

# 曲梁の剪断応力度及び半径方向の垂直応力度 に対する新公式

正 員 大 野 諫\*

## NEW FORMULAE OF SHEARING STRESS AND RADIAL NORMAL STRESS FOR CURVED BEAM<sup>1)</sup>

(JSCE July 1952)

Isamu Ohno, C.E. Member

**Synopsis** This paper presents the new formulae of shearing stress  $\tau$  and radial normal stress  $\sigma_r$  for curved beam as follows:

$$\tau = \frac{QS}{bJ_0},$$

$$\text{where } J_0 = r_0 \int y^2 \frac{dF}{r} = Fer_0 = F(r_g - r_0)r_0, \quad S = \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \int \eta dF = \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \bar{F} \eta$$

$$\sigma_r = \frac{M}{bJ_0} \bar{\epsilon} + \frac{N}{bF} \bar{\gamma} - \frac{N}{bJ_0} \bar{\gamma}_s$$

$$\text{where } J_0 = r_0 \int y^2 \frac{dF}{r} = Fer_0, \quad \bar{\epsilon} = \frac{1}{r} \int_{r_1}^{r_0} y \frac{r_0}{r} dF, \quad \bar{\gamma} = \frac{1}{r} \int_{r_1}^{r_0} dF, \quad \bar{\gamma}_s = \frac{1}{r} \int_{r_1}^{r_0} S dr$$

Taking only the first term corresponding to the moment into consideration,

$$\sigma_r = \frac{M}{bJ_0} \bar{\epsilon},$$

which is equivalent to Gruning's formulae

$$\sigma_r = \frac{1}{b(r-y)} \frac{M_0}{Z} \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \left[ \int_{y_0}^{h_0} y_0 b dy + \frac{1}{r_0} \int_{y_0}^{h_0} y_0^2 b dy \right]$$

### 1. 緒言

直梁の横断面における鉛直剪断応力度  $\tau$  は、 $Q$  を剪断力、 $S$  を考える点以上の断面の重心軸に関する 1 次モーメント、 $I$  を重心軸に関する全断面の慣性モーメント、 $b$  を考える点における断面の巾とすれば、一般に  $\tau = \frac{QS}{bI}$  で表わされることは周知の事柄である。

曲梁に対しても平面的な曲部材としての解は弾性論の著書に 2 次元問題として極座標による Airy 函数を応用して得られた解が必ず述べられている<sup>2)</sup>。しかし断面が円形、梯形、板桁断面であるような実用的な場合の剪断応力度公式について書いてある著書は案外少ない。原書では Bach und Baumann の著書<sup>3)</sup>に Grashof 氏の公式として  $\tau$  の一般公式が掲げられ、また我国では中原博士の弾性工学<sup>4)</sup>に述べられている位である。而して同書では剪断応力度  $\tau$  の誘導に当り Grashof 氏と同様に垂直応力度の公式<sup>5)</sup>

$$\sigma = \frac{P}{f} + \frac{M}{fr} + \frac{M}{Afr} \cdot \frac{\eta}{r+\eta}, \quad A = -\frac{1}{f} \int \frac{\eta}{r+\eta} df$$

を用いているが、 $\tau$  に対する一般式を示すことなく矩

形及び円形断面に対し個々に剪断応力度公式を与えている。ここに常数  $A$  は Bach und Baumann の著書での記号  $\kappa$  に等しいものである。

本論文においては曲梁に対する著者の垂直応力度の公式  $\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M\eta}{J}$  を応用してまず Grashof 氏の公式に対応する一般式を出し、矩形及び円形断面に対しては一般式による例題として剪断応力度の式を出した。しからは他の断面形に対してもそれにならい容易に求めることができるであろう。

半径方向の垂直応力度は曲梁の特色と考えられるが剪断応力度の公式よりも論述している書が少ないようである。原書においては Gruning 氏がモーメントの影響のみを考慮した  $\sigma_r$  の近似式<sup>6)</sup>を示している。また最近の Anderson 氏の論文<sup>7)</sup>を読んで半径方向の応力度公式として Winslow 及び Edmonds の近似式<sup>8)</sup>を用いているのを知った。

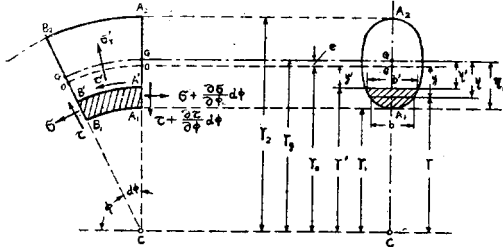
剪断応力度の公式、半径方向の垂直応力度の公式は實際上、板桁断面より成る曲梁において突縁と腹縁とを結ぶ鉋の計算に対し重要なものである。

### 2. 剪断応力度 $\tau$ に対する著者の公式 $\tau = \frac{QS}{bJ_0}$ の誘導

\* 徳島大学教授，工学部土木教室

図-1 に示す如く中心角  $d\phi$  に挟まれる曲梁の微小成分において影をつけた部分  $A'A_1B_1B'$  を取出して考える。断面は左右対称とし、曲率中心  $C$  より  $r$  なる距離における断面の巾を  $b$  とする。そして  $b$  は一般に  $r$  の函数であるとする。

図-1



今、影をつけた部分  $A'A_1B_1B'$  の周方向の応力の釣合条件を書けば次の如くなる。即ち  $r=r'$  における巾を  $b'$ 、剪断応力度を  $\tau'$  とすれば

$$\tau' b' r' d\phi = \left[ \int_{r_1}^{r''} \left( b \frac{\partial \sigma}{\partial \phi} d\phi \right) dr \right] \cos \frac{d\phi}{2} - 2 \left[ \int_{r_1}^{r''} b r dr \right] \sin \frac{d\phi}{2} - \left[ \int_{r_1}^{r''} \left( b \frac{\partial \tau}{\partial \phi} d\phi \right) dr \right] \sin \frac{d\phi}{2}$$

$d\phi$  を極めて小さいものとして、高次の微小項を省略すれば

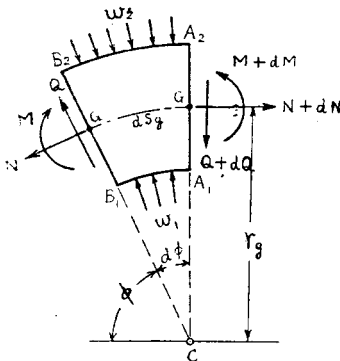
$$\tau' b' r' = \int_{r_1}^{r''} b \frac{\partial \sigma}{\partial \phi} dr - \int_{r_1}^{r''} b \tau dr \quad \dots\dots\dots (1)$$

しかるに著者の垂直応力度  $\sigma$  の公式<sup>9)</sup> によれば

$$\sigma = \frac{N}{F'} + \frac{M y}{J} \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここに垂直力  $N$  及びモーメント  $M$  は図-2 に示す矢の向きを正とし、 $y$  は中立軸  $C-O$  より内方に測つた距離を正とする。

図-2



(2) より

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \phi} = \frac{1}{F'} \frac{\partial N}{\partial \phi} + \frac{y}{J} \frac{\partial M}{\partial \phi} \quad \dots\dots\dots (3)$$

また、曲梁において  $M$  及び  $N$  に対し次の関係式<sup>10)</sup> が成立つ (図-2)。

$$\left. \begin{aligned} \frac{dM}{dS_g} = \frac{dM}{r_g d\phi} = Q \\ \frac{dN}{d\phi} = Q \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

ここではモーメント  $M$  及び垂直力  $N$  並びに剪力  $Q$  は図-2 の矢の向を正とする。 $dS_g$  は重心軸  $G-G$  の成分の長さを表わす。この関係を (3) に代入し  $J = F'(r_g - r_0)r = F'er^{11}$  とおけば

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \phi} = \frac{Q}{F'} + \frac{Q}{F'} \frac{r_g y}{e r} \quad \dots\dots\dots (5)$$

これを (1) に代入すれば

$$\tau' b' r' = \frac{Q r_g}{F'e} \int_{r_1}^{r''} \frac{y}{r} b dr + \frac{Q}{F'} \int_{r_1}^{r''} b dr - \int_{r_1}^{r''} \tau b dr \quad \dots\dots\dots (6)$$

(6) 式を積分の上限  $r'$  で微分すれば<sup>12)</sup>

$$b' r' \frac{\partial \tau'}{\partial r'} + \tau' (b' + r' \frac{\partial b'}{\partial r'}) = \frac{Q r_g y'}{F'e r'} b' + \frac{Q}{F'} b' - \tau' b'$$

故に

$$b' r' \frac{\partial \tau'}{\partial r'} + \tau' (2b' + r' \frac{\partial b'}{\partial r'}) = \frac{Q}{F'} \left( 1 + \frac{r_g y'}{e r'} \right) b'$$

$y' = r_0 - r'$  と置き、この式の両辺に  $r'$  を乗ずれば

$$b' r'^2 \frac{\partial \tau'}{\partial r'} + \tau' (2b' r' + r'^2 \frac{\partial b'}{\partial r'}) = \frac{Q}{F'} \frac{e r' + r_g (r_0 - r')}{e} b'$$

$e = r_g - r_0$  と置き左辺をまとめて書けば

$$\frac{\partial}{\partial r'} (\tau' b' r'^2) = \frac{Q}{F'} \frac{r_0 (r_g - r')}{e} b'$$

$r_g - r' = \eta'$  と置けば

$$\frac{\partial}{\partial r'} (\tau' b' r'^2) = \frac{Q}{F'} \frac{r_0}{e} \eta' b'$$

となる。この最後の関係式は  $r'$  を任意の距離  $r$  と見ても成立つものであるから、この式の  $\tau'$ 、 $b'$ 、 $r'$  及び  $\eta'$  の肩の記号  $'$  を取去つて、 $r_1$  から  $r'$  まで積分すれば次の如くなる。

$$\int_{r_1}^{r''} \frac{\partial}{\partial r} (\tau b r^2) dr = \frac{Q}{F'} \frac{r_0}{e} \int_{r_1}^{r''} \eta b dr = \frac{Q r_0}{F'e} \int_{\eta'}^{\eta_1} \eta b d\eta = \frac{Q r_0}{F'e} \int_{\eta'}^{\eta_1} \eta dF' \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここに  $\int_{\eta'}^{\eta_1} \eta b d\eta = \int_{\eta'}^{\eta_1} \eta dF'$  は断面において重心軸より  $\eta'$  なる距離より内方に存在する部分面  $\bar{F}$  の、重心軸に関する1次モーメントを表わすから、重心軸より  $\bar{F}$  の重心に到る距離を  $\bar{\eta}$  とすれば  $\int_{\eta'}^{\eta_1} \eta dF' = \bar{F} \bar{\eta}$  として表わされる。

(7) 式より

$$\tau' b' r'^2 = \frac{Q r_0}{F'e} \int_{\eta'}^{\eta_1} \eta dF'$$

故に

$$\tau' = \frac{Q}{b'} \frac{r_0}{F e r^2} \int_{\eta}^{\eta_1} \eta dF \dots\dots\dots (8)$$

さて今、公式としての表現を快美にするために、(8)式における  $\tau'$ ,  $r'$ ,  $b'$  の肩の記号  $\nu$  を取り去り、一般に曲率中心より  $r$  なる距離における剪断応力度を  $\tau$  としして表わすことにすれば、所求の剪断応力度の公式として次式を得る。

$$\tau = \frac{Q}{b F} \frac{r_0}{e r^2} \int_{\eta}^{\eta_1} \eta dF = \frac{Q S}{b J_0} \dots\dots\dots (9)$$

ここに

$$J_0 = r_0 \int y^2 \frac{dF}{r} = F e r_0,$$

$$S = \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \int \eta dF = \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 F \bar{\eta}$$

$J_0$  は著者がさきに導入した変体断面 (modified area) の中立軸に関する2次モーメントであつて、 $S$  は上式で示される如く新しく導入した変体断面の1次モーメントである。而して  $J_0$  の式の積分は中立軸に関して全断面について行われ、 $S$  の式の積分は重心軸に関して  $\eta$  から内縁点の  $\eta_1$  まで行われる。 $J_0$  及び  $S$  の値

は断面の形が与えられれば容易に求まる常数である。

さて(9)式は断面においての鉛直剪断応力度を表わすものであつて、曲率中心より  $r$  なる距離における周上の合成剪断応力度  $\tau_r$  は(図-3)

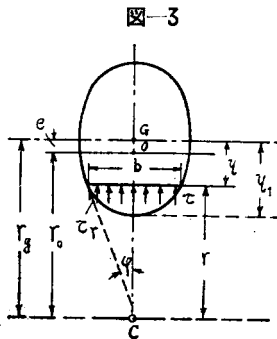


図-3

$$\tau_r = \frac{Q S}{b J_0 \cos \varphi} \dots\dots\dots (10)$$

となる。これが Grashof 氏の公式<sup>13)</sup> (原書のままの記号で示せば)

$$\tau = \frac{S M \eta}{2 y \kappa f (r \pm \eta) \cos \varphi} \dots\dots\dots (11)$$

に対応するものである。この式の  $\kappa$  は一般に

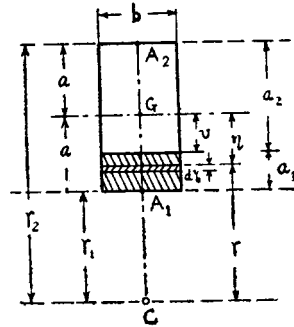
$$\kappa = -\frac{1}{f} \int \frac{\eta}{r + \eta} df \dots\dots\dots (12)$$

で表わされる断面常数<sup>14)</sup> である。(11) 式を本論文に用いた記号に書き直しかつ常数  $\kappa$  と著者の断面常数  $J_0$  との間の関係式を用いて変形すれば (11) 式は著者の公式 (10) に等しくなることを証することができる。

例 1. 矩形断面  $I^2 = 2ab$  (図-4)

重心軸より  $v$  なる距離における鉛直剪断応力度を  $\tau$  とすれば、(9) 式により

図-4



$$S = \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 F \bar{\eta} = \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 b (a-v) \left(\frac{a-v}{2} + v\right) \\ = \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 b \frac{(a+v)(a-v)}{2} = \frac{b}{2} \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 a_1 a_2$$

故に

$$\tau = \frac{Q S}{b J_0} = \frac{Q}{F} \frac{r_0}{2e} \frac{a_1 a_2}{r^2} = \frac{Q}{F} \frac{r_0}{2e} \frac{(r-r_1)(r_1-r)}{r^2}, \\ \text{または} \\ = \frac{Q}{F} \frac{r_0}{2e} \frac{a^2 - v^2}{(r_0 - v)^2} \dots\dots\dots (13)$$

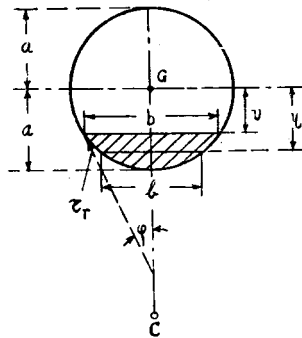
矩形の場合 (10) 式における  $\cos \varphi = 1$  なる故、重心軸より  $v$  なる距離における断面成分の周上の合成剪断応力度  $\tau_r$  は  $\tau$  に等しい。(13) 式を  $J_0 = F e r_0 = \kappa F r_0^2$  なる関係式により書き直せば

$$\tau_r = \frac{Q}{2 \kappa F} \frac{a^2 - v^2}{(r_0 - v)^2} \dots\dots\dots (14)$$

となる。

例 2. 円形断面  $I^2 = \pi a^2$  (図-5)

図-5



(9) 式により

$$S = \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \int \eta dF = \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \int_0^a \eta b d\eta \\ = 2 \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \int_0^a \eta \sqrt{a^2 - \eta^2} d\eta \\ = \frac{2}{3} \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 (a^2 - v^2)^{3/2},$$

$$b = 2(a^2 - r^2)^{1/2}, \quad \cos \phi = \frac{b}{2a} = \frac{(a^2 - r^2)^{1/2}}{a}$$

$$J_0 = F e r_0$$

故にこれらの値を (9) 式に代入すれば

$$\tau = \frac{Q S}{b J_0} = \frac{Q}{3 F} \frac{r_0}{e} \frac{a^2 - r^2}{(r_0 - v)^2} \dots\dots\dots (15)$$

故に周上における合成剪断応力度  $\tau_r$  は(10)式より

$$\tau_r = \frac{Q}{3 F} \frac{a}{e} \frac{1}{r^2} \sqrt{a^2 - r^2} \dots\dots\dots (16)$$

(15) 及び(16)式を上述と同じく  $\kappa$  を含む式に書き変えたと

$$\tau = \frac{Q}{3 F} \frac{a^2 - r^2}{\kappa (r_0 - v)^2} \dots\dots\dots (17)$$

$$\tau_r = \frac{Q}{3 F} \frac{a}{\kappa} \frac{1}{r^2} \sqrt{a^2 - r^2} \dots\dots\dots (18)$$

となる。以上の  $\tau$  の式を吟味すれば直梁の場合と異なり  $\tau_{\max}$  は梁断面の重心軸上に生じないでやや内方に生ずることがわかる。

3. 半径方向の垂直応力度  $\sigma_r$  に対する著者の一般公式の誘導

図-1 において影をつけた部分  $A_1 A' B' B_1$  の半径方向の応力の釣合条件を書けば次の如くなる。

$$\begin{aligned} \sigma_r' b' r' d\phi &= 2 \left[ \int_{r_1}^{r'} b \sigma dr \right] \sin \frac{d\phi}{2} \\ &+ \left[ \int_{r_1}^{r'} \left( b \frac{\partial \sigma}{\partial \phi} d\phi \right) dr \right] \sin \frac{d\phi}{2} \\ &+ \left[ \int_{r_1}^{r'} \left( b \frac{\partial \tau}{\partial \phi} d\phi \right) dr \right] \cos \frac{d\phi}{2} \end{aligned}$$

$\phi$  を極めて小さいものとして高次の微小項を省略すれば

$$\sigma_r' b' r' = \int_{r_1}^{r'} b \sigma dr + \int_{r_1}^{r'} b \frac{\partial \tau}{\partial \phi} dr \dots\dots\dots (19)$$

しかるに著者の公式によれば

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{N}{F} + \frac{M y}{J} = \frac{N}{F} + \frac{M y}{J_0} \frac{r_0}{r} \\ \tau &= \frac{Q S}{b J_0}, \quad \text{従つて} \quad \frac{\partial \tau}{\partial \phi} = \frac{S}{b J_0} \frac{\partial Q}{\partial \phi} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

また図-2 において半径方向の釣合条件をかけば

$$\begin{aligned} Q \cos \frac{d\phi}{2} - (Q + dQ) \cos \frac{d\phi}{2} - N \sin \frac{d\phi}{2} \\ - (N + dN) \sin \frac{d\phi}{2} + w_1 r_1 d\phi - w_2 r_2 d\phi = 0 \end{aligned}$$

$\phi$  を微小であるとするれば

$$\frac{dQ}{d\phi} = -N + w_1 r_1 - w_2 r_2$$

簡単のため  $w_1, w_2$  を省略すれば

$$\frac{dQ}{d\phi} = -N \dots\dots\dots (21)$$

(20) 及び (21) 式を (19) 式に代入すれば

$$\begin{aligned} \sigma_r' b' r' &= \int_{r_1}^{r'} b \left( \frac{N}{F} + \frac{M y}{J_0} \frac{r_0}{r} \right) dr - \int_{r_1}^{r'} b \frac{N S}{b J_0} dr \\ &= \frac{M r_0}{J_0} \int_{r_1}^{r'} y \frac{dF}{r} + \frac{N}{F} \int_{r_1}^{r'} dF - \frac{N}{J_0} \int_{r_1}^{r'} S dr \end{aligned}$$

故に

$$\begin{aligned} \sigma_r' &= \frac{M}{b' J_0} \frac{r_0}{r'} \int_{r_1}^{r'} y \frac{dF}{r} + \frac{N}{b' F r'} \int_{r_1}^{r'} dF \\ &- \frac{N}{b' J_0 r'} \int_{r_1}^{r'} S dr \end{aligned}$$

ここにおいて公式の表現を快美にするために  $\sigma_r', b', r'$  の肩の記号 ' を取去つてこれらをあらためて  $\sigma_r, b, r$  として表わせば

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{M}{b J_0} \frac{1}{r} \int_{r_1}^r y \frac{r_0}{r} dF + \frac{N}{b F r} \int_{r_1}^r dF \\ &- \frac{N}{b J_0} \frac{1}{r} \int_{r_1}^r S dr \end{aligned}$$

故に

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma} &= \frac{1}{r} \int_{r_1}^r y \frac{r_0}{r} dF = \frac{r_0}{r} \int_{r_1}^r y \frac{dF}{r} \\ \bar{\delta} &= \frac{1}{r} \int_{r_1}^r dF = \frac{\bar{F}}{r}, \quad \bar{\delta}_s = \frac{1}{r} \int_{r_1}^r S dr \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

なる記号の常数を用いば、所求の  $\sigma_r$  の一般公式は

$$\sigma_r = \frac{M}{b J_0} \bar{\sigma} + \frac{N}{b F} \bar{\delta} - \frac{N}{b J_0} \bar{\delta}_s \dots\dots\dots (23)$$

となる。(23) 式の第 2, 第 3 項は第 1 項のモーメントに関する項に比べ通例甚だ小である。(23) 式における常数  $\bar{\sigma}, \bar{\delta}, \bar{\delta}_s$  は断面が与えられれば決定されるもので、如何なる意味の常数であるかは (22) 式を見れば容易に了解されるであろう。

4. モーメント  $M$  の影響のみを考慮した場合の半径方向の垂直応力度の近似式  $\sigma_r = \frac{M}{b J_0} \bar{\sigma}$

(23) 式の右辺においてモーメントの影響を表わす第 1 項のみを取れば

$$\sigma_r = \frac{M}{b J_0} \bar{\sigma} = \frac{M}{b J_0} \frac{r_0}{r} \int_{r_1}^r y \frac{dF}{r} \dots\dots\dots (24)$$

または (19) 式において  $\tau$  に関係する右辺第 2 項を省略すれば

$$\begin{aligned} \sigma_r' b' r' &= \int_{r_1}^{r'} b \sigma dr \\ \sigma &\text{ においてモーメントによる値 } \sigma_M = \frac{M y}{J} \text{ のみを取れば} \end{aligned}$$

$$\sigma_r' b' r' = \int_{r_1}^{r'} b \sigma_M dr$$

ここにおいて記号 ' を取去つて  $\sigma_r$  の式を書けば

$$\sigma_r = \frac{1}{b r} \int_{r_1}^r b \sigma_M dr = \frac{F \sigma}{b r} \dots\dots\dots (25)$$

ここに  $F \sigma = \int_{r_1}^r b \sigma_M dr$  は巾  $b$  を考へての  $\sigma_M$ -表図の面積を表わす。 $\sigma_M$ -図が求まれば (25) 式により  $\sigma_r$

は容易に求められる。(25)式において積分記号の前の  $b$  は考える点における断面の巾であつて、積分記号の内部にある  $b$  は積分区域の任意点における断面の巾を表わす。(25)式は Winslow 及び Edmonds の公式に等しい<sup>15)</sup>。矩形断面では巾  $b$  が常数であるから

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \int_{r_1}^r \sigma_M dr = \frac{F\sigma}{r}; \\ \text{ここに} \\ F\sigma &= \int_{r_1}^r \sigma_M dr, \quad \sigma_M = \frac{My}{J} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

次に (25) 式より (24) 式までに式の変形を示せば

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{br} \int b \sigma_M dr = \frac{1}{br} \int b \frac{My}{J} dr \\ &= \frac{1}{br} \int b \frac{My}{J_0} \frac{r_0}{r} dr = \frac{M}{bJ_0} \frac{r_0}{r} \int y \frac{dF}{r} = \frac{M}{bJ_0} \bar{S} \end{aligned}$$

さて Grüning 氏の著書にある公式<sup>16)</sup>を原書の記号のまままで示せば、半径方向の垂直応力度  $\sigma_y$  は

$$\begin{aligned} \sigma_y &= \frac{1}{b(r-y)} \frac{M_v}{Z} \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \left[ \int_{y_0}^{h_0} y_0 b dy \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r_0} \int_{y_0}^{h_0} y_0^2 b dy \right] \dots\dots\dots (27) \end{aligned}$$

ここに  $Z$  は Müller-Breslau: *Dis neueren Methoden der Festigkeitslehre* の曲梁の垂直応力度公式中に含まれる断面常数,  $M_v$  はモーメント,  $r$  は曲梁の重心軸の曲率半径,  $r_0$  は中立軸の曲率半径,  $y_0$  は中立軸より測つた距離,  $y$  は梁軸より測つた距離であつて、曲率中心の方向に測つた距離を正とする。 $h_0$  は中立軸より断面の内縁点に到る距離を表わし、括弧内の積分は中立軸よりの距離  $y_0$  を変数としての積分である。

(27) 式に含まれる各記号  $r_0, r, r-y, Z, \left(\frac{r}{r_0}\right)^2, y_0, h_0, b dy, M_v, \sigma_y$  をそれぞれ、対応する本論文の記号  $r_0, r_g, r, \left(\frac{r_g}{r_0}\right)^2 J_0, \left(\frac{r_g}{r_0}\right)^2, y, y_1, dF, M, \sigma_r$  に書き直せば、(27) 式は

$$\sigma_r = \frac{1}{br} \frac{M}{J_0} \left[ \int_{y_1}^{y_0} y dF + \frac{1}{r_0} \int_{y_1}^{y_0} y^2 dF \right] \dots\dots\dots (28)$$

となる。しかるに著者の公式 (24) において

$$\begin{aligned} \int_{r_1}^r \frac{y}{r} dF &= \int_{r_1}^r \frac{y}{r_0} \frac{r_0}{r} dF = \int_{r_1}^r \frac{y}{r_0} \frac{1}{r_0-y} b dr \\ &= \int_{r_1}^r y \left( \frac{1}{r_0} + \frac{y}{r_0^2} + \frac{y^2}{r_0^3} + \dots \right) b dr \\ &= \frac{1}{r_0} \int_{y_1}^{y_0} y b dy + \frac{1}{r_0^2} \int_{y_1}^{y_0} y^2 b dy \end{aligned}$$

故に (24) 式は次の如く (27) 式と等しくなる。即ち

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{M}{bJ_0} \frac{r_0}{r} \int_{r_1}^r \frac{y}{r} dF = \frac{M}{brJ_0} \left[ \int_{y_1}^{y_0} b y dy \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r_0} \int_{y_1}^{y_0} b y^2 dy \right] \end{aligned}$$

故に著者の公式 (24) と Grüning: *Die Statik* にある公式 (27) とは相等しいものである。Grüning の公式では重心軸に関する常数  $Z$  と中立軸の曲率半径  $r_0$  とを用いているため、著者の公式の如く中立軸に関する常数のみを用いたものより少し煩雑である。

5. 結 び

通例曲梁に対する剪断応力度が材料力学や弾性工学の書に余り取上げられていないのは蓋し棒状体の曲部材では設計計算に問題にならないし、アーチの場合も普通は曲率小なる曲梁として近似的に直梁の剪断応力度公式  $\tau = \frac{QS}{bI}$  で間に合っているからであろう。しかし鉸桁断面より成る曲率大なる曲梁部材に対しては突縁と腹との連結鉸の計算に半径方向の垂直応力度  $\sigma_r$  と共に是非必要であり、それらの鉸結計算への応用については次回に述べることにしよう。

著者はかねて曲梁に対する応力度公式について研究してきたが、平面問題としての場合をのぞき、任意の断面をなす曲梁に対して横断面の垂直応力度  $\sigma$ , 剪断応力度  $\tau$  及び半径方向の垂直応力度  $\sigma_r$  の公式を三つ完全に揃えて示したのを見ないように思う。剪断応力度公式も上述の如くあるにはあるが表現がやや親しみのうすい形になつてゐる。また半径方向の応力度公式もモーメントの影響のみを考えた近似式のみである。著者は新断面常数  $J = r \int y^2 \frac{dF}{r}$  を導入することによつて、これら三つの応力度に対し完結したきれいな形の公式を得た。即ち

$$\text{横断面の垂直応力度: } \sigma = \frac{N}{F} + \frac{My}{J}$$

$$\text{剪断応力度: } \tau = \frac{QS}{bJ_0}$$

$$\text{半径方向の垂直応力度: } \sigma_r = \frac{M\bar{S}}{bJ_0} + \frac{N\bar{S}}{bF} - \frac{N\bar{S}_0}{bJ_0}$$

而して終戦以来暫く外国文献と対照することができなかつたが旧臘入手した雑誌 *Applied Mechanics*<sup>17)</sup> に Anderson 氏の曲梁に関する paper を読む機会を得、著者の研究が些かプラスの仕事であることを知つた。即ち著者が鉸結鉸桁断面の曲梁の設計計算を目的としたのに反し同氏は突縁の有効巾の研究を主眼としているがために剪断応力度や半径方向の垂直応力度公式についてはつき進んだ陳述はしていない。有効巾については Bleich 氏の研究<sup>18)</sup>より更に進んだ研究をのべているが半径方向の応力度公式としてはモーメントの影響のみを考慮した式を用い、その結論において垂直力の影響をも考慮した式は今後の研究にまつことにし、剪断応力度についてはふれていない。

垂直応力度  $\sigma$  の公式及びその誘導については (今は多少記号は改めたが) 学会誌第 29 巻第 4 号及び第 10

号<sup>10)</sup>に発表したものであるが、従来の $\sigma$ の公式<sup>20)</sup>と比べれば簡潔であり著者の導入せる断面常数  $J$  が普通の慣性モーメントを少しだけ修正したもので無理のない自然な常数と考へうるであらう。 $\tau$  の公式における常数  $S$  についても同様のことが言える。

I 形断面をなす曲梁の垂直応力度  $\sigma = \frac{N}{F} + \frac{My}{J}$  を算出する際  $J$  の値は上述の Bleich 氏又は Anderson 氏の研究に従い突縁鈎の有効巾をとつて計算される。剪断応力度及び半径方向の応力度公式の鈎桁断面の曲梁における突縁と腹との鈎計算に対する応用は筆を新たにして述べよう。

本論文は文部省科学研究費による研究の一部であつてここに深甚の謝意を表する。

註

- 1) 昭和 26 年 10 月 21 日広島大学における土木学会中国四国支部学術講演会において講演
- 2) 例えば Timoshenko: Theory of elasticity (井坂氏外 2 氏共訳: ティモシェンコ: 弾性体の力学, 47~56 頁)
- 3) Bach und Baumann: Elastizität und Festigkeit, 9. Auf 1., 510 頁
- 4) 工博, 中原益治郎: 弾性工学, 昭. 24. 206~210 頁, 朝倉書店発行
- 5) 同上, または上掲 3) Bach u. Baumann, 507 頁 8) 式及び 5) 式
- 6) Martin Grüning: Die Statik des ebenen Tragwerkes, 1925, 159 頁
- 7) Anderson: Flexural Stress in Curved Beam of I-and Box-section, Applied Mechanics, Proceedings. 1950, Vol. 163 (The Institution of Mechanical Engineers, London)  
normal stress  $\hat{\theta}\theta = \frac{M(R_n - r)}{Ar(Rc - R_n)}$  (Winkler 氏) は Timoshenko: Strength of Material の著書にある式  $\sigma_x = \frac{My}{Ae(r-y)}$  に等しく著者の

式  $\sigma = \frac{My}{J}$  に対応する

- 8)  $\hat{r}r = \frac{1}{S'r'} \int_a^{r'} S \cdot \hat{\theta}\theta dr$  (Winslow & Edmonds, 1921). この式は著者が土木学会誌第 29 巻第 4 号に  $\sigma_r = \tau \delta \sigma / r$  として示したものと同じであるがその誘導に当り著者は  $\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} = 0$  を用いたのが変つている。本論文では (25) 及び (26) 式として表わされる。
- 9) 著者: 曲梁における垂直応力度, 土木学会誌, 第 29 巻第 10 号, 733 頁 (3) 式, 但し  $J_0$  を現在は  $J = r \int y^2 \frac{dF}{r}$  にて表わし, かつ本論文では  $J_0 = r_0 \int y^2 \frac{dF}{r}$  としている。土木学会誌第 36 巻第 12 号, 557~559 頁。 $\sigma$  公式の誘導は土木学会誌, 第 29 巻第 4 号, 294 頁
- 10) 前掲 4) 中原, 205 頁
- 11) 前掲 9) 参照
- 12) 例えば坂井英太郎: 微分積分学, 上, 154 頁参照
- 13) 前掲 3) Bach u. Baumann, 510 頁, (11) 式
- 14) 同上, (種々の断面形に対する  $\kappa$  の値は同書, 510~516 頁参照)
- 15) 上掲 7) 及び 8)
- 16) 前掲 6) Grüning 159 頁
- 17) 前掲 7)
- 18) Bleich, H.: Spannungsverteilung in den Gurtungen gekrümmtter Stäbe mit T und I foermigen Querschnitt, Starhlabau, 1933.
- 19) 土木学会誌 第 29 巻第 10 号, 733 頁, (3) 式の  $J_0$  は本論文の  $J$  に相当する
- 20) 例えば小野鑑正: 材料力学第 4 版 Ⅷ 曲線軸の棒。山口 昇: 応用力学, 第 5 章, 曲つた梁。野口尙一: 応用弾性学, 第 4 章, 曲梁, 清水篤磨: 材料力学, 第 13 章, 曲り梁, 従来の公式は著者の公式にならい  $\sigma = \frac{n}{F} + \frac{Mv}{Z}$ ,  $Z = r \int y^2 \frac{dF}{r}$  なる形にすれば便利である (昭. 27. 2. 18)

日本学術会議は、1952 年 4 月 24 日、その第 12 回総会において下記のとりの声明を行いました。  
本会議は、全国の科学者各位がこの声明に同感せられ、これを支持して下さることを期待しております。

声 明

1952. 4. 24

日本学術会議第12回総会

日本学術会議の会員選挙は世界に類例を見ないものであり、これの円満な運営は科学者の高度の道徳心の上に立つてのみ可能であり、単に法律を以て律し得るものではない。全国の科学者はこの点に深く思いをいたし、選挙にあつては科学者としての良心に恥じないよう行動せられることを期待する。

右、声明する。

日本学術会議会長  
亀山直人