

# 地盤の応力集中係数に関する一考察

准員 赤井 浩 一\*

## A STUDY OF STRESS CONCENTRATION INDEX OF EARTH FOUNDATION.

(JSCE Sept. 1952)

Koichi Akai, C.E. Assoc. Member

**Synopsis** In the view-point of the theory on the plasticity load of earth foundation, it was revealed that some confined relation exists between the stress concentration index which has been introduced by Fröhlich and the shearing strength of the foundation. Moreover, some numerical calculation was performed showing it clearly that the above relation should be changed with the condition of load distribution on the foundation.

**要旨** 基礎の支持力を決定するために用いられる塑性荷重理論において、地盤の応力集中係数と剪断強度との間に、ある制限的關係が存在することを示し、この両者の対応について考察を試みた。

### 1. 緒言

構造物の基礎地盤に対する力学的研究は、Boussinesq<sup>1)</sup>が半無限弾性体の表面に作用する荷重によつて弾性体内に生ずる変形ならびに応力分布を解析したことから始められ、その後Strohschneider<sup>2)</sup>、Griffith<sup>3)</sup>、Fröhlich<sup>4)</sup>などによつてその修正式が提案されて、不完全弾性体としての基礎地盤の力学的特性が明らかになつた。中でもFröhlichが導入した応力集中係数を用いる方法は、それによつて誘導される理論式の簡明さと、Kögler-Scheidigの砂地における実験<sup>5)</sup>に合うことなどの理由で、それ以後の基礎工学に好んで用いられている。しかしながら、この係数自身のもつている材料函数的意義はきわめてあいまいであつて、たとえば砂の場合には集中係数 $\nu=6$ 、粘土の場合には $\nu=3$ をとるといふがごときである。ただTschebotarioffやHrennikoff<sup>6)</sup>などが、集中係数の大きさは地盤の力学的性質はもちろんのこと、荷重の状態や基礎の深さの影響によつて変ること、換言すればこの係数は基礎の境界条件に支配されねばならないことを指摘しているのが注目される。

一方、基礎工学の究極の目的である地盤の支持力に関して、星植教授<sup>7)</sup>は土の塑性条件と降伏荷重の概念

を用いて、基礎地盤の支持力が荷重分布および応力集中によつて受ける影響を理論的に解明せられているがこの両者の対応關係については言及されていない。本文はある一定の剪断強度をもつ地盤に対しては、応力集中係数のとり方が上載荷重の分布状態如何によつて左右されること、少くとも両者の間に制限的な關係が存在することを述べるものである。

### 2. 降伏荷重における集中係数

地盤の降伏ならびに破壊の現象は、それを造つている土が上載荷重によつて惹起された剪断応力によつて塑性変形をなすことに起因するが、土の剪断強度は剪断試験によつて次式で表わされる。

$$\tau = C + n \tan \varphi = (p_0 + n) \tan \varphi \dots\dots (1)$$

ただし $n$ は剪断面に働く直圧力、 $\varphi$ は土の内部摩擦角、 $C$ は土の粘着力、 $p_0 = C \cot \varphi$ はFröhlichのいわゆる凝集力なる内圧である。

星植教授は基礎の支持力論において、式(1)から出発してこれにMohrの流動条件

$$\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_2 = 2 \sin \varphi \left\{ p_0 + \frac{1}{2} (\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2) \right\}$$

( $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2$ は外力による最大、最小主応力)

を適用し、さらに比応力

$$\mu_1 = \frac{\bar{\sigma}_1}{q}, \mu_2 = \frac{\bar{\sigma}_2}{q} \quad (q \text{ は平均荷重強度})$$

なる表示を用いて降伏荷重を与える理論式を誘導されているが、基礎の根入れがなく静土圧係数が1の場合には次のようになる。

\* 京都大学講師，工学部土木工学教室

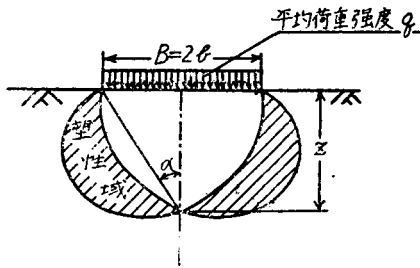
$$q = \eta_c C + \eta_v \gamma B$$

$$\sin \varphi = \frac{p_c \frac{d}{d\alpha} (\mu_1 - \mu_2) + \frac{\gamma B}{2} \left\{ \cot \alpha \frac{d}{d\alpha} (\mu_1 - \mu_2) + (1 + \cot^2 \alpha) (\mu_1 - \mu_2) \right\}}{p_c \frac{d}{d\alpha} (\mu_1 + \mu_2) + \frac{\gamma B}{2} \left\{ \cot \alpha \frac{d}{d\alpha} (\mu_1 + \mu_2) + (1 + \cot^2 \alpha) (\mu_1 + \mu_2) \right\}} \quad (2)$$

$$\eta_c = \frac{2 \cos \varphi}{\mu_1 - \mu_2 - (\mu_1 + \mu_2) \sin \varphi}, \quad \eta_v = \frac{\sin \varphi \cot \alpha}{\mu_1 - \mu_2 - (\mu_1 + \mu_2) \sin \varphi}$$

式中  $\gamma$  は土の単位体積重量,  $B$  は地表面載荷巾,  $\eta_c$ ,  $\eta_v$  はそれぞれ土の粘着力および 載荷巾に対する降伏荷重係数であつて, (2) 式は降伏荷重の定義によつて生じた土の内部摩擦角  $\varphi$  に関する条件式である。この式の  $\mu_1, \mu_2$  は上載荷重の増加にもなつて地盤内に発生拡大して行く塑性域が, 対称鉛直軸上で左右両側から合体する, すなわち地盤の降伏時のその 1 点での比応力であり,  $\alpha$  はその点と載荷面端部を結ぶ直線が鉛直軸となす角を示す (図-1 参照)。

図-1 地盤降伏時における塑性域



ところが鉛直軸上の比応力は剪断強度が一定の地盤では, 一般に上載荷重の分布状態がきまれば地中の深さ, 従つて  $\alpha = \cot^{-1} \frac{z}{b}$  ( $z$  は地中の深さ,  $b = \frac{B}{2}$ ) の函数として与えられるから, 式 (2) の第 2 式によつてこの比応力……これには応力集中係数が含まれている……と内部摩擦角  $\varphi$  との間に函数関係が存在し, しかもその関係は上載荷重の分布状態如何によつて変らねばならないことがわかる。

問題を簡単にするために以下では特に乾燥した砂地盤の場合を考え, 粘着力  $C$ , 従つて凝集力  $p_c$  を 0 とおくことにする。このときは式 (2) の粘着力に関する項は消滅して, 降伏荷重に対する条件式および係数は次のようになる。

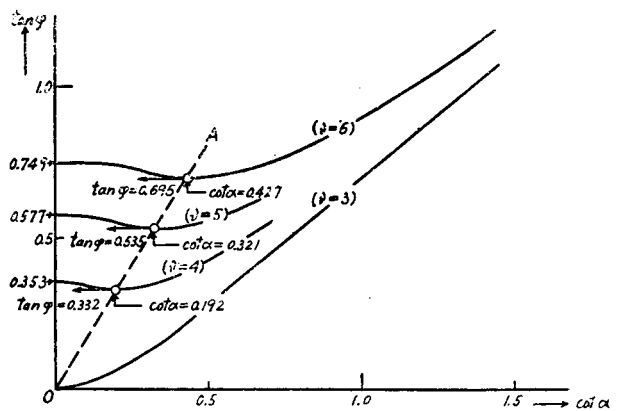
$$\sin \varphi = \frac{\cot \alpha \frac{d}{d\alpha} (\mu_1 - \mu_2) + (1 + \cot^2 \alpha) (\mu_1 - \mu_2)}{\cot \alpha \frac{d}{d\alpha} (\mu_1 + \mu_2) + (1 + \cot^2 \alpha) (\mu_1 + \mu_2)} \quad (3)$$

$$\eta_v = \frac{\sin \varphi \cot \alpha}{\mu_1 - \mu_2 - (\mu_1 + \mu_2) \sin \varphi}$$

### 3. 集中係数と内部摩擦角との関係

前節の理論によつて, 乾燥砂の場合には対称鉛直軸上の比応力  $\mu_1, \mu_2$  と内部摩擦角  $\varphi$  との間に式 (3) の関係が存在することが知られた。いま地盤の静土圧係数を 1, ポアソン比を 0.5 (これは 2 次元帯状荷重の場合には無関係) と仮定すると式 (3) の比応力に影響を与える要素は荷重分布と応力集中の 2 つになる。換言すればこの場合応力集中係数は, 種々の上載荷重の分布状態に応じて, 式 (3) 中の  $\alpha$  なる角を媒介として

図-2 載荷状態 (1) のときの  $\nu, \varphi, \alpha$  の関係



内部摩擦角  $\varphi$  と結びつくことになる。この関係を明らかにするために, 荷重分布が (1) 2 次抛物線帯状荷重, (2) 等分布帯状荷重……(以上 2 次元線対称), (3) 等分布円荷重 (3 次元点対称) なるおのおの場合について算出することにした。

ところで前に述べたように, 媒介角  $\alpha$  は対称鉛直軸上で両側から拡大してきた塑性域が合体する点において, その点と荷重端を結ぶ直線が鉛直軸となす角であるから  $0 \sim \frac{\pi}{2}$  の間の値をとることができ, それに応じてこの変域内で式 (3) の左辺の  $\sin \varphi$  も種々の値をとるが, 一般に右辺の函数は単調函数ではないから,  $\alpha$  のある値に対して  $\sin \varphi$  は極値を有する。たとえば (1) の場合の様子を横軸に  $\cot \alpha$ , 縦軸に  $\tan \varphi$  をとつて図示すれば図-2 が得られ, これによつて見ると集中係数  $\nu=3$ , すなわち応力集中がないときにだけ

$\alpha=0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$  に向つて  $\tan \varphi$  は単調減少となり、 $\nu > 3$  なる  $\nu$  に対しては  $\tan \varphi$ 、従つて式 (3) の  $\sin \varphi$  は極小値を持つことがわかる。これと同様なことが他の荷重分布の場合にも生ずるから、いま式 (3) の第 1 式において

$$\frac{d}{d\alpha} \sin \varphi = 0 \dots\dots\dots (4)$$

とおいてこれを満足する  $\alpha$  を求め、それによつて式 (3)\*

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 &= 3j \left\{ (1 + \cot^2 \alpha) \int_0^\alpha \cos^{\nu-1} \theta d\theta - \cot^2 \alpha \int_0^\alpha \cos^{\nu-3} \theta d\theta \right\} \\ \mu_2 &= 3j \left\{ (1 + 2 \cot^2 \alpha) \int_0^\alpha \cos^{\nu-3} \theta d\theta - (1 + \cot^2 \alpha) \int_0^\alpha \cos^{\nu-1} \theta d\theta - \cot^2 \alpha \int_0^\alpha \cos^{\nu-3} \theta d\theta \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

式中

$$j = \frac{1}{2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\nu-1} \theta d\theta} = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$$

であつて、応力集中係数  $\nu \geq 3$  なる整数に対する  $j$  の値は表-1 のようになる。

表-1

$\nu$	3	4	5	6
$j$	$\frac{2}{\pi} = 0.637$	$\frac{3}{4} = 0.750$	$\frac{8}{3\pi} = 0.849$	$\frac{15}{16} = 0.937$

表-1 の  $\nu$  のおのおのに対して、式 (3) の  $\sin \varphi$  に関する条件式を書くとき次のようになる。

i)  $\nu=3$

$$\sin \varphi = \frac{2 \cot^2 \alpha \{ \alpha (1 + \cot^2 \alpha) - \cot \alpha \}}{(1 + \cot^2 \alpha) \{ \alpha (1 - \cot^2 \alpha) + \cot \alpha \}}$$

ii)  $\nu=4$

$$\sin \varphi = \frac{3 \sin \alpha + 2 \sin^2 \alpha - 4 \sin^3 \alpha - 3 \cos^2 \alpha \ln \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}}{3 \left( \cos^2 \alpha \ln \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} + 2 \sin^2 \alpha - \sin \alpha \right)}$$

iii)  $\nu=5$

$$\sin \varphi = \frac{\alpha (1 - \cot^4 \alpha) + \cot \alpha (1 + \cot^2 \alpha + 4 \cos^2 \alpha)}{2 \{ \alpha (1 + \cot^2 \alpha)^2 + \cot \alpha (1 - \cot^2 \alpha) \}}$$

iv)  $\nu=6$

$$\sin \varphi = \frac{10 - 13 \sin^2 \alpha + 6 \sin^4 \alpha}{5(2 - \sin^2 \alpha)}$$

これら諸式の関係を図示したのが 図-2 であつて、先に述べたように  $\nu=3$  以外の  $\nu$  に対して  $\tan \varphi$ 、従つて  $\varphi$  は極小値をとる。たとえば  $\nu=5$  なる曲線に着目すると、 $\cot \alpha = 0.321$  に対して  $\tan \varphi = 0.535$ 、すなわち  $\varphi = 28^\circ 11'$  なる最小値があり、この  $\varphi_{\min}$  以下\*\*

\*より  $\sin \varphi$ 、従つて  $\varphi$  の極小値を求めると、この  $\varphi_{\min}$  がそのときの  $\nu$  を応力集中係数としてとることのできる砂地盤の最小の内部摩擦角となり、ここにおいて  $\varphi$  と  $\nu$  との関係が制限的に定められることになる。

(1) 2 次抛物線帯状荷重 この荷重状態は現実には堤体基礎に作用する荷重分布として、特に軟弱地盤の抑え盛土において重要であるが、この場合の式 (3) の比応力は次式で与えられる。

\*\*の内部摩擦角を持つ砂地盤ではこの曲線に交わることができないから、いままで述べてきた降伏荷重理論に立脚する限り  $\nu \geq 5$  なる集中係数を取り得ないということになる。さらにまた最上教授<sup>8)</sup> が砂の定常運動において、エネルギー損失が極小であるような運動だけが現実を生ずるという定理を述べられているのを地盤内応力の伝達様式にもあてはめて仮説的に考え、ある外力および物体力による地盤の釣合の保ち方は土の粒子が同じ外力、物体力の下でさらに安全な反力系に対して粒子自身を調整するようにしむけられるという格率<sup>9)</sup> を認めるならば、上に述べた  $\varphi_{\min}$  と  $\nu$  とを一義的に対応させることが可能であるようにも考えられるが、このためには多くの確実な実験資料が必要であらう。

なお応力集中係数  $\nu$  は整数だけに限られることはないから、図-2 に示した曲線の間整数でない  $\nu$  に対する無数の曲線が挿入される。ただこの場合、式 (5) 中の定積分は上限  $\alpha$  が未知数のため一般に不可能である。しかしながら 図-2 の整数に対する  $\nu$  の曲線の  $\tan \varphi_{\min}$  を結んで見ると、ほぼ原点を通る直線(図-2 の破線 OA) となることがわかるから、整数でない  $\nu$  に対する  $\tan \varphi_{\min}$  を図式的に略算することが可能である。

(2) 等分布帯状荷重 この場合の式 (3) の比応力は次のようになる。

$$\mu_1 = 2j \int_0^\alpha \cos^{\nu-1} \theta d\theta, \quad \mu_2 = 2j \int_0^\alpha \cos^{\nu-3} \theta \sin^2 \theta d\theta \dots\dots\dots (6)$$

式 (3) の  $\sin \varphi$  に対する条件式および  $\sin \varphi_{\min}$  を与える式 (4) の一般式を書くと、それぞれ次式を得る。

$$\text{式 (3) より} \quad \sin \varphi = \frac{\sin \alpha \cos^{\nu-2} \alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + \int_0^\alpha \cos^{\nu-3} \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) d\theta}{\sin \alpha \cos^{\nu-2} \alpha + \int_0^\alpha \cos^{\nu-3} \theta d\theta}$$

$$\begin{aligned} \text{式 (4) より} \quad & (\sin \alpha \cos^{\nu-2} \alpha + \int_0^\alpha \cos^{\nu-2} \theta d\theta [\cos^2 \alpha \{\cos^2 \alpha - (\nu+3) \sin^2 \alpha\} + \{(\nu-2) \sin^4 \alpha + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)\}]) \\ & - \{\sin \alpha \cos^{\nu-2} \alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + \int_0^\alpha \cos^{\nu-2} \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) d\theta\} \{\cos^2 \alpha + 1 - (\nu-2) \sin^2 \alpha\} = 0 \end{aligned}$$

(3) 等分布円荷重 これは3次元点対称の荷重分布であるのでポアソン比が影響してくるが、いま地盤が非圧縮性であると考えてこれを 0.5 と仮定すると、式 (3) の比応力は

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 &= \nu \int_0^\alpha \sin \theta \cos^{\nu-1} \theta d\theta = 1 - \cos^\nu \alpha \\ \mu_2 &= \frac{\nu}{2} \int_0^\alpha \sin^2 \theta \cos^{\nu-2} \theta d\theta = \frac{1}{2} \left\{ \frac{2}{\nu-2} - \frac{\nu}{\nu-2} \cos^{\nu-2} \alpha + \cos^\nu \alpha \right\} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

となり、 $\sin \varphi$  に対する式 (3) の一般式は次式で与えられる。

$$\sin \varphi = \frac{2(\nu-3) - \nu(\nu-3) \cos^{\nu-2} \alpha + (\nu-2)(4\nu-3) \cos^\nu \alpha - 3\nu(\nu-2) \cos^{\nu+2} \alpha}{2(\nu-1) + \nu(\nu-3) \cos^{\nu-2} \alpha - (\nu-2) \cos^\nu \alpha - \nu(\nu-2) \cos^{\nu+2} \alpha}$$

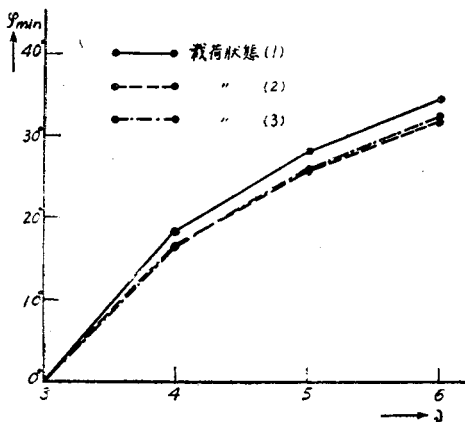
以上の3通りの場合につき応力集中係数  $\nu=3\sim 6$  に対して、式 (3) より与えられる  $\varphi_{\min}$  と媒介角  $\alpha$  を計算した結果を表-2 に示す。

表-2

$\nu$		3	4	5	6
(1)	$\varphi_{\min}$	0	18°23'	28°11'	34°50'
	$\alpha$	$\frac{\pi}{2}$	1.381	1.260	1.166
(2)	$\varphi_{\min}$	0	16°50'	25°51'	32°0'
	$\alpha$	$\frac{\pi}{2}$	1.219	1.020	0.919
(3)	$\varphi_{\min}$	0	16°44'	26°0'	32°25'
	$\alpha$	$\frac{\pi}{2}$	1.229	1.093	0.999

表-2 から整数の  $\nu$  に対して応力集中係数と内部摩擦角との関係を与える 図-3 を得る。表-2 または 図-3 によつて、荷重分布が中央に集中すれば降伏点の深さが浅くなり、従つて式 (2) の第1式で与えられ

図-3 集中係数と内部摩擦角との関係



る降伏荷重が減少することがわかる。また応力集中係数が大となるほどこれと同じ傾向の生ずることも星塾教授が指摘せられているところであるが、等分布荷重の場合には2次元対称荷重と、地盤を非圧縮性と考えた3次元対称荷重との間に、 $\varphi_{\min}$  と  $\nu$  との関係はほとんど差異のないことが明らかになった。

4. 結語

本文では塑性荷重理論において生ずべき地盤の応力集中係数と剪断強度との対応関係をおもに砂地盤の場合について考察し、上載荷重の分布状態如何によつてそれらの関係が変化することを述べたのであるが、これはまた粘着力を有する地盤にも応用することができるので今後の研究に待ちたいと思う。更に実際の基礎地盤においてはその深さにより、あるいは載荷中心部と端部によつて集中係数が変化していることも充分考えられるが、これに対しては精密に得られた実験値をもととして係数の分布を考察せねばならないと思われる。

本研究は昭和 26 年度文部省科学研究費の助成による「堤体の土質工学的研究」のうち、堤体抑え盛土の研究に関連して行つたものであり、京大教授村山博士に種々御指導をたまわつた。附記して深く感謝の意を表する。

参考文献

- 1) J. Boussinesq; Application des potentiels à l'Étude de l'Équilibre et du Mouvement des Solides Élastiques, Paris, Gauthier-Villard, pp. 11, 20, 55, 104, (1885).
- 2) O. Strohschneider; Elastische Druckverteilung und Drucküberschreitung in Schüttungen, Sitzber. kais. Akad. Wiss. Wien, Abt. IIa, Vol. 121, pp. 299-336, (1912).
- 3) J. H. Griffith; The Pressures under Substructures, Eng. Contr., Vol. 1, pp. 113-119,

- (1929).
- 4) O.K. Fröhlich ; Druckverteilung im Baugrunde, Berlin, J. Springer, pp. 21-54, 72-82, (1934).
  - 5) F. Kögler & A. Zcheidig ; Druckverteilung im Baugrunde, Die Bautechnik, Vol. 5, pp. 418-421, 445-447, (1927), Vol. 6, pp. 205-209, 229-232, (1928), Vol. 7, pp. 268-272, 828-830, (1929).
  - 6) G. P. Tschebotarioff & A. Hrennikoff ; Pressure beneath a Spread Foundation.

- 7) 星 楚 和 ; 基礎の支持力論, pp. 102-136, (1948).
- 8) 最上武雄 ; 乾燥砂の運動機構について (IV), 土木学会誌, Vol. 29, No. 10, pp. 746-751, (1943).
- 9) J.H.A. Brahtz ; Proposed Methods of Calculating the Stability of Earth Dams, Part II, Rational Design of Earth Dams, Trans. 2nd. Congress on Large Dams, Vol. IV, p. 546, (1936).

(昭. 27. 4. 17)

福田副会長歐米通信 (第 3 報)

本朝 Swiss Air の飛行機で Zürich を出発, 途中 Stuttgart, Frankfurt に着陸して当地に着きました。Zürich

に引き続き  
当地はドイツ語でやれるので大助かりです。  
例のスパン 206 m



のプレートガーダーの橋や, この写真にある道路橋, それにタイドアーチの鉄道橋などを見てまわりました。またアルミニウム ツェントラールに行つて日独のアルミ事情につき話し合いました。明日は汽車で, Köln, Bonn に行き, 引返してここから Amsterdam に向います。 (8月18日 Düsseldorf にて)

福田副会長歐米通信 (第 4 報)

昨 25 日江藤, 仁杉両氏と共に当地に到着, 昨夜は Reception に出席の上, 今朝からの Session に出席しました。本日は主として安全率及び強度計算の問題, 確率論による安全率の算定, Plastic theory, Limit design 等が主要な問題となつているようです。今晩は Reception and dance ですが evening がないので欠席し, 仁杉君と街をぶらぶら散歩しました。江藤局長は本日午後 London に歸られた。今回のわれわれのこの会議への参加は, この種の会合への初めての参加であるので, われわれの準備の不十分さを感じました。今回の経験を今後この種の会合に出席される方の参考にしたいと思ひます。

London も当地も連日うだるような暑さです。幸いに元気です。会長始め, 皆さんによりしく。

(8月26日夜 Cambridge にて)

第 1 回 日 本 道 路 会 議

日本道路協会では来る 11 月 6 日より 8 日まで東京において第 1 回日本道路会議を開催することになつた。本会議の目的とする処は, 戦時及び戦後の道路行政並びに道路技術の空白を取り戻すため, 道路, 交通, 都市計画等の関係者が一堂に会し, 各自の知識と経験とを交換し相互の連繋と融和を図るとともに, 道路に関する重要問題の今後の方針を決定することにある。

会議は総会, 部会, 座談会にわかれ, 部会の種別は次の通りである。

- |         |            |
|---------|------------|
| 第 1 部 会 | 行政・計画部会    |
| 第 2 部 会 | 工法・構造・材料部会 |
| 第 3 部 会 | 交通部会       |
| 第 4 部 会 | 都市計画部会     |