# 講　座

UDC 519.2

## 土 木 推 計 学 1

# 推計学の理解と応用

伊 大 知 良 太 郎*

### 1. 推計学と統計学

最近は推計学ばやりで，およそ実際の観察または計測に基づいた数値の取扱いには，推計学でなければおさまらぬかの勢いである。一体昔から実際数値の扱いを任務としてきた統計学はどこへ消えてしまつたのであろうか。従来の統計学では，もはや数値の処理が不可能となつてしまつたほどに世界の現象が複雑化したというのであろうか。

推計学と呼ばれる考え方は，たしかに従来の統計学での考え方を一歩踏みだして，異なつた分析法と異なつた効果を示しはじめている。考えようによつては，推計学が従来の統計学の範囲を突き破つて踏み出した一歩は，正に決定的な一歩であつて，二つの考え方を全然別個の異なつた学問と呼んでも差支えないとも考えられもする。しかしながら推計学と統計学とをこのように全く分離して考えようとするところに，せつかくの推計学の理解を困難にしてしまう原因があるようである。筆者の考え方によれば，推計学と統計学とを区別する一線は，後述するように母集団と標本との峻別をするかしないかだけにかかつており，この一線はそこだけに視点を集中して専門的に凝視すれば，いかにも特筆大書しなければならぬ深刻な溝線であるにちがいないが，ひるがえつて各方面での実際観察値の経験的処理という応用面に想到すれば，この一線はさほど神経過敏に強調する必要もないものに思われてくる。

というのも，実際上の応用という段階になると，推計学による精密な判断の示す前進効果があまりに少ない場合が多く，したがつて推計学の特徴とする少数例の判断を棄て，従来の統計学でも取り扱える程度まで観察数の増大をはからねばならぬ場合が少なくないからである。もちろんケースによつては観察数を任意に増加することは困難であつて，少数例に頼らざるをえないこともなくはない。医家の臨床データとか，品質検査における破壊実験数とかは正にそうである。しかし社会，自然の両現象を通じて，推計学の前提するような確率的解釈を厳密な意味で充たしうるような観察データは必ずしも普通考えられるほど多くはなさそうである。

以上を要するに，従来の統計学が働きうる場面はかなりに広く，決して推計学だけが実際数値の扱い方を独占するものではないということ，むしろ従来の統計学の考え方では拓きえなかつた精密特殊の場合を推計学が強力に補充してくれたと考えることも可能であること，したがつて，もう一つ言い換えれば，実際観察値の処理法をめぐつて大きな意味での統計学があり，その内訳として従来の統計学の部分と新しい推計学の部分とが併存すると考えることによつて，いわゆる推計学の特徴が容易になるのではないか，――これが本講座の冒頭に述べておきたい一事である。現に世界の各国で推計学と統計学とを水と油のように分離しようとしているのは，恐らくわが国だけであろうし，またいわゆる推計学の説き方を極めてむずかしく扱つているのもこの国だけの現象ではないかと思われる。

さて以上の趣旨にしたがつて，推計学の考え方を従来の統計学のそれと結びつけながら，最も簡単な例示によつて説明しよう。いまある同一物の計測を何回か繰り返して，その実測値の分布からその物の計測値を決定する場合を考えよう。例えば，A，B 2地点間の距離を1人の人間の正常歩で測定するものとする。第1回の測定では720歩，第2回には805歩，第3回には764歩というように数取器を押しながら測定値を集めてゆく。各回の数値の差は，道路上の歩行線の相違や，各回ごとの健康状態，疲労状態による正常歩そのものの変化など種々の原因に基づいているであろうが，ひとまずここではこのような差異をすべて一括して歩測の誤差とみることとする。この場合求められる統計的結論は，かなり多数回の繰り返し歩測によつて平均

* 一橋大学教授，早大理工学部講師

的には何歩の距離（当然にまた平均的正常歩と平均的歩線を前提している）という形をとるはずである。しかも統計的結論といえるためには，この平均歩数が幾何の誤差をもつか（逆にいつて幾何の安定性をもつか）を同時に示さなければならない。これは通常「平均の標準誤差」またはその自乗形式である「分散（ヴァリアンス）」で示される。この分散が大であれば上の平均歩数の安定性は低く，小であれば安定性が高い。そしてこの平均値を中心として標準誤差の3倍の前後範囲の中に真値の落ちる確率は 0.9973，2倍の範囲に落ちる確率は 0.9545，………という誤差分布の解釈を与えることは衆知の通りである。われわれはここで重要な注意点を見落してはならない。すなわち，ここまでの統計的判断の仕方は推計学でも従来の統計学でも全く同一であるということ，言いかえれば，単に繰り返しえられた実測値の平均を直ちに絶対化して（誤差の考慮をせず）扱うのは推計学的でないことはもちろん，そもそも従来の統計学的判断にもなつていないという点である。

従来の統計学と推計学とを分つ一線は，この場合，上の標準誤差ないし分散を計量する際の方法の差異にある。すなわち従来の統計学で平均の標準誤差を論ずるには次の式によつていた。

$$\sigma_m=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\left(\begin{array}{l}\sigma_m：平均値の標準誤差\\ \sigma：実測値分布の標準偏差\\ n：実測回数\end{array}\right)\cdots(1)$$

この式の $\sigma$ は計算上は実測値分布から得られる標準偏差，すなわち各回の実測値 $X_i\,(i=1,2,\cdots\cdots,n)$ が算術平均値 $\overline{X}_i$ をめぐる偏差の自乗平均の平方根（$X$ のちらばり程度をあらわす）

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma(X_i-\overline{X})^2}{n}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

を用いているが，本来これは無数回の実測値分布が与える標準偏差，言いかえれば同一物測定について想定される測定値の無限に大きな「母集団」分布の標準偏差であるべきものを，これが未知であるため，やむを得ず実際に繰返した観察回数の実測値のそれで代用しているわけで，この点，回数 $n$ が相当に大となれば，ほぼ近似値が得られる意味でその代用が許されるに過ぎない。もしも回数 $n$ が小であれば，この代用はたちまち悪いすり替えとなつて，大きな危険を含むに至るはずである。推計学が大きな一歩前進を示したのは，まさにこの代用を避けて，別個な理論上正しい値をここに導入したところに見出される。ここに導入される別個の値こそは後述する標本分布の研究によるものであるが，とりあえず上述（2）式にとつてかわるべき結果だけを示せば，

$$S=\sqrt{\frac{\Sigma(X_i-\overline{X})^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{n}{n-1}}\sigma\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

である。

ここまでに述べたところによつて，次の諸点が明らかになつた。(i) 従来の統計学は母集団分布の $\sigma$ と実際観測値分布の $\sigma$ とを近似的に同一視しうる程度の多数回観察，すなわち標本の大きな場合を前提としてのみ成立つものであつて，それゆえ大標本の理論と言われる。(ii) これに対して推計学では実際観察回数の少ない小標本の場合につき特徴をもつものであつて，一度小標本について成立てば，有限の大標本の場合にも，理論的には同様に小標本理論があてはまるはずである。(iii) 推計学すなわち小標本の統計理論が成立つのは，母集団と標本（実際観察値）との峻別によつてであるが，この根拠は同時にまた推計学応用への限界条件を含んでいる。節を改めてこの点を探つてみよう。

## 2. 標本分布

推計学の考え方を本格的に説明するには，標本分布ということを理解して頂かねばならない。

1. で述べたように，推計学では実際の観察値をすべて明確に標本 (sample) として受けとる。標本とは母集団 (universe または population) の一部分を無作為に（任意に，at random）抽き出したと解せられるものであつて，母集団と共に観念としては従来の統計学にもあつたのであるが，これを明確に標本として扱う方式が従来はなかつたわけである。さて一標本中に含まれる各個別実測値 $X_i\,(i=1,2,\cdots\cdots,n)$ の平均値 $\overline{X}_i$（または $m$ で表わす）を標本における平均値という意味で「標本平均」というが，これは当然に「母平均」すなわち母集団全体の示す平均値 $M$ と多少の喰い違いを見せるはずであり，しかもこの喰い違いは同一母集団から別個に抽き出した同一大さの標本ごとにそれぞれ異なるものとなるはずである。いま第1の標本（例えば最初の 10 回の観察値）について計算された標本平均を $m_1$，第2の標本によるもの（次の 10 回の値についての）を $m_2$，以下同様に $m_j$ までを考えてみる。これは必ずしも実際に 10 回づつの観察を $j$ 回だけやつてみなくても，単に頭の中で考えるだけで充分である。実際の場合には標本はどれか1回の 10 個の値に相当するものだけで充分であるし，もしも1回の観察個数 $n$ が 10 個より多ければ，それだけ標本の大きさが増したとみるだけで済むわけである。ところでこのようにして得られた $j$ 個の標本平均 $m_1$, $m_2$, ……, $m_j$ はそれぞれ母平均 $M$ と喰い違いつつ，

お互いに異なるものも等しいものもある状況を示すから，そこに当然 $m$ の度数分布が考えられる。この分布を「標本分布」Sampling distribution という。この場合 $m$ の標本分布は母平均 $M$ を中心に分布するが，母集団からの $X_i\,(i=1,2,\cdots\cdots,n)$ 抽出のすべての可能な場合の数を $j$ であらわすとすれば，$m$ の標本分布について計算した平均値 $\overline{m_j}$ は，まさに $m$ というものの数学的期望値 $E(m)$ をあらわすこととなり，これはぴつたり母平均 $M$ と一致するはずである（この平均値の場合のように母集団の対応値と一致するものを「不偏推定値」という）。すなわち $f_j$ をそれぞれ $m_j$ のもつ度数（確率）とすれば，$(\sum_j f_j=1)$

$$E(m_j)=\sum_j f_j m_j=\sum_j f_j\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_i X_{ij}\right)=\frac{1}{n}\sum_{ji} f_j X_{ij}=M$$

上式において $f_j$ すなわち一般には $m_j$ の分布函数が既知のものと前提されているが，この分布函数の形こそまさに標本分布の中心課題をなすものにほかならない。この標本分布の形が捕えられれば，これを媒介に標本平均と母平均との間に明確な関係が規定されるから，そこにいわゆる推計学の本領が発揮されることとなる。

以上の関係は必ずしも標本平均の場合に限らない。一般に標本について形成される函数値（平均はその一種であり，構成比や相関係数などもしばしば用いられる形である）を推計学では「統計量」Statistic と呼び，これに対応する母集団の値を「母数」Parameter と呼んでいるが，標本分布の形を通じて統計量と母数との関係を明確に規定できるところに推計学の特徴があり，統計量と母数との区別を明確にしなかつたところに従来の統計学の欠陥があつたわけである。

しかし推計学のこの特徴は，実は同時にまた，その実際適用上の制限条件を含んでいることを見逃がしてはならない。すなわち統計量と母数との間の媒介をする標本分布なる概念を有効に用いうるためには，そもそも実際の観察値が標本たる性質を充分に担わなければならない。いいかえれば，予想される母集団（これには上例のように無限大の範囲をもつ無限母集団の場合もあれば，社会事象の観察の場合のように一応同時存在としての範囲が有限と考えられる有限母集団のこともある）に含まれる個体を確率化して，その中から文字通りアト・ランダムに抽き出したものと見られうる観察値でなければ困るものである。このため，推計学の方法が最も純粋に，最も有効に応用されうる場面は，僅かに大量生産における品質管理およびこれに類するケースに過ぎぬという反省さえ最近強力になされ始めたわけである。殊に各種の要因が複雑に結合して作用している社会的，経済的な事象については，根本的に確率化の困難が蟠踞するため，推計学の気軽な応用は慎しまなければならない。土木関係の諸問題がそのどちらに属するのか筆者は不敏にして知らないが，推計学一般のもつ以上のような特徴と制限条件とは，推計学的手法の適用に当つて充分の考慮に値するものである点を強調しておきたいのである。

もつとも各種要因の複雑に作用する観察値に対してこれを標本化するための有力な手法が推計学に準備されていないわけではない。一般に実験計画法 Design of Experiment と呼ばれる一連の手法がそれであつて，これらの手法の応用により推計学の活躍分野は著しく拡大される可能性をもつた次第であるが，ただ実験計画法そのものの本質は推計学のもつ基本的制限条件の上に立つた制限の緩和に役立つものにほかならぬと見るべきであろう。詳しくは後述の機会にゆずる。

ただ以上は推計学の正しい理解のために，いささか推計学の不利点を強調しすぎた感がないではない。その実際の適用にあたつては，複雑多岐の作用要因を大胆に整理し，その主要因とみられるものだけについて推計学の各手法を適用すれば，その応用分野はかなりに広くかつ相当に有効である。その意味において次節にその主なる手法の形を紹介しよう。

### 3. 推計学の応用形態

応用形態の上から推計学の内容を分類すれば，推定論，検定論，実験計画法，の三大別とすることができる。「推定論」というのは、さきの標本分布を媒介にして実測値たる標本の統計量から母集団に属する真値（母数）を推定しようとする方法論をさし，社会調査方面に盛んに適用されているサンプリング調査（標本調査）がこれに属し，これによつて得られた数値的結果は，例えば何らかの平均値の場合，$m\pm\sigma_m$ の形をとり，この範囲に母数の存在する確率は約 68% であるという推定を行う。

次に「検定論」の形は，同じく標本分布を媒介にして，今度は母数に対して立てられた何らかの仮説 Hypothesis が統計量によつてどこまで支持されるか，という「仮説の検定」を行うのである。何かの機会を通じ，得られた数値資料から，この現象を支配する理論型を発見しようとする多くの場合の統計分析目的は，直接にはこの検定論の手法にしたがつて達せられる。この手法を有効に働かせるには，通常母集団についての仮説としてとうていありそうもないと予想されるような仮説——これを「帰無仮説」Null Hypothesis という——を立てておき，標本からの統計量の吟味によつて，この仮説が棄てられるべきことを判定すると

いう「否定の否定」論法を用いる。それは後述するように，標本分布による確率判断が，立てた仮説を否定する方向に対して有効に働く性能をもつているからにほかならない。たとえば，「AはBである」ことがおよそ普通であつて，「AがCである」ことはとうてい考えられないという場合に，帰無仮説として後者の「AはCである」を検定すべき仮説に立てる。すると実際観察による統計量を標本分布に入れた判断によつて，この仮説の支持される確率は例えば5% 以下であるという判定が下される。したがつて「AはCである」といえるためには実測値の中にあまりにも異様な，何か別の意味をもつ要因が強く含まれていることになり，この場合の確率 (5% 以下という) は「有意」Significant と見られ(それゆえ，この5% という点を「有意水準」Level of Significance という)，仮説「AはCである」は棄てられるのである。もしもここで前者の仮説「AはBである」を立てれば，統計量からの確率は 5% 以下ということにはならず，上の意味での「有意」判決は得られないから，結局「AはBである」ことは棄てられないという結論が出るだけで，積極的な判定は何も出てこないわけである。何故ならば論理上，「AはBである」ことが棄てられぬとしても，それは必ずしも「AはBである」ことの積極的主張にはなりえないからである。これに反して，始めのように「AはCである」というありそうもないと想定された仮説が明確に確率の言葉によつて否定されれば，少くともAに関するその性質面は今後の考察からはつきりと落せるわけで，もしもこのような脱落面を次々に検定してゆけば残る性質面が明瞭に生残りとしてきわ立つてくることとなる。推計学にいう検定論は，以上のような迂遠ではあるが着実な排除論法を確率の言葉によつて遂行してゆくのである。したがつて，問題によつてはこれを不生産的とする場合も生じうるし，場合によつては 100% 有効な手法ともなりうるわけである（後にもつと具体的な問題構成の下に，この手法を研究する予定である)。

最後に「実験計画法」は，以上2種の型の手法を有効にするため，標本そのものの完成を補助する点に本質を求めることのできる一連の分析法であつて，資料の標本的性質を高めるために，その数値資料をとりまく各種の要因を整理して資料のランダム性を確保してゆく各種の手法（たとえば「分散分析法」，「相関分析法」，「乱塊法」，「ラテン方格法」など）がこれに含まれる。中でも分散分析法・相関分析法は各種要因の析出をねらう手法である性質上，その本来の目的である推定論・検定論への補助手段であること以上に，直接に要因分析の手法として活潑に応用されている。

附言

推計学の文献はほとんど全部が読みにくい。ことに邦書の場合そうである。原書としては推計学の創始者，英国の農学者 R.A. Fisher の "Statistical Methods for Research Workers" (11 版，1950) および "The Design of Experim ents" (5版，1949) が基本書であるが，読みにくい。むしろ手始めには米国の G.W. Snedecor 教授の "Statistical Methods" (4版，1946) が読みやすい（最近この邦訳も出た)。

邦文では，筆者の読んだ範囲でいえば，九大寺田一彦教授の「例解入門，推測統計法」(昭和 26 年，朝倉書店) が最もやさしく，かつ巧みに推計学の要旨を解説している文献である。

## 新刊紹介

本間 仁著　**水理学**　丸善出版KK刊

A5判 p.260　定価 330円　昭.27.7.5 発行

新制大学の教科書の程度以上を標準にした水理学書であつて，序論，静水力学，完全流体，波動，超波速流，管内の流れ，開水路，水流測定，固体の受ける力，沈澱及び洗掘，地下水の11章からなつている。

本書を通読して次の二つの特徴に感銘を覚えた。1. 流体力学と実用水理学とが完全に融合し，水理学の新しい形式が生れたこと。従来の流体力学 (Hydrodynamics 及び Fluid Mechanics) の書は応用数学の殻の中に閉ぢこめられた特殊な問題に限られたり，あるいは実在の水を取扱うには余りに初歩的な内容であつて，土木並びに建設工学方面の複雑な水理計算に利用されることが少なかつた。しかし流体力学の理論的解析方法がすべての水理学に望ましいことは明らかである。本書においては各章の基礎理論としてまず流体力学が述べられ，その上に立つて実用水理学の問題の解法が導びかれている。すなわち理論と実際とが直接結びついた水理学の一つの体系ができ上り，学生が講義を理解するための便益には計り知れないものがある。2. 水理学の最新の理論が網羅されていること。本書には空洞現象，有限振巾の波，水路の衝撃波，開水路の非定常流，流砂量並びに掃流力の如き水理学上の新しい問題あるいは新しい理論が豊富に取入れられている。更に著者自身の研究業績である射流の損失水頭，開水路の不等流，地下水の揚圧力，井戸等に関する新理論も記載されている。従つて本書は水理技術者にとつて絶好の参考書であるのみならず，新しい問題に対する指導書として果す役割も極めて大きい。

（早稲田大学教授　米屋秀三）