

報 文

UDC 624.072.4 : 624.042

曲梁の垂直応力度並びに弾性重量の公式について

正 員 大 野 諫*

FORMULA FOR NORMAL STRESS AND ELASTIC WEIGHT OF CURVED BEAM

(JSCE Aug. 1952)

Isamu Ohno, C. E. Member

Synopsis The first part of this paper contains the refining of the formula which we have had till now for normal stress of curved beam and the calculation of section constants J or Z . The second part presents the development of the author's formula for elastic weight of elastic line of curved beam.

1. 曲梁の垂直応力度公式について

1. 緒言

著者は曲梁の横断面における任意点の垂直応力度として

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{My}{J}; J = r \int y^2 \frac{dF}{r}, r_0 = \int \frac{dF}{r} \dots (1)$$

なる公式を提案した¹⁾。これより内縁及び外縁点における垂直応力度 σ_1 及び σ_2 は、 y_1 及び y_2 を中立軸より内縁及び外縁点に到る距離、 r_1 及び r_2 を曲率中心より内縁及び外縁点に到る距離とすれば、それぞれ

$$\sigma_1 = \frac{N}{F} + \frac{My_1}{J_1}, \sigma_2 = \frac{N}{F} + \frac{My_2}{J_2} \dots (2)$$

にて表わされる。ここに

$$J_1 = r_1 \int y^2 \frac{dF}{r} = F e r_1, J_2 = r_2 \int y^2 \frac{dF}{r} = F e r_2,$$

$$e = r_0 - r_0$$

しかるに従来の公式²⁾(原書の記号のままにて書けば)

$$\sigma = \frac{P}{f} + \frac{M}{f'r} + \frac{M}{f+\kappa} \frac{\eta}{r+\eta} \dots (3)$$

または

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{Mv}{Z} \frac{r}{r-v}; Z = \int v^2 \frac{r}{r-v} dF,$$

$$N = N - \frac{M}{r} \dots (4)$$

もまた、著者の公式にならい簡潔に

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{Mv}{Z}; Z = r \int v^2 \frac{dF}{r}, N = N - \frac{M}{r_0} \dots (5)$$

と表わすことをすすめたい。(4)式の r は(5)式の r_0 に相当する(これらの記号の説明は 3. にゆずることにする)。しからば r_1 及び r_2 を重心軸より内縁及び外縁に到る距離、 r_1 及び r_2 を曲率中心より内縁及び外縁に到る距離とすれば、内縁及び外縁点における垂直応力度 σ はそれぞれ

$$\sigma_1 = \frac{N}{F} + \frac{Mr_1}{Z_1}, \sigma_2 = \frac{N}{F} + \frac{Mr_2}{Z_2} \dots (6)$$

にて表わされる。ここに

$$Z_1 = r_1 \int v^2 \frac{dF}{r}, Z_2 = r_2 \int v^2 \frac{dF}{r}, r_0 = \frac{1}{F} \int r dF$$

2. 断面常数 J の導入への過程

かつてラーメン構造の隅角部の実際の設計計算に遭遇して文献を調べ始めたのであるが、平面問題としては Föppl: Drang und Zwang, Bd. I. p.340 の解より更に進んで、隅角部に丸味をつけた場合をも複雑な Airy 函数により解かれてあるものもあるが、境界条件を完全に満足せしめることの困難なため実験結果とは数値的にかんがりの開きがあり、実際構造としては平面的に取扱えない場合が多いので、実地設計に対する実用方面を考究することにした。しかるに実地上ラーメン隅部に対しては代用の曲梁をとり上記の(3)または(4)の公式が用いられ Bleich 著: 鉄骨構造、にはその設計計算例まで掲げられ³⁾、なお Vianello-David

* 徳島大学教授, 工学部土木教室

の書⁴⁾には断面常数 Z の数値計算の表が示され、実用的には一応問題は解決しているように思われた。しかし直梁の応力計算に比べ公式もその計算も甚だ面倒なものだという印象を受けたので、著者は実用的に便利な Z の図解を試みんとし、 Z の式を検討するにそれが慣性モーメントを一般化した変体断面の2次モーメントを示すからその目的は直ちに達せられた⁵⁾。従来、曲梁の垂直応力度の公式中の常数に対する図解としては(3)式の係数 κ に対する Tolle 氏の方法⁶⁾のみをみるが、 σ の公式としては慣性モーメント I の一般形と考えられる Müller-Breslau の著書にある上式(4)の、断面常数 Z を用いる方法がより自然でありよいと思われる。次に従来⁷⁾の σ の諸式を比較するに及んで(3)または(4)式はその式の誘導にあたりすべて断面の重心軸に関して考えているに反し、Timoshenko の書にある公式⁷⁾ は中立軸の考えを入れて全然異なつた外形をしている。しかしてその中間を行く公式として Grüning 及び覚前氏の提案になる公式⁸⁾があるが、重心軸と中立軸との考えを入れているため式はやや不整頓な形をなしている。そこで著者は σ 公式の誘導にも断面常数に対しても共に中立軸の考えを入れ、内容において Timoshenko の式(Winkler 公式)と等しい完結した形の公式に達し、歪エネルギーの公式⁹⁾をたてるに到つて、いよいよ著者の導入した断面常数 J が極めて自然なものであることを知つた。

以上のような過程をへて、曲梁の垂直応力度の公式(1)に達したため、土木学会誌に当初発表した時¹⁰⁾内容は曲梁の応力度の研究であるが、表題を「ラーメン隅部の応力度の研究」とし、また始め Müller-Breslau の公式(4)から研究をすすめた関係上、新しく導入した断面常数も Müller-Breslau の常数 Z にならつて $Z_0 = r_1 \int y^2 \frac{dF}{r}$ とし、 σ の公式を $\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M y_1}{Z_0 r}$ なる形として提案した¹¹⁾。しかし次回には¹²⁾ Müller-Breslau の記号にとらわれずに $J_0 = r_P \int y^2 \frac{dF}{r}$ を導入して $\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M y_1}{J_0}$ なる形の式として提案した。なおその他、核モーメントによる式、曲率中心モーメントによる式、中立軸モーメントによる式、常数 S_0 を用いた式、係数 ν, μ の式等を出してみたが¹³⁾、外形が簡単でも、実質において不便なのはよくないので、結局 Müller-Breslau の公式と著者の J_0 を用いた式が外形及び実質上最も実用的なるを知つた。更に曲梁の歪エネルギーの式を検討するに及び Bach 及び Timoshenko の著書にある公式による時は式の表現が不揃いになる嫌があるから、Müller-Breslau の公式と著者の公式との2つが最後に残るべき公式の形として推すことができるように考える。しかして次回に

J_0 を以て表わした常数も今は $J = r \int y^2 \frac{dF}{r}$ とし σ の公式の最後の形を(1)式の如く

$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M y_1}{J}$ とし、更に Müller-Breslau の公式(4)も著者の新公式にならない、(4)式の Z は重心軸上の点に対応するものであるから Z_0 として表わすことにし、ある考える点 P に対応する常数として新たに $Z = \int r^2 \frac{dF}{r} = r \int r^2 \frac{dF}{r}$ を導入して $\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M y_1}{Z}$ に書き改め結局これら2つを、前者は中立軸に関して、また後者は重心軸に関して考えた洗練された形の式として相並べて推挙したい。

3. Müller-Breslau の σ の公式(4)の齊整

(4)式において r は曲梁の重心軸の曲率半径、 N は重心軸においてはたらく垂直力、 M は曲げモーメント、 σ の式に含まれる v は重心軸より問題にしている σ に対応する断面点 P に到る距離を表わし、常数 Z の積分記号内に含まれる v は重心軸より積分領域内の任意点に到る距離を表わすものであつて、梁軸より曲率中心の方向へ測つた距離を正とし、外方に測つた距離を負とする¹⁴⁾。 F は横断面積を表わし、 Z の積分は横断面全体について行われる。さて(4)式において r は重心軸の曲率半径を表わすからそのことを明示するため r_0 を以て表わし、問題の断面点、すなわち考える σ に対応する点 P に対する曲率半径を r_P 、及び断面の任意点に対する変動的な曲率半径を r とし、区別を明らかにし、また(4)式の Z は重心軸上の点に対応するものであるから Z_0 としてこのことを明示すれば(4)式は次のように書ける。すなわち

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M v}{Z_0} \frac{r_0}{r_0 - v} = \frac{N}{F} + \frac{M v}{Z_0} \frac{r_0}{r_P} \quad \left. \begin{array}{l} \text{ここに} \\ \mathfrak{N} = N - \frac{M}{r_0}, \quad Z_0 = \int r_0^2 \frac{dF}{r_0 - v} \\ = \int r_0^2 \frac{dF}{r} = r_0 \int r^2 \frac{dF}{r} \end{array} \right\} \dots (7)$$

さて新たに、考える点 P に対応する断面常数として $Z = \int r^2 \frac{dF}{r} = r_P \int r^2 \frac{dF}{r}$ (慣れれば積分記号の前に r_P を出したときは添字 P を取去つても区別がつくから今後 $Z = r \int r^2 \frac{dF}{r}$ とし、 r_P を積分記号内にもつてくるため任意点の r と区別する必要があるときのみ r_P と書くことにする)を導入して σ の公式を書き直せば(7)式は次のようになる。すなわち

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M v}{Z} \quad \left. \begin{array}{l} \text{ここに} \\ \mathfrak{N} = N - \frac{M}{r_0}, \quad Z = r \int r^2 \frac{dF}{r} = \frac{r}{r_0} Z_0 \end{array} \right\} \dots (8)$$

Z の式において積分記号の前の r は考える点 P (σ に対応する点)の曲率中心よりの距離であつて積分記号

の内に含まれる r は積分区域内の任意の断面点の曲率中心よりの距離を表わす。

しからは曲梁の内縁及び外縁における応力度 σ_1 及び σ_2 は次の如く表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{M}{F} + \frac{Mv_1}{Z_1}; \quad \sigma_2 = \frac{M}{F} + \frac{Mv_2}{Z_2} \\ \text{ここに} \\ Z_1 &= r_1 \int v^2 \frac{dF}{r} = \frac{r_1}{r_g} Z_g; \\ Z_2 &= r_2 \int v^2 \frac{dF}{r} = \frac{r_2}{r_g} Z_g \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

v_1, v_2 はそれぞれ内縁及び外縁の重心軸よりの距離を表わし、重心軸より曲率中心方向へ測つた距離は正、外方に測つた距離は負として代入する。(8)及び(9)式は著者の公式(1), (2)にならつて従来(3), (4)を簡潔にしたものである。

4. 断面常数值 J 及び Z について

σ の公式(1), (7), (5)または(8)に含まれる断面常数(変体慣性モーメント)に対する計算公式をのべよう。

まず Müller-Breslau の公式(7)の常数 Z_g は断面素 dF に $\frac{r_g}{r}$ の比を乗じて変体した断面の重心軸に関する2次モーメントの積分であつて、 $r_g = \infty$ すなわち直梁の場合、重心軸に関する普通の慣性モーメント $I = \int v^2 dF$ に帰着する値である。定義としてはこのように考えた方がよいが、実際計算に当つては r_g を積分記号の前に出した方が便利である。すなわち

$$Z_g = r_g \int v^2 \frac{dF}{r} = r_g \int v^2 dL, \quad dL = \frac{dF}{r} \dots\dots (10)$$

Z_g を算術的に近似的に表計算を行うには \int を和 Σ に、 d を Δ に置きかえて

$$\begin{aligned} Z_g &= r_g \Sigma \left(v^2 \frac{\Delta F}{r} \right), \quad \text{または} \quad Z_g = r_g \Sigma v^2 \frac{\Delta F}{r} \\ &= r_g \Sigma v^2 \Delta L \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

として考える。また展開式として表わせば (Müller-Breslau による),

$$\begin{aligned} Z_g &= \int v^2 dF + \frac{1}{r_g} \int v^3 dF + \frac{1}{r_g^2} \int v^4 dF + \frac{1}{r_g^3} \int v^5 dF \\ &+ \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

水平主要軸に対称な断面に対しては

$$\left. \begin{aligned} Z_g &= I + \frac{1}{r_g^2} \int v^4 dF + \frac{1}{r_g^4} \int v^6 dF + \dots\dots, \\ \text{ここに} \quad I &= \int v^2 dF \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

断面常数 $Z = r \int v^2 \frac{dF}{r}$, $Z_1 = r_1 \int v^2 \frac{dF}{r}$, $Z_2 = r_2 \int v^2 \frac{dF}{r}$ に対してもこれと同様な計算公式を書くことができ

る。 $r_g = \infty$ すなわち直梁の場合 $Z = Z_1 = Z_2 = Z_g = I = \int v^2 dF$ となる。

さて著者は常数 $L = \int \frac{dF}{r}$ を導入したため、次に示すように便利な計算公式を出すことができた。すなわち

$$\begin{aligned} Z_g &= r_g \int v^2 \frac{dF}{r} = r_g \int (r_g - r)^2 \frac{dF}{r} \\ &= r_g \left(r_g^2 \int \frac{dF}{r} - 2r_g F' + r_g F'' \right) \end{aligned}$$

これより $Z_g = r_g^2 (r_g L - F')$ (14)
従つて一般に

$$Z = r r_g (r_g L - F) \dots\dots\dots (15)$$

となる。 Z_1, Z_2 に対しては(15)式の r に r_1, r_2 とおけばよい。この式は常数 $L = \int \frac{dF}{r}$ の値をもととして Z を求める著者の一般計算式であつて、 Z の定義そのまま、または展開式(12)で求めるよりも計算が容易である。何となれば常数 L の積分は Z の定義それ自身による直接の積分よりも解がやさしくなるからである。

図解的に断面常数を求めるには(11)式よりわかるように Z_g は量 $\Delta L = \frac{\Delta F}{r}$ の重心軸に関する2次モーメントの r_g 倍となるから2次モーメントの作図により求められる¹⁵⁾。

次に著者の断面常数 J は

$$\begin{aligned} J &= \int y^2 \frac{r_p}{r} dF = r \int y^2 \frac{dF}{r} = r \int \frac{(r_0 - r)^2}{r} dF \\ &= r \left(r_0^2 \int \frac{dF}{r} - 2r_0 F' + \int r dF \right) \end{aligned}$$

しかるに $r_g = \frac{1}{F'} \int r dF$ であるから

$$J = r (r_0^2 L - 2r_0 F' + r_g F')$$

これに $r_0 = \frac{F}{L}$ を代入すれば

$$J = r F \left(r_g - \frac{F}{L} \right) = r (r_g - r_0) F = F e r \dots\dots\dots (16)$$

ここに $e = r_g - r_0$ は中立軸の重心軸よりの偏心距離を表わす。

また図解的に J を求めるには

$$J = r \Sigma y^2 \Delta L$$

として量 ΔL の中立軸に関する2次モーメントの作図により求められる¹⁶⁾。

$$J_1 = r_1 \int y^2 \frac{dF}{r}, \quad J_2 = r_2 \int y^2 \frac{dF}{r}, \quad J_0 = r_0 \int y^2 \frac{dF}{r},$$

$J_g = r_g \int y^2 \frac{dF}{r}$ は一般式 J の中の r をそれぞれ r_1, r_2, r_0, r_g と置きかえれば得られる。

図-2は実地計算の便宜上、(14), (15)または(16)式により通例でくる断面形について求めた断面常数值を示すものである。

II. 曲梁の弾性曲線について

5. 曲梁の弾性曲線に対する弾性重量wの公式

曲梁に対する弾性重量の公式としてはMüller-Breslau氏の公式¹⁷⁾がある。すなわち(原書のままの記号で示せば)

Z = (M/EZ + εΔt/h - η/EFr) secφ + d[(η/EF + εt_0) tgφ] / dx (17)

今Z及びrを重心軸に対する値なることを明示するためZ_g及びr_gにて表わしかつ簡単のために温度変化の項を省略すれば

Z = (M/EZ_g - η/EFr_g) secφ + d(η/EF tgφ) / dx (18)

(18)式のZ_gを中立軸に関する断面常数で表わすにはZ_g = r_g^2 e F^18, J_g = r_g e Fを用い変形すれば直ちに得られるがここでは式(1), (2)を用いMüller-Breslauにならい(18)式に相当する中立軸に関する断面常数J_g = r_g ∫ y^2 dF / rにて表わした式の誘導につきのべよう。

直交座標軸x, yを取り, 上方へ測つたyを正とし, 曲梁軸の任意点の鉛直撓みδは下方への変位を正にとる。曲梁において重心軸の長さの成分をds_g, 軸上の任意点x, yにおいて軸に引いた切線のx軸となす角をφとすれば

dy = ds_g sinφ

従つてdyの変化Δdyは

Δdy = Δds_g sinφ + ds_g cosφ Δφ = Δds_g dy + Δφ dx

しかしてδ = -Δyであるからdδ = -dΔy = -Δdy,

これより

-dδ/dx = Δφ + Δds_g/dx tgφ

なる関係を得る。これをxについて微分すれば次のような曲梁の弾性曲線すなわち, 撓曲線の基本の微分方程式が得られる。

-d^2δ/dx^2 = Δdφ/dx + d(Δds_g/dx tgφ) (19)

ここにおいて(19)式の右辺をw(弾性重量)と置けば

-d^2δ/dx^2 = w (20)

を得る。この式は弾性曲線が, 縦距wを有する荷重線に対し極距1として画いた索曲線として表わされることを示す。

しかるにΔds_g及びΔdφをだせば次の如くなる。一般に断面にはたらく偏心力を断面重心にはたらく垂直力N及びモーメントMにわけて考える。

まず軸力Nによる重心軸の成分ds_gの長さの変化

Δds_g及び中心角dφの変化ΔdφはそれぞれEを弾性係数とすれば

Δds_g = N/F * ds_g/E 及び Δdφ = Δds_g/r_g = 1/r_g * N/F * ds_g/E (a)

となる。

次に曲げモーメントMによる中心角dφの変化Δdφ及び重心軸の成分ds_gの変化Δds_gはそれぞれ

Δdφ = ε ds / y 及び Δds_g = -e * Δdφ

となる。ここにyは中立軸より任意の繊維成分dsに到る距離, εはその繊維の歪み, -eは重心軸の中立軸に対する偏心距離を表わす。しかるに曲梁の垂直応力度に対する著者の公式(1), (2)によれば

σ = σ_1 * r_1 / y_1, σ_1 = M y_1 / J_1, J_1 = F e r_1, J_g = F e r_g

ここにσ_1は曲梁の内縁の垂直応力度, y_1は中立軸より内縁に到る距離, r_1は内縁の曲率半径, y及びrは考えるσに対応する点の中立軸及び曲率中心よりの距離, J_1及びJ_gはそれぞれ内縁点及び重心軸に対応する著者の導入せる断面常数を表わす。従つてモーメントMによるΔdφ及びΔds_gはそれぞれ次のようになる。すなわち

Δdφ = ε ds / y = σ / E * ds / y = σ_1 / E * r_1 / y_1 * ds / r (b)

故に垂直軸力N及びモーメントMによるΔds_g及びΔdφは(a)及び(b)の和であつて, モーメントの方向の廻転を正として表わせば

Δds_g = N/F * ds_g/E - M/EF * ds_g/r_g = η/EF * ds_g, η = N - M/r_g, Δdφ = M/EJ_g * ds_g - N/EFr_g * ds_g = (M/EJ_g - N/EFr_g) ds_g (21)

(21)式の値を(19)式に代入し dx = ds_g cosφ と置けば

-d^2δ/dx^2 = (M/EJ_g - N/EFr_g) secφ + d(η/EF tgφ) / dx (22)

従つて

$$w = \left(\frac{M}{EJ_g} - \frac{N}{EFr_g} \right) \sec\phi + \frac{d}{dx} \left(\frac{M}{EF} \operatorname{tg}\phi \right) \dots\dots (23)$$

を得る。これが著者の断面常数 $J_g = r_g \int y^2 dF = r_g e F$ を以て表わした曲梁の弾性曲線に対する弾性重量の公式であつて(18)式に対応するものである。

特別の場合 $r_g = \infty$ すなわち直梁に対しては $ds = dx$, $\frac{dy}{dx} = 0$, $Z_g = J_g = I$ となり(18)式または(23)式はよく知られた値 $w = \frac{M}{EI}$ となる。また、曲率が大きくない拱桁に対しては $w = \frac{M}{EI \cos\phi}$ が用いられる。すなわち拱桁の弾性曲線の微分方程式は

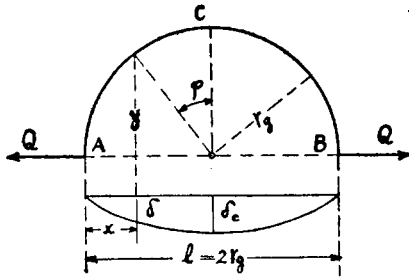
$$-\frac{d^2\delta}{dx^2} = \frac{M}{EI \cos\phi}$$

ここに I は普通の慣性モーメントを表わす。

6. 例題

図-1 に示す如く半円拱に2つの力 Q が水平に外方にはたらく場合(23)式を用いて弾性曲線を求める。

図-1



解: 拱の任意断面に対し $N = Q \cos\phi$, $M = Q \cdot r_g \cos\phi$, $\frac{M}{r_g} - N = 0$, 従つて弾性曲線の微分方程式は(22)式より

$$\begin{aligned} -\frac{d^2\delta}{dx^2} &= w = \left(\frac{Q r_g \cos\phi}{EJ_g} - \frac{Q \cos\phi}{EFr_g} \right) \sec\phi \\ &= \frac{Q}{E} \left(\frac{r_g}{J_g} - \frac{1}{Fr_g} \right) = \frac{Q}{E} \left(\frac{r_g}{J_g} - \frac{e}{Fr_g} \right) \\ &= \frac{Q}{E} \frac{r_g - e}{J_g} = \frac{Q r_0}{EJ_g} \end{aligned}$$

ここに r_0 は中立軸の曲率半径を表わす。故に求める弾性曲線は支間 l の単純梁に単位長について

$$w = \frac{Q r_0}{EJ_g} = \text{const.}$$

の均等荷重が加わつた場合のモーメント線として表わされる。従つて、弾性曲線は

$$\delta_c = \frac{wl^2}{8} = \frac{wr_g^2}{2} = \frac{Q r_0 r_g^2}{2EJ_g} \text{ または } \delta_c = \frac{Q r_0 r_g}{2eEI}$$

の矢高をもつ抛物線となりその方程式は

$$\delta = \frac{wl}{2}x - \frac{w}{2}x^2 = \frac{w}{2}x(l-x) = \frac{4\delta_c}{l^2}x(l-x)$$

$$= \frac{\delta_c}{r_g^2}x(2r_g-x) = \frac{Q r_0}{2EJ_g}x(2r_g-x)$$

$$\text{または } \delta = \frac{Q}{2eEI} \frac{r_0}{r_g}x(2r_g-x)$$

となる。これを $Z_g = r_g \int y^2 \frac{dF}{r}$ にて書きかえると

$$\delta = \frac{Q r_0}{2EZ_g}x(2r_g-x)$$

となる。

7. むすび

著者は断面常数 $J = r \int y^2 \frac{dF}{r}$ を導入して垂直応力度に対しては $\sigma = \frac{N}{F} + \frac{My}{J}$, また歪エネルギーに対しては $A_i = \int \frac{N_0^2}{2EF} ds_0 + \int \frac{M_0^2}{2EJ_0} dV_0$ なる簡潔な式を得たが、弾性曲線の如く曲梁の重心軸自身の問題に対しては Müller-Breslau の公式と表現に大差はないが、中立軸及び重心軸についての常数を用いた2種類の公式を対比する意味において弾性重量 w に対してまた著者の中立軸に関する常数を用いて表わした式を示したわけである。

註

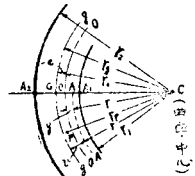
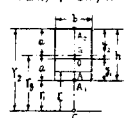
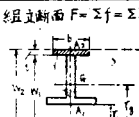
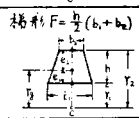
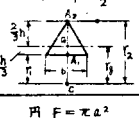
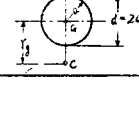
- 1) 著者: 曲梁における垂直応力度, 土木学会誌, 第29巻, 第10号, 733 P, 著者: 曲梁の歪エネルギーに対する公式, 土木学会誌, 第36巻, 第12号, 557 P 及び徳大工学部研究報告, 第3巻, 第2号
- 2) 例えば小野鑑正: 材料力学, 第4版, 182 P, (6)式 Müller-Breslau: Die neueren Methoden der Festigkeitslehre, 241 P, Müller-Breslau の公式は Bach の著書にある方の式をまとめた形である。
- 3) Bleich: Stahlhochbauten, Bd. 2 (邦訳, 池部氏外5氏: プライヒ氏鉄骨構造, 下巻, 第3版 691~925 P)
- 4) Vianello-David: Der Eisenbau, 3. Aufl., 1927, 420 P
- 5) 著者: 曲部材の応力度に関する図解法について 土木技術, 昭.17.5.
- 6) 前掲 2) 小野鑑正: 材料力学, 185 P または 清水篤磨: 材料力学, 249 P
- 7) Timoshenko: Strength of Materials, Part II, 423 p 以下 $\sigma_x = \frac{My}{Ac(r-y)}$ (英, 独では Winkler 式と呼ばれる)
- 8) Grüning: Die Statik des ebenen Tragwerkes, 1925, 159 P, 覚前陸夫: 材料力学新論112 P
- 9) 著者: 曲梁の歪エネルギーに対する公式, 土木学会誌, 第36巻第12号(昭.26.12)

- 10) 著者：ラーメン隅部の応力度の研究，土木学会誌，第29巻第4号，(昭.18)
- 11) 同上
- 12) 前掲 1)
- 13) 同上
- 14) 距離 v の正負のとりかたがちがえば式の符号は変つてくる。

- 15) 著者：曲梁の垂直応力度について，徳大工学部研究報告，第3巻第2号
- 16) 同上
- 17) Müller-Breslau: Die neueren Methoden der Festigkeitslehre, 5. Aufl. 1924, 249 P
- 18) 前掲 15)

図-2 附圖

曲梁の垂直応力度 σ の公式及び断面常数 Z_3, Z 及び J

	1 Müller-Breslau $\sigma = \frac{N}{F} + \frac{Mv}{Z_3} \frac{1}{v}$	2* $\sigma = \frac{N}{F} + \frac{Mv}{Z}$	3 I.Ohno $\sigma = \frac{N}{F} + \frac{Mv}{J}$	 <p>記号 σ: 断面に於ける点Pの垂直応力度 $\sigma_{1,2}$: 内縁点A, A'外縁点A₂, A₃に於ける垂直応力度 P: 横断面 N: 重心軸に於ける垂直力 M: 曲中モーメント Z_3: 重心軸を回するMüller-Breslauの断面常数 Z, J: 断面常数 $Z_{1,2}, J_{1,2}$: 内縁及び外縁に対する断面常数 r_2: 断面の任意点Aに対する曲率半径 $r_{1,2}$: 内縁及び外縁の曲率半径 r_0: 問題の点P(あるいは応力度を測る点)の曲率半径 r_0: 四角$\alpha-\alpha'$の中心からの場合の中心軸O-Oの曲率半径 r_0^*: 重心軸$g-g$の曲率半径 v, y: σの公式中におけるv及びyはA: 重心軸及び中立軸より着たる点Pのσに於ける点Pに至る距離である。断面$Z, Z_{1,2}, Z_3, J, J_{1,2}$は$v$及び$y$は又は重心軸及び中立軸の任意点Aに至る距離 $v_{1,2}, y_{1,2}$: Aと重心軸及び中立軸との内縁点A, 及び外縁点A₂に至る距離 $e = r_0 - r_1$: 中立軸の重心軸に對する偏心距離 $I = \int y^2 dF$: 断面の重心軸に對する慣性モーメント \ln: 自然対数 $J_{1,2}$はJ又はJ_3の意, $\sigma_{1,2}, Z_{1,2}, r_{1,2}$等とこれと同様。</p>
変直応力度 σ	$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{Mv}{Z_3} \frac{1}{v}$ $Z_3 = \int v^2 \frac{1}{v} dF$	$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{Mv}{Z}$ $Z = \int v^2 dF, N = \frac{M}{r_0}$	$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{Mv}{J}$ $J = \int y^2 dF$	
断面常数	$Z_3 = r_0 \int v^2 \frac{1}{v} dF$ $Z_3 = I + \frac{1}{r_0} \int v^2 dF + \frac{1}{r_0^2} \int v^2 dF + \dots$ $Z_3 = r_0^2 (\frac{1}{r_0} L - F)$ $L = \int \frac{dF}{r_0}$ $r_0 = \frac{\int r dF}{F}$	$Z = r \int v^2 dF = r \int v^2 dL$ $Z_{1,2} = r_{1,2} \int v^2 dF$ $Z = r r_0^2 (\frac{1}{r_0} L - F)$ $Z = \frac{r}{r_0} Z_3 = \frac{r_0}{r} J$ $Z_{1,2} = \frac{r_{1,2}}{r_0} Z_3 = r_{1,2} r_0 (\frac{1}{r_0} L - F)$	$J = r \int y^2 dF = r \int y^2 dL$ $J_{1,2} = r_{1,2} \int y^2 dF$ $J = r e F = r (r_0 - r_1) F$ $r_0 = \frac{r_1}{L} = \frac{r_1 dF}{J}$ $J = \frac{I}{r_0} Z_3$ $J_{1,2} = r_{1,2} (r_0 - r_1) F$	
矩形 $F = bh, h = 2a$	 $Z_3 = r_0^2 (\frac{1}{r_0} b \ln \frac{r_0}{r_1} - bh)$ $r_0 > a, I = \frac{bh^3}{12}$ $Z_3 = I \left[1 + \frac{3}{8} \left(\frac{a}{r_0} \right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{a}{r_1} \right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{a}{r_0} \right)^4 + \dots \right]$	$Z_{1,2} = r_{1,2} r_0 (\frac{1}{r_0} b \ln \frac{r_0}{r_1} - bh)$	$r_0 = \frac{h}{\ln \frac{r_0}{r_1}} + \frac{3(h^2 + r_0^2)}{8(r_0 - r_1)}$ $J_{1,2} = r_{1,2} (r_0 - \frac{h}{\ln \frac{r_0}{r_1}}) bh$	
組立断面 $F = \Sigma f = \Sigma bt$	 $Z_3 = r_0^2 (\frac{1}{r_0} \Sigma b \ln \frac{r_0}{r_1} - \Sigma f)$	$Z_{1,2} = r_{1,2} r_0 (\frac{1}{r_0} \Sigma b \ln \frac{r_0}{r_1} - \Sigma f)$	$r_0 = \frac{F}{\Sigma b \ln \frac{r_0}{r_1}}$ $J_{1,2} = r_{1,2} F (r_0 - \frac{F}{\Sigma b \ln \frac{r_0}{r_1}})$	
楕形 $F = \frac{\pi}{2} (b_1 + b_2)h$	 $e_1 = \frac{h}{3} \frac{b_1^2 + b_2^2}{b_1 + b_2}, e_2 = \frac{h}{3} \frac{2b_1^2 + b_2^2}{b_1 + b_2}$ $Z_3 = r_0^2 \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{b_1 + b_2}{r_0} \ln \frac{r_0}{r_1} - (b_1 + b_2) \right) - F \right]$	$Z_{1,2} = r_{1,2} r_0 \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{b_1 + b_2}{r_0} \ln \frac{r_0}{r_1} - (b_1 + b_2) \right) - F \right]$	$r_0 = \frac{F}{\frac{\pi}{2} (b_1 + b_2) \ln \frac{r_0}{r_1} - (b_1 + b_2)}$ $J_{1,2} = r_{1,2} (r_0 - r_1) F$	
三角形 $F = \frac{bh}{2}$	 $Z_3 = r_0^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{b}{r_0} \ln \frac{r_0}{r_1} - b \right) - \frac{bh}{2} \right]$	$Z_{1,2} = r_{1,2} r_0 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{b}{r_0} \ln \frac{r_0}{r_1} - b \right) - \frac{bh}{2} \right]$	$r_0 = \frac{h}{2} \frac{1}{\ln \frac{r_0}{r_1} - 1}$ $J_{1,2} = r_{1,2} (r_0 - r_1) F$	
円 $F = \pi a^2$	 $r_0 > a, I = \frac{\pi a^4}{4}$ $Z_3 = I \left[1 + \frac{3}{8} \left(\frac{a}{r_0} \right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{a}{r_1} \right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{a}{r_0} \right)^4 + \dots \right]$	$L = 2\pi (r_0 - \sqrt{r_0^2 - a^2})$ $Z_{1,2} = r_{1,2} r_0 (r_0 - \pi a^2)$	$r_0 = \frac{a^2}{2(r_0 - \sqrt{r_0^2 - a^2})}$ $J_{1,2} = r_{1,2} (r_0 - r_1) F$	

公式2*は著者Müller-Breslauの公式を簡潔にしたものである。 J 及び Z はMüller-Breslauにならつて同様の記号であるが Z, Z の代りに N, J を用い $\sigma = \frac{N}{F} + \frac{Mv}{J}$ と表はさうと考へる。