

弾性基礎にある梁に関する2,3の解法について^{註-1)}

准員 後 藤 尚 男*

准員 三 輪 利 英**

SOME SOLUTIONS OF THE BEAMS ON ELASTIC FOUNDATION

(JSCE Nov. 1951)

Hisao Goto C. E. Assoc. Member, Toshihide Miwa C.E. Assoc. Member.

Synopsis In this paper as a part of studies on the beams on elastic foundation, the statical general solutions are described. Hitherto proposed solutions were carried out for the specific load conditions of the beams. Expanding these respective solutions to the most general cases, the authors performed the theoretical calculations on railway tie and culvert. Then the practicability of these solutions are compared with and discussed.

要旨 本文は弾性基礎にある梁に関する研究の一部として、静力学的な一般解法について述べたものである。従来は対象物の特定な荷重状態に応じて、それぞれ個々の解法が行われてきた。本文ではこれら個々の解法を一般的な場合に拡張するとともにこれらを総合して、特に枕木及び暗きよを実例にとつて理論的に計算を進め、各解法の実用性を比較検討した。

1. 概説

レール、枕木、暗きよ、地下道、ロックその他土木構造物の基礎版等に対しては従来から弾性基礎にある梁として種々の解法が行われている。いまこれら従来からの解法を拡張し、更に筆者等が考究した結果をも総合すると結局次のような解法を列挙することができる。^{註-2)}

1. 基礎微分方程式を解き境界条件及び接続条件によつて積分常数を決定する方法。
2. 荷重を Fourier 級数で表わして基礎微分方程式を解き、境界条件によつて積分常数を決定する方法。
3. 撓み曲線を正規関数で表わして未定係数を決定する方法。
4. 撓み振動の強制項から静的撓みを計算する方法。
5. 単純梁を級数で解き、これに支点反力の影響を合成する方法。

まずこれらの解法の概略と特に筆者等が一般的な場合に拡張考究した点について順次述べよう。

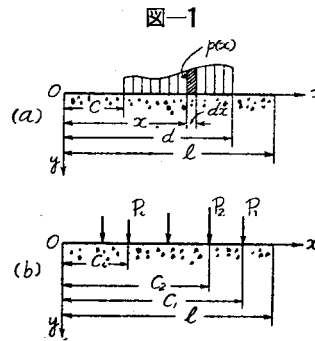


図-1 のように曲げ刚性 EI 、基礎係数 K が一定で、その梁幅が b である梁が、荷重 $p(x)$ をうける場合の基礎微分方程式は、よく知られている通り次式で表わされる。

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + bKy = bp(x) \quad \dots\dots\dots(1)$$

(1) 解法-1 では式(1)を解いて4個の積分常数を梁両端の境界条件から決定する²⁾。また $p(x)$ が不連続、集中荷重 P が作用、または EI, K がある区間毎に変化する場合はそのつど接続点における接続条件から決定する³⁾。しかし K. Hayashi 博士及び三沢氏は $p(x) = p_1x + p_0$ 及び $p(x) = p_0$ について述べているが、式(1)の特解 y_p が

$$y_p = \frac{cp(x)}{f(D)}, \text{ ただし } D = \frac{d}{dx}, c: \text{ 常数} \dots\dots(2)$$

として求まりさえすればそのような $p(x)$ の作用する場合に対しても 解法-1 が一般に拡張されて適用できる。

(2) 解法-2 ではまず荷重 $p(x)$ を Fourier 級数に展開する。A. Nádai は等間隔等分布及び集中荷重を⁴⁾、岩塚氏は満載等分布、等変荷重及び単一集中荷重を展開しているが⁵⁾、これらを拡張して図-1 のような一般的な場合を展開すると次のようになる。

* 京都大学講師 ** 同助手 とともに工学部土木工学教室勤務

註-1) 第3回関西西工学連合講演会(昭.25.10.14)において講演

註-2) これら 1,2,.....,5 の解法を今後簡単のため、それぞれ解法 1,2,.....,5 とかく

$$p(x) = \left. \begin{aligned} & \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{l} \int_c^d p(\lambda) \sin \frac{n\pi \lambda}{l} d\lambda \\ & P_i(c_i, x) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} P_i \sin \frac{n\pi c_i}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \end{aligned} \right\} \text{註-3)} \quad (3)$$

そこで式(3)を式(1)の右辺に代入し、 B_n を未定係数として特解 y_p を

$$y_p = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

より求める。また一般解 y_c は解法-1で与えられるから結局解は

$$y = y_c + y_p \quad \dots\dots\dots(4)$$

となる。 y_c 中に含まれる4個の積分常数は梁両端の境界条件のみから決定する。

(3) 解法-3は S. Timoshenko, 岩塚両氏が基礎にない両端単純支持梁について取り扱ったが⁶⁾, 基礎にある材端単純支持, 自由, 固定の境界条件を有する一般の場合に筆者等が拡張した方法である。すなわちこのときは正規函数 $u_n(x)$ と未定係数 a_n とを用いて撓み曲線 y を次のように展開する。

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x) \quad \dots\dots\dots(5)$$

位置のエネルギー V は,

$$V = \frac{EI}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{bK}{2} \int_0^l y^2 dx$$

これに式(5)を代入して正規函数の直交性を考慮する。いま a_n の増分 δa_n による V の増分 δV を考えると,

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial a_n} \delta a_n = a_n \alpha_n^2 (EI \frac{m_n^4}{l^4} + bK) \delta a_n \quad \dots\dots\dots(6)$$

こゝに, $\alpha_n^2 = \int_0^l u_n^2(x) dx$ で, α_n^2, m_n は梁の材端条件から決定される値である⁷⁾。このとき図-1の荷重がなす仕事はそれぞれ,

$$\delta a_n \int_c^d p(\lambda) u_n(\lambda) d\lambda, \delta a_n \sum_{i=1}^s P_i u_n(c_i) \quad \dots\dots\dots(7)$$

こゝに λ は x に対する積分変数であり, $u_n(c_i)$ は $u_n(x)$ において $x=c_i$ とおいた値である。式(6),(7)が相等しいことより a_n が決定され, この a_n を式(5)に入れることにより撓み y が次式で与えられる。

$$y = \left. \begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x) \int_c^d p(\lambda) u_n(\lambda) d\lambda}{\alpha_n^2 \left(\frac{EI m_n^4}{l^4} + bK \right)} \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^s \frac{P_i u_n(c_i) u_n(x)}{\alpha_n^2 \left(\frac{EI m_n^4}{l^4} + bK \right)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(8)$$

註-3) $p(x)$ 右辺の定積分の上, 下限は一般には $l, 0$ であるが図-1(a)にみる通り, $0-c$ 及び $d-l$ 間には荷重がないので上, 下限は d, c となる。

(4) 解法-4 については, たとえば S. Timoshenko が単一集中荷重が両端単純支持梁に作用する場合を述べているが⁸⁾, 筆者は更に一般的な材端条件, 荷重分布に対して詳細な撓み振動の理論解を得た⁹⁾。これより集中及び分布荷重が

$$P_i \sin(\omega_i t + \varphi_i), \int_c^d p(\lambda) d\lambda \sin(\omega t + \varphi)$$

という固定週期力として作用する場合の解において¹⁰⁾ 撓乱力による強制振動の項を考え,

$$\omega \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0, \int_c^d p(\lambda) u_n(\lambda) d\lambda \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\rightarrow \int_c^d p(\lambda) u_n(\lambda) d\lambda, P_i \sin(\omega_i t + \varphi_i) \rightarrow P_i$$

とおくことにより静的撓みが次のように求められる。

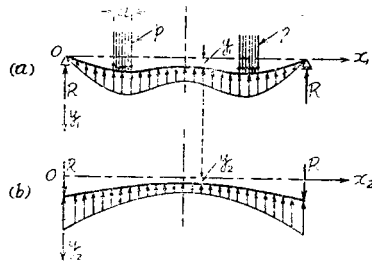
$$y = \frac{1}{\rho a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x) \int_c^d p(\lambda) u_n(\lambda) d\lambda}{\alpha_n^2 m_n^2} \quad \dots\dots\dots(9)$$

$$y = \frac{1}{\rho a} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^s \frac{P_i u_n(c_i) u_n(x)}{\alpha_n^2 m_n^2}$$

こゝに $m_n^2 = (EI m_n^4 / l^4 + bK) / \rho a$, n_n : 円振動数, ρa : 梁単位長当りの質量, $\alpha_n^2, m_n, u_n(c_i)$ は前記の値である。

(5) 解法-5 は解法-2, 3, 4 において単純梁すなわち両端単純支持梁のときは解が簡単となり, しかも級数の収斂が良好であることを利用したものである。事実解法-2, 3, 4 において単純梁の境界条件を入れると解がいずれも式(4)の特解 y_p のみとなる。ところが基礎にある梁は通常両端自由であるので, 図-2(a)に

図-2



示すように両端自由梁をまず単純支持梁として y_1 を級数で解き, 次に図-2(b)のように解法-1で単純支持梁の支点反力 R を外力として y_2 を算出する。これより両端自由梁の撓みは

$$y = y_1 + y_2 \quad \dots\dots\dots(10)$$

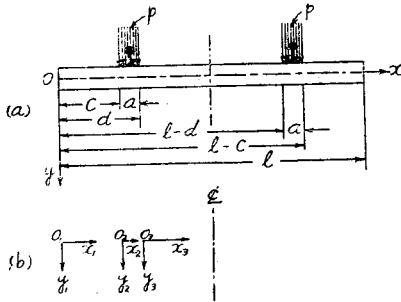
として与えられる。この解法については岡本教授も実用的な計算法を示されている¹¹⁾。

2. 枕木に対する計算

枕木の計算は既に十分に行われ計算図表が作成されているが, そのいずれもがガレール圧力を集中荷重と考

えて 解法-1 によつて計算している。しかしながら 図-3 (a) に示すようにレール圧力はレール底ないし

図-3



イプレートの幅に分布するはずである。その分布の形は不詳であるがこゝでは等分布荷重 p として取扱*

$$y = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} T_n F_n(x), \quad \text{こゝに } T_n: \text{式(12),}$$

$$F_n(x) = \frac{1}{EI \left(\frac{n\pi}{l}\right)^4 + bK} \left\{ \left(\frac{n\pi}{l}\right)^3 \frac{\cosh \beta x \cos \beta(l-x) + \cosh \beta(l-x) \cos \beta x}{2(\sin \beta l + \sinh \beta l)} + \sin \frac{n\pi x}{l} \right\}, \quad \dots\dots(13)$$

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{bK}{4EI}}$$

(3) 解法-3,4. 式(8),(9)で $p(x)$ が 図-3(a) の荷重を表わし、かつ両端自由であることを考慮して計算を進めると、

$$y = \frac{bp}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x) \left\{ \int_c^a u_n(\lambda) d\lambda + \int_{l-a}^{l-c} u_n(\lambda) d\lambda \right\}}{\left\{ EI \left(\frac{m_n}{l}\right)^4 + bK \right\} (\sin m_n \sinh m_n)^2} \quad \dots\dots(14)$$

となる。 m_n は $\cos m_n \cosh m_n = 1$ を満足する値である。

(4) 解法-5. 図-3(a) の枕木を 図-2 のように取り扱う。単純梁としての沈下 y_1 は 図(a) より、

$$y_1 = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{T_n}{EI \left(\frac{n\pi}{l}\right)^4 + bK} \sin \frac{n\pi x_1}{l} \quad \dots\dots(15)_1$$

となり、支点反力 R 及び R による沈下 y_2 は 図(b) より

$$\left. \begin{aligned} R &= bpa - bK \int_0^{l/2} y_1 dx_1 \\ y_2 &= \frac{2R}{bKm(\sin \beta l + \sinh \beta l)} \left\{ \cosh \beta x_2 \right. \\ &\quad \left. \times \cos(l-x_2) + \cosh \beta(l-x_2) \cos \beta x_2 \right\} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(15)_2$$

従つて枕木の沈下 y は両者の和で与えられる。

$$y = y_1 + y_2 \quad \dots\dots(15)_3$$

註-4) 等分布でなくても式(2)の特解, 式(3), (7), (9) の定積分が計算可能な $p(x)$ であればよい。

*5. 註-4)

(1) 解法-1, 図-3 (b) のように座標を選ぶと

$$y_1 = y_{c,1}, \quad y_2 = y_{c,2} + \frac{bp}{K}, \quad y_3 = y_{c,3} \quad \dots\dots(11)$$

式(11)の $y_{c,1}, y_{c,2}, y_{c,3}$ に含まれる合計 12 個の積分常数を o_1 及び中点の 4 個の境界条件と、 o_2, o_3 点における 8 個の接続条件とから決定する。

(2) 解法-2, 図-3(a) の分布荷重は式(3)の $p(x)$ を計算して、

$$p(x) = \frac{4bp}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\cos \frac{n\pi c}{l} - \cos \frac{n\pi d}{l} \right) \times \sin \frac{n\pi x}{l} = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} T_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad \dots\dots(12)$$

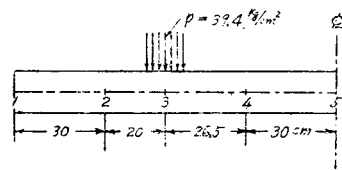
これより特解 y_p を求め式(4)において両端自由であることから積分常数を決定すると、結局枕木の沈下 y が次式のように計算される。

(5) 数値計算例 国鉄並枕木について計算した。計算に用いた値は次の各値である (記号は 図-3(a) 参照)。

$l=213 \text{ cm}, a=12.7 \text{ cm} (50 \text{ kg レール}) \quad c=43.3 \text{ cm}, d=56 \text{ cm},$ 枕木幅 $b=20 \text{ cm}, EI=457.33 \times 10^6 \text{ kgcm}^2,$ レール圧力 $pab=10 \times 10^3 \text{ kg}, K=10 \text{ kg/cm}^3.$

図-4 に示す各点について計算した y の値は表-1

図-4



に示す通りである。また曲げモーメント $M = -EIy''$ を計算すると表-2 をうる。なおレール圧力を集中荷重と考えた場合の計算結果を表-1,2 の *印の欄に記入した。

表-1 沈下 y の計算値 (cm)
Calculated values of deflection y (cm)

解法	式	1	2	3	4	1	備考
1	(11)	0.3634	0.4763	0.5157	0.4853	0.4465	
2	(13)	0.4852	0.5363	0.5403	0.4853	0.4314	$n=1,3,5$
5	(15)	0.3628	0.4796	0.5160	0.4882	0.4442	$n=1,3,5$
1		0.3539	0.4759	0.5215	0.4878	0.4503	* (集中荷重)

表-2 曲げモーメントMの計算値 (kg-m)
Calculated values of bending moment M (kg-m)

解法	式	1	2	3	4	5	備考
1	(11)'	0	362.30	891.98	-33.67	-453.01	
2	(13)'	0	282.33	763.22	-160.25	-533.79	n=1.3... 11
1		0	356.44	1054.62	-1.84	-448.27	*(集中荷重)

注: (11)', (13)'式は (11), (13) 式より $M = -EIy''$ として計算した式である。

3. 暗きよに対する計算

暗きよ鉛直上の土が直接載荷しているとして取り扱う。

(1) 解法-1 図-5 の場合は 5 区間で 5 個の方程式, したがって 20 個の積分常数を決定しなければならない。たとえば三沢氏のようにかなり複雑な計算をしなければならない¹²⁾。

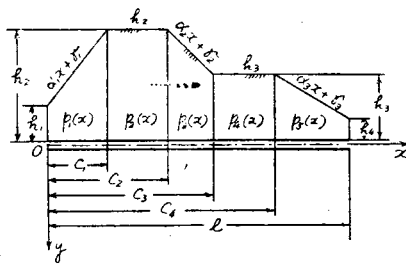
(2) 解法-2 図-5 の荷重を Fourier 級数に展開して, 両端自由であることを考慮すると(13)式に相当して次式をうる。

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} C_n F_n(x), \quad F_n(x): \text{式(13)},$$

$$C_n = \frac{2bw}{n\pi} \left[h_1 + \frac{l}{n\pi} \left\{ \alpha_1 \sin \frac{n\pi c_1}{l} + \alpha_2 \left(\sin \frac{n\pi c_2}{l} - \sin \frac{n\pi c_3}{l} \right) + \alpha_3 \frac{n\pi c_4}{l} \right\} - (-1)^n h_4 \right] \quad \left. \begin{array}{l} \text{註-5} \\ \text{(16)} \end{array} \right\}$$

(3) 解法-3.4. 図-5 において枕木と同様の取り扱いをすると,

図-5



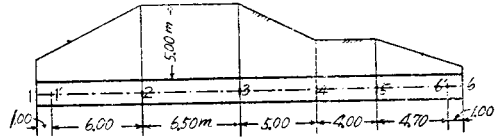
$$y = \frac{b}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x) \int_0^l p(\lambda) u_n(\lambda) d\lambda}{\left\{ EI \left(\frac{m_n}{l} \right)^4 + bK \right\} (\sin m_n \sinh m_n)^2} \dots \dots \dots (17)$$

なお (1) (2) (3) で暗きよの自重を考えると土に換算して加算する。こゝでは載荷重は一般的な場

註-5) w: 土の単位体積の重量であるから, 図-5 においてたとえば $p_2(x) = wh_2$ となる。

合を取り扱ったが, 特別の場合として簡単に梯形対称荷重の場合には式(16)は原口, 米田両氏の式と一致し¹³⁾, 解法-5 の取り扱いをすると田中博士の結果となる¹⁴⁾。

図-6



(4) 数値計算例 三沢氏の計算された暗きよ¹⁵⁾について計算した。計算に用いた値は次の各値である(記号は図-5 参照)。

$$l = 28.2 \text{ m}, \quad c_1, c_2, c_3, c_4 = 7.0, 13.5, 18.5, 22.5 \text{ m},$$

$$EI = 924 \times 10^{10} \text{ kg cm}^2, \quad w = 1.6 \text{ t/m}^3, \quad h_1, h_2, h_3, h_4 = 1.5, 5.0, 2.5, 0.6 \text{ m}.$$

三沢氏の計算された図-6 の各点について解法-2 で計算した結果は表-3 に示す通りである。

表-3 沈下 y の計算値 (cm)

Calculated values of deflection y (cm)

解法	式	1	1'	2	3	4	5	6'	6	備考
1		0.4452	0.4824	0.6742	0.6800	0.5295	0.3734	0.1924	0.1530	(三沢氏)
2	(16)	0.3629	0.4224	0.6520	0.6680	0.5425	0.4367	0.3816	0.3629	r=1.2.3.
2	(16)	0.3546	0.4392	0.6535	0.6669	0.5573	0.4420	0.3993	0.3546	r=1.2...6

4. 各解法の比較検討

以上の各解法を比較検討すると次のようになる。

1. 解法-1 では積分常数を決定するのにかなりの労力を要するが, 解の収斂を心配する必要はない。
2. 解法-2 では荷重が1つの式で表わされ, 特に対称荷重の場合 y の収斂は急速であるが¹⁶⁾, M の収斂は緩慢である¹⁷⁾。
3. 解法-3.4 は同質のもので正規函数自身が境界条件を満足して好都合であるが, 単純支持梁以外の場合は実用的な計算法ではない。
4. 解法-5 は解法-1 及び 2 を組み合わせた考え方で対称荷重のときは収斂が特に急速であり¹⁸⁾, M の収斂も解法-2 より良好となる。
5. 枕木の数値計算(表-1,2) では解法-5 が最も能率的で 解法-2 がこれにつき, 解法-1 はかなりの労力を要し, 更に 解法-3.4 は実用的でないことがわかった。
6. 枕木の計算は是非共分布荷重と考へべきで y, M の最大値はほとんどレール位置中心に起ると考へてよく, この場合従来の 解法-1 に比べ, こゝで計算した 解法-2 ないし 4 が非常に能率的となる。

7. 暗きよの数値計算(表-3)では三沢氏の行われた解法-1に比べ本文で取り扱った解法-2が遙かに能率的である。解法-3, 4では非対称荷重のため取り扱いが複雑であり、解法-5でもかなり煩雑となった。

8. 枕木、暗きよ等では、 M の外剪断力 S の計算も必要であるが、級数による解法-2,3,4,5では M, S の収斂が緩慢である。したがって M, S に関しては図解法¹⁰⁾、単純梁理論²⁰⁾等による解法が試みられ、筆者等も実用的な方法を考究中である。

9. なお本文で取り扱った解法-1, ..., 5の外特殊な解法としては、基礎にある両端自由梁に集中荷重が作用するときに対し影響線を用いたH. Bleichの解法²¹⁾等がある。また基礎にない場合は単純梁に対しW. Ritzの近似解法²²⁾、両端固定梁に梯形荷重の作用するときに対するD. Geerの解法²³⁾等があるが、これらを基礎にある梁の場合に拡張することも筆者等は研究している。

以上の各計算法は前記の他の土木構造物に対してもそのまま適用でき、本文で $K=0$ とおくと基礎にない梁一般に対する計算法となることはいうまでもない。

参考文献その他

- (1) EI, K が一定でない非線型の問題となる。これについても筆者等は研究しているが、K. Hayashi(参考文献(2))に若干の例題が取り扱われており、 K の一定でない場合は鬼頭史城(応用力学、第2巻、第8号、pp 15~17、昭.24.3.、笠原英司(応用力学第26回講演会、昭.24.12.4.)両氏等が取り扱っている。
- (2) たとえば、K. Hayashi, Theory des Trägers auf elastischer Unterlage, 1921.
- (3) 三沢浩、弾性床上の梁、土木学会誌、第28巻、第1号、pp 68~76、昭.17.1.、及び同氏、弾性基礎計算論、土木技術、第4巻、第5号、pp 38~45、昭.18.5.及び第4巻、第6号、pp 33~37、昭.18.6.

- (4) A. Nádai, Elastische Platten, s 83~85, 1925.
- (5) 岩塚良三、級数による橋の近似解法(1)、土木科学、第1巻、第2号、p. 29、昭.19.6.
- (6) S. Timoshenko 原著、工業振動学、pp 156~159. 及び上掲文献(5) p. 28.
- (7) Lord Rayleigh, Theory of Sand, Vol. 1, pp 262~267 及び pp 274~279, 1926.
- (8) 上掲文献(6) p. 294.
- (9) 後藤尚男、弾性基礎にある梁の橋み振動に関する基礎的研究、土木学会誌、第35巻、第4号、pp 29~31、昭.25.4.、詳しくは土木学会論文集第6号に登載。
- (10) 上掲文献(9) 土木学会論文集登載文、式(11)、(集中荷重)第1項をさす。
- (11) 岡本舜三、弾性基礎上の梁の簡易計算法、土木技術、第4巻、第12号、pp 1~4、昭.24.12.
- (12) 上掲文献(3)、土木学会誌、pp 72~74.
- (13) 原口忠次郎、光田正文、土と杭の工学、pp 273~278.
- (14) 田中豊、函きよの沈下に関する1解法、業務研究資料、第18巻、第24号、昭.5.7.
- (15) 上掲文献(2)、土木学会誌、第28巻、第1号、p. 72. 下から7,8行目において $I=44 \times 10^6 \text{cm}^4$ は $I=88 \times 10^6 \text{cm}^4$ の誤りであるが、p. 74の表-5から本文の表-3(解法-1)を算出したので、逆に $I=44 \times 10^6 \text{cm}^4$ となるような断面を決めて解法-2の計算を行つた。
- (16) 原口、米田両氏は暗きよの計算で実用上第1項のみをとつている(上掲文献(13) p. 278).
- (17) たとえば本文表-2.
- (18) 田中博士は函きよの計算で実用上第1項のみをとつている(上掲文献(14) pp 4~5).
- (19) たとえば上掲文献(14) p. 9.
- (20) たとえば上掲文献(11) pp 2~4.
- (21) 土木学会誌、第24巻、第1号、pp 77~79、昭.13.1.に抄録。
- (22) 上掲文献(5) p. 30に紹介。
- (23) Elihn Geer, Solution Presented for Trapezoidal Loading on Beams, Civil Engineering, p. 43, July 1949.

(昭.26.4.12)

新刊紹介

弾性安定要覽

コロナ社 1300円

日本學術研究会議の中に設けられている長柱研究特別委員会(委員長 湯浅龍一)が取纏めたものである。極めて複雑な性質を有する弾性不安定問題に関する研究の全般を明快な形に整理し設計に即した一覧表の形で示し更に之に一般的解説を附したものである。

弾性安定問題は実際の構造物設計で特に安定な位置

を占めているが、これを厳密にとくには多大の日数と努力を必要とすることも稀ではない。そのために屢々いい加減な処理に委されている状態であるが、この書物は恐らくそのような場合に際して大いに役立つことと思われる。技術者、学者及び研究者にとり助手の役をつとめ又辞書として働くことが期待される。

海外に於ても絶無と思われるこの様な本が出版されたことは喜ばしいことである。猶この刊行に対しては文部省より研究成果刊行援助費が補助されている。

(平井 敦)