

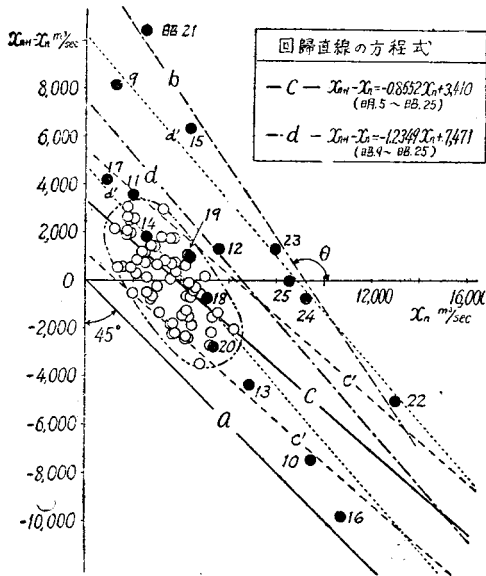
となり、直線cのごとく図示される。すべての観測値は直線aの上方にくるが、○印で示した明治5年以降昭和8年までの値が全部閉曲線の中に吸収されるのに対し、●印で示した昭和9年以降の値の多くは回帰直線cの上方にあつて、散らばり方も異常なものがある。これは昭和9年以降の平均値が著しく上昇したこと、分散が増大したことに由来している。なお特に問

* 昭. 27. 5. 25, 第8回年次学術講演会にて“河川流量の長期予報について”として発表したものの一部である。

** 京都大学教授, 工学部土木工学教室。

*** 京都大学助手, 工学部土木工学教室。

図一 利根川栗橋地先の年最大洪水系列における x_n と $(x_{n+1}-x_n)$ との関係
Correlation between x_n and $(x_{n+1}-x_n)$ of the annual flood sequence in the TONE-River at Kurihashi.



(c', d' はそれぞれ c, d の 70% 信頼限界である。)

題になるのは、昭和 21~25 年がふしぎに直線 b の上にのり、しかも横軸を中心として上下交互に軸上の 25 年の値に向つて収斂していることである。もし直線的相関があると仮定すると、あまり流量の大きくない範囲で直線 b の傾き θ が 120° より大または小となるに応じそれぞれ収斂または発散し、 $\theta = 120^\circ$ で循環的変動をすることになるが、常識的に判断して特にこうした変化が起るとは考えられないから、昭和 21 年以降直線にのつたことには 特別な意味はないようである。

そこで系列を昭和 8 年以前と 9 年以降とにわけ、後者を前者と無関係とみて後者の相関係数を求めると $r = -0.825$ 、従つて全体の値の場合に比し相関性はずつと高く、回帰直線は次式で与えられ、直線 dのごとく図示される。

$$x_{n+1} - x_n = -1.2349 x_n + 7471 \pm 2660 \dots \dots (2)$$

今後の変動が (2) 式に従うとみなし、昭和 26 年の利根川最大流量を推定すると、信頼度約 70% で 3500 ~ 8900 m^3/sec 、平均 6200 m^3/sec となり、25 年の 8500 m^3/sec より大体少ないと予想し得たわけである。

この方法は計算が頗る簡単であるが、河川流量でこのような高い相関は一般に期待し難く、系列相関係数を数多く使用する以下の方法に対して精度が劣るはず

である。

3. 系列相関係数による洪水系列の解析

時系列論で取扱ひの対象となるのは、今のところ定常確率過程⁵⁾である。この場合、同時分布函数及び主分布函数が t に無関係となり、母集団の特性量もまた t に無関係となる。標本の統計量はエルゴード性により $n \rightarrow \infty$ のとき母集団の特性量に一致するから、時系列の定常性は、数個に分割した標本から求めたそれぞれの統計量の間に関連のないことを確かめればよい。平均値、分散などが長期傾向をもつ場合は、簡単な変換を施して定常化することができる。

定常確率過程の中に含まれる本質的な変動はコロログラムによつて示されるが、その基本型は、a) 概週周期性、b) 第 1 種持続性、輪廻的週周期性、c) 第 2 種持続性、d) 純偶発性に限られる³⁾⁴⁾。実際の河川流量系列で系列相互間の依存関係は、時間間隔が遠ざかるにつれて疎になるのであろうから、a) のごとき複合調和波的な変動は季節的変動を除いては期待し難く、また c) のごとき時間間隔がある値 h を越すと系列相関係数が 0 になることも考え難いので、結局本質的なものは b) のごとき変動とみてよいようである。ただ場合によつては偶発的要素が強く、ほとんど d) に近い結果を生ずることも充分予想される。b) の第 1 種持続性及び輪廻的週周期性からなる場合は、物体に不規則な外力が働いた際の振動に相当し、一般に次のごとき n 次の線型微分方程式で表わされる⁵⁾⁶⁾。

$$C_n \frac{d^n X}{dt^n} + C_{n-1} \frac{d^{n-1} X}{dt^{n-1}} + \dots + C_0 X = Y(t) \dots \dots (3)$$

ここに $Y(t)$ は平均値が 0 で無自己相関である純偶発過程とする。(3) 式を定差方程式の形に書き改めると、

$$X(t) + a_1 X(t-1) + \dots + a_n X(t-n) = Y(t) \dots (4)$$

以上のような確率過程 $X(t)$ の系列相関係数 $E\{X(t)X(t+k)\} = \rho_k$ の系列は、(3) または (4) 式で右辺を 0 とおいた自由振動の方程式

$$\rho_k + a_1 \rho_{k-1} + \dots + a_n \rho_{k-n} = 0 \dots \dots (5)$$

を満足し、その一般解は容易に求められる⁷⁾。

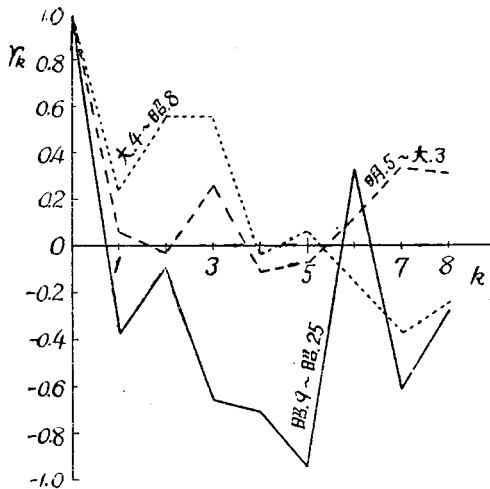
われわれが上の理論を適用したのは、前報¹⁾ で用いた利根川(栗橋地先)及び淀川(枚方地先)における年最大洪水流量の系列である。かかる系列の相互の依存性は未だ物理的に解明されていないので、時系列論によりその確率的依存関係を究明し、統計的な予報を行うのは充分意味があるはずである⁸⁾。もつとも年最大流量の発生時期が年によつて違ふので、系列の間隔は正確には一定でないが、平均的にみて一定とみなせるから、そのまま計算を進めてもさしたる不都合は生

じない。ただ予報では量のみでなく、発生時期を同時に推定することが望ましい。ここではこの点について考察していないが、毎月の最大流量系列とか、ある特定の月のみの最大流量系列などを解析することによって、目的を達成することができよう。もし最大のみでなく、それ以下の洪水の予想を行うには、母集団を逐次細分化してゆけばよい。

4. 利根川の年最大洪水流量の予報

利根川の年最大洪水流量の系列は、時代によつて平均値 m 、分散 σ^2 が相違することは前報¹⁾で述べた通りである。系列相関係数についても、同様区間でそのままの標本値を用いて計算したところ、図-2 からわかるように、その間に大差のあることが認められるので、系列は明らかに非定常であり、全部を一体として解析することは困難である。従つてここでは一応昭和9年以降のみについて解析することにした。

図-2 コレログラム
(利根川栗橋地先における年最大洪水系列)
Correlogram (Annual flood sequence in the TONE-River at Kurihashi.)



昭和9年以降の変化の大勢として、分散、平均値ともに漸増する傾向が見られるが、系列を定常化するにはこうした傾向を除去しなければならない。このうち平均値の傾向としては、前報¹⁾で指摘したごとく、最近ようやく峠を越して次第に減少するのでないかと想像される。しかしただ今のところ漸減の傾向を断定するまでに至っていないし、また予報としては安全側をとるのがよいという意味で、一応昭和9年以降の上昇傾向が今後も続くと考え、最小自乗法で平均値の傾向 $x = 255t + 5874$ (t の原点は昭和17年)を求めた(図-4参照)。一方分散も漸増傾向にあるが、この区間ではその程度が微弱で、大体一定とみてよいようであ

る。従つて平均値からの偏倚をとり、定常確率過程とみてよいとし、以下の計算を進めることにする。

一般に流量は正規分布を示さないが、平均値からの偏倚につき χ^2 -検定をし、正規分布とみて差支えないことを知つたので、(5)式から標本値を用い系列相関係数 r_k を求めて図-3を得た。これが原系列に対するコレログラム(図-2)と異なるのは、平均値からの偏倚を用いているためである。

図-3 コレログラム
(利根川栗橋地先における年最大洪水の平均値からの偏倚の系列, 昭和9~25年)
Correlogram (Sequence of the deviation from the mean value of annual flood in the TONE-River at Kurihashi, 1934~1950.)

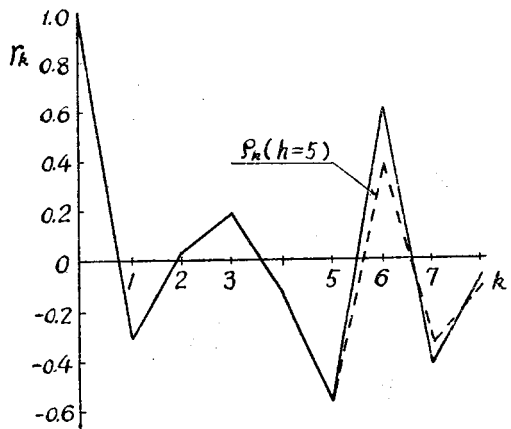


図-3 から判断すると、この系列の変動は輪廻的週期性と第1種持続性とからなることが推定される。かりに複合調和波的な変動が潜在週期性として含まれるとしても、その影響は微弱であつて、項数 n を適当に大きくとれば充分補われるであろう。コレログラムの波について2,3年の週期がみうけられるので、2つ以上の波から合成されていることは確実であつて、 $n > 4$ でなければならないが、第1種持続性の振動を加えて $n=5$ とし、(5)式から常数を求めると、

$$\begin{aligned} a_1 &= 0.302, & a_2 &= -0.167, & a_3 &= -0.226, \\ a_4 &= 0.210, & a_5 &= 0.717 \end{aligned}$$

となる。上のごとく $n=5$ としたことが妥当ならば、 $\rho_6 \approx r_6, \rho_7 \approx r_7, \rho_8 \approx r_8, \dots$ となるはずである。この点を調べるために、(5)式にて $k=6, 7, 8, \dots$ として計算すると、

$$\rho_6 = 0.408, \quad \rho_7 = -0.315, \quad \rho_8 = -0.084, \quad \dots$$

となつて表-1に示す相関係数の90%信頼限界にはいるので、 $n=5$ として充分であつたわけである⁹⁾。計算せられた ρ_k の値は図-3に点線で示した通りである。なお n が5以下の場合を換算したが、いずれも信頼限界の外にでるので適用し難いことがわかつた。

表一1 系列相関係数の信頼限界 (利根川)
Confidence limits of serial
correlation coefficient (the TONE-River)

k	r_k	信頼限界 (%)	
1	- 0.303	- 0.64	0.14
2	0.041	- 0.37	0.44
3	0.197	- 0.24	0.56
4	- 0.114	- 0.50	0.27
5	- 0.575	- 0.78	- 0.18
6	0.627	0.26	0.76
7	- 0.435	- 0.71	- 0.01
8	- 0.060	- 0.47	0.37

以上のようにして求めた常数 a_1, a_2, \dots, a_8 を用い、(5) 式の特性方程式を解いて、第 1 種持続性の減衰比 0.927, 輪廻的週期性の減衰比 $q_1=0.945$ 及び $q_2=0.930$ を得、後者の週期 $T_1=3.05$ 年, $T_2=10.16$ 年を知つた。なお $\kappa^2=0.421$, 従つて解析効果は $1-\kappa^2=0.579$ となつて割合良好であり、原系列の分散のみによる統計的予報に比べ、精度を約 2 倍高めることができたわけである。

上の結果を用いて外挿公式を導くと、 $X(t+1)$ に對して、

$$E\{X_c(t+1)\} = -0.302 x_t + 0.167 x_{t-1} + 0.226 x_{t-2} - 0.210 x_{t-3} - 0.717 x_{t-4} \dots (6)$$

となる。昭和 25 年までの実測流量を用いて(6)式から外挿値を求め、これに最小自乗直線から得られる平均値を加えると、表一2 のごとく昭和 26~28 年の予報値が求められる。なお表一2 には過去の実測値と比べるために、それぞれその前年までの実測値を用い (6) 式で逐次計算した結果をも併記してある。

表一2 年最大洪水流量の予報値と過去の実測値との比較 (利根川) 単位: m^3/sec

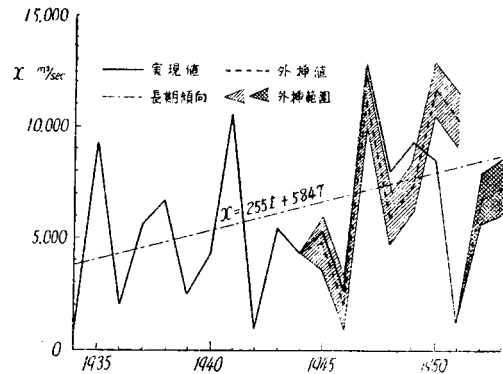
Comparison of forcast values of annual flood discharge with its observed values in the past, (the TONE-River) unit: m^3/sec .

年	実測値	外挿値	較差	外挿範囲 (70%)	
昭 20	5 300	4 960	- 340	6 150	3 770
21	2 520	1 970	- 650	3 160	780
22	13 000	11 540	- 1 460	12 730	10 350
23	7 960	5 770	- 2 190	6 960	4 580
24	9 260	7 240	- 2 020	8 430	6 050
25	8 500	11 650	3 150	12 840	10 460
26	940	10 200	9 260	11 390	9 010
27	—	6 690	—	7 885	5 500
28	—	7 350	—	8 590	6 110

外挿の精度は $X_c(t+k)$ の分散 $\epsilon D\{X_c(t+k)\}$ ではかられる。今 $\epsilon=1$ とし、 $k=1, 2, 3$ に対する分散を求めるとそれぞれ 1 190, 1 240, 1 240 m^3/sec となる¹⁰⁾。 $\epsilon=1$ としたからその確率は約 70% であり、外挿値の確率の信頼帯は表一2 に併記した通りである。

表一2 及びそれを図示した図一4 よりわかるように、昭和 26 年以外は大体実況と予報値とがよく適合している。昭和 26 年は過去の最低 1 200 m^3/sec (昭和元年) を下廻る 940 m^3/sec であり、統計的にみても極めて異常な渇水年であつたことがわかる。以上はもともと確率 70% であるから、約 3 回に 1 回は誤りを犯すわけであり、 $\epsilon=1.6$ 程度にひき上げれば確率は約 90% になり、予報精度は遙かによくなるはずである。 ϵ はその時の安全性の考慮いかんによつて決定されるべきものである。なお上の計算で平均値曲線の推定が問題であるが、これは今後の研究にまきたいと思う。

図一4 利根川年最大洪水系列の外挿
Extrapolation of annual flood sequence
in the TONE-River.



5. 淀川の年最大洪水流量の予報

前報¹⁾ で述べた通り、淀川牧方地先における年最大洪水流量の系列には若干週期的な変動がみられるが、その振巾は微少であり、分散もほとんど差異を見出しがたいので、そのままの値を用いて系列相関係数を求めると図一5 のごときコログラムがえられる。系列相関係数は、 $r_0=-0.416$ で幾分大きい、他はいずれも ± 0.2 以下の値を示し、ほとんど偶発過程に近い。したがつてこのまま解析を進めても無意味である。

このように系列が偶発的な場合は、純偶発事象としての確率的取扱いが許されるわけであるが、標本に若干の変換を施して高い相関性をもつ母集団を作ることは一尙差つかえない。われわれは前節で述べたごとく利根川において $x_{n+1}-x_n$ と x_n との間にかんりの相関のあることを知っているから、これと似たような方法を用い系列を $x'_n = x_{n+1}-x_n$ と変換することにす

図-5 コレログラム
(淀川枚方地先における年最大洪水系列)
Correlogram (Annual flood sequence in the YODO-River at Hirakata.)

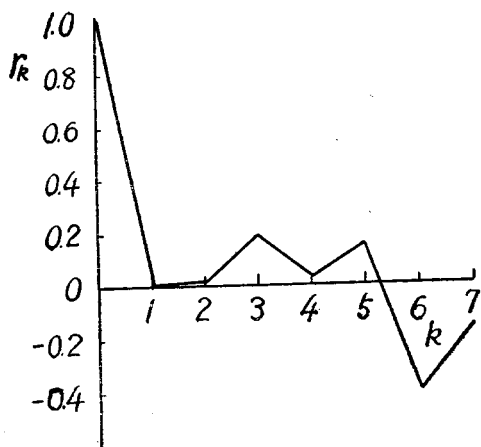


図-6 x_n' の系列 (淀川枚方地先)
Series of x_n' (the YODO-River at Hirakata)

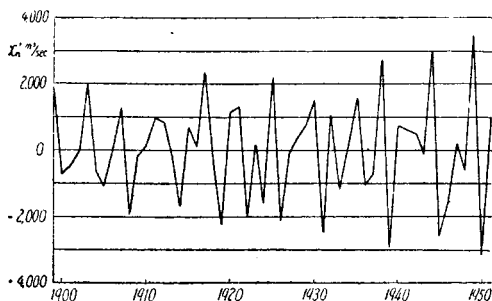
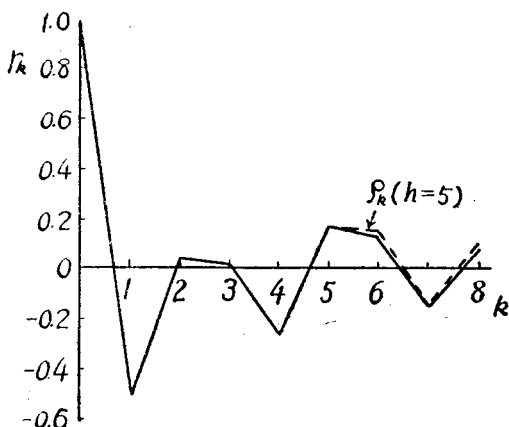


図-7 x_n' のコレログラム (淀川枚方地先)
Correlogram of x_n'
(the YODO-River at Hirakaka)



る。 x_n' の系列は図-6のごとくであり、そのコレログラムを図-7に示す。視察により利根川と同型であることがわかるので、以下同様の計算を進めた。 $n=5$ として妥当であり、3つの減衰振動に分解され、その減

衰比及び週期はそれぞれ 0.682, 0.834, 0.897 及び 2, 2.74, 5.93 年である。 k^2 は 0.460 で、解析効果 0.540 は利根川に比して若干小さいが比較的良好である。外挿範囲は $\varepsilon=1, k=1, 2, 3$ に対しそれぞれ 1200, 1630, 1640 m^3/sec である。外挿値を原系列に換算した結果及び過去の 実測値との比較は表-3、図-8 の通りである。

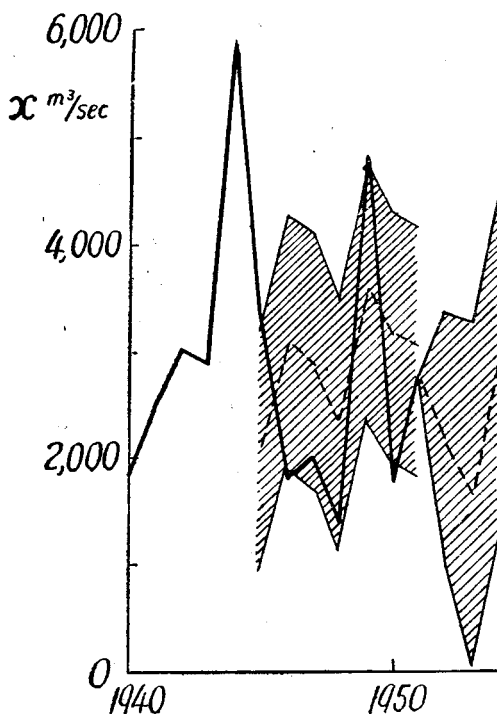
なお x_n' と x_{n+1}' との間の回帰直線は、

表-3 年最大洪水流量の予報値と過去の実測値との比較 (淀川) 単位: m^3/sec .

Comparison of forecast values of annual flood discharge with its observed values in the past, (the YODO-River). unit: m^3/sec .

年	実測値	外挿値	較差	外挿範囲(70%)	回帰直線 法外挿値	較差
20	3350	2110	-1240	3310 910	4480	1130
21	1800	3120	1320	4320 1920	4650	2850
22	2010	2920	910	4120 1720	2600	590
23	1400	2310	910	3510 1110	1910	510
24	4890	3600	-1290	4800 2400	1700	-3190
25	1730	3160	1430	4360 1960	3190	1460
26	2750	3030	280	4230 1830	3310	560
27	—	2150	—	3350 950	2240	—
28	—	1640	—	2840 440	2500	—

図-8 淀川年最大洪水系列の外挿
Extrapolation of annual flood sequence in the YODO-River.



$$x_{n+1}' = -0.505 x_n' \dots\dots\dots (7)$$

となり、これによつて簡単に外挿した値をも表-3に併記したが、この場合外挿範囲は $\varepsilon=1$ として $1510 \text{ m}^3/\text{sec}$ となる。コレログラムによる場合と (7) 式による場合とを比べるために、それぞれについて実測値と外挿値との差の標準偏差を求めると、前者は $1070 \text{ m}^3/\text{sec}$ 、後者は $1790 \text{ m}^3/\text{sec}$ となり、また精度は $\varepsilon=1$ のときの外挿範囲がそれぞれ $1200 \text{ m}^3/\text{sec}$, $1510 \text{ m}^3/\text{sec}$ となつて、コレログラムによる分析はるかに好結果を与えていることが実証されたわけである。

6. むすび

本文は従来の純偶発事象としての確率統計論的取扱いと根本的に異なつた時系列論の導入により、時間の函数としての水文統計的処理を行い、流量の予報を試みたわけである。利根川、淀川の2大河川の年最大洪水系列から統計的に検出された諸週期の物理的な意義については未だ明らかにするに至らないが、これらが通常しばしば検出せられる週期とよく一致していることは注目されねばならない。

洪水の長期予報は前述のごとく発生時期が重要である。年最大洪水流量の発生時期は河川によつて大体局限されているからさしたる不都合も生じないであろうが、更に精密な予想を行うためには別途の考慮が払われねばならない。また一方洪水系列は偶発過程に近い場合が多いであろうから、高相関をうるごとき変換法が研究されねばならない。

また、河川流量において特に重要な自然流量については、月平均流量を用いて利根川支川吾妻川箱島地先について詳細な研究を行い、種々の興味ある結果がえられたが、これについては後日改めて論を進めたい。

なお月最大流量とか月平均流量など近い将来を予想する場合は時系列論的な解析によらなくても、気象条件の分析によつても達せられるであろう。もつともかかる条件の中にも純物理的なものと、今のところ統計的なものとが混在するであろうから、今後は流量のみでなく、気象要素(雨量、気圧など)との重相関による精度の向上が主要な意義をもつことと思われる。

ともあれ、洪水の長期予報はダム建設時の計画排水

量の決定、前年度被災部の復旧工事の緊急性の判定、補修対策の確立、水防、避難態勢の準備、さらに進んでは耐冠水作物の選択などに有用であろう。また一方自然流量の予報は灌漑、電力方面に対し多大の貢献をなすものと思われる。このように治水、利水の諸計画上極めて有効なことが予想されるので、今後とも科学的究明によつて予報精度を高める努力が必要である。

終りに本研究に当り資料を賜つた関東地建調査課、淀工事事務所及び東京電力に対し、また計算その他に終始熱心に協力された八木賢二(鹿島建設)及び小林料(関東電力)の2君に対して、深甚な謝意を表す。なお本研究は文部省試験研究費による研究“洪水対策”の成果の一部である。

参考文献その他

- 1) 上山惟康: 洪水の週期変動について, 土木学会誌, 本号 p. 1~6
- 2) 久保亮五: 物理学における統計的現象(I), 応用統計学, 昭. 24. p. 10.16
- 3) H. Wold: A Study in the Analysis of Stationary Time Series, Uppsala, 1938.
- 4) 小河原正巳: 時系列論とその応用, 応用統計学, 昭. 24. p. 7.01~44.
- 5) 高橋浩一郎: 振動体の不規則なる運動よりその週期並に減衰率を求める方法に就きて, 理化学研究所彙報, 第14輯, 昭.10. p. 255
- 6) 小河原正巳, 呉林肇: 移動平均について, 中央気象台測候時報, 第14巻第9号, 昭. 18. p. 123
- 7) 小河原正巳: 確率論的予報方式について, 中央気象台研究速報, 第24号, 昭. 22. p. 1
- 8) 岩崎龍雄, 佐々木一夫, 門脇武夫: 北上川下流の洪水予報について, 中央気象台研究時報, 3巻特別号, 昭. 26. 11. p. 52
- 9) 項数が大きいほど精度がよくなるが, 特性方程式の因数分解が甚だしく困難となる。
- 10) 理論的には外挿を無限に行うことができるが, 次第に精度が低下するので, 実際上有効なのは k が項数と等しくなる附近までである。

(昭. 27. 6. 12)