

揚 圧 力 に 関 す る 研 究

准 員 丹 羽 義 次*

STUDIES ON UPLIFT PRESSURE.

(JSCE Sept. 1951)

Yoshiji Niwa, C.E. Assoc. Member.

Synopsis The author developed some theoretical analysis about the uplift pressure acted along dam base, and made clear upon the effects of inclined impervious stratum, grout curtain, depressed base and drain by means of electric analogy.

要旨 堰堤の堤底に作用する揚圧力に関する2,3の理論的解析を行い、電気的相似実験によつて不透水性地層の影響、グラウト壁、掘込み基礎及び排水孔の効果を明らかにしたものである。

1. 緒 言

堤底に作用する揚圧力が堤体の安定に悪影響を及ぼすことは周知のところである。それゆえこれに作用する揚圧力を適確に究明してその設計の合理化を計らねばならず、既に幾多の理論的計算、模型実験、実測が行われてきた。しかしながら揚圧力の有効作用面積、堤体内揚圧力の大きさ等その本質についてはいまだ決定的な結論が得られていないようであり、今後の更に詳細な研究にまたねばならない。

従来堰堤の設計に際して揚圧力が3角形分布をなすと仮定した“揚圧力係数”が採用せられてきたのであるが、境界条件例えば排水孔の位置大きさ等を考慮していないようであり、果してこれが妥当であるか否かは甚だ疑わしい。それゆえに本研究においては一応揚圧力が堤底にのみ作用し、その全面積にわたつて作用するものと仮定して若干の理論的計算を行い、更に基礎の構成状態、堤体の構造によつて変化する揚圧力の分布を実験的に明らかにして、合理的な揚圧係数の決定に努めた。

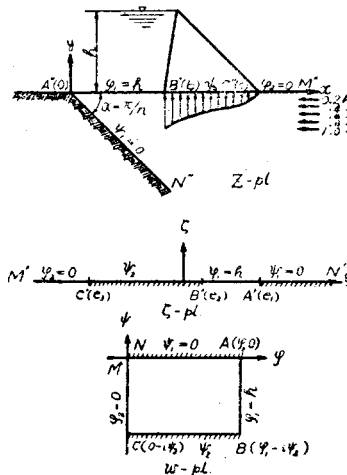
2. 理論的考察

堰堤基礎が均一な透水係数を有する場合については既に多数の研究者が数学的解析を行つている。いずれもZ平面上の堰堤基礎図形をζあるいはξ'平面を介してw平面に写像して、堤底に作用する揚圧力を求めている。こゝでも同様の方法により Schwartz-Christoffel の写像を行い、これに Darcy の法則を適用して2,3の数値計算を行つた。

(1) 不透水性傾斜地層が存在する場合 図-1 の

如く完全不透水性地層が地表面とある傾斜をなして存在する場合、堤底に作用する揚圧力は次のように計算することができる。

図-1



Z, ζ 及び w 平面の対応関係を図の如く定めればZ平面と w 平面との関係は、

$$\zeta = P(w) \dots \dots \dots (1)$$

$$\text{ただし } e_1 + e_2 + e_3 = 0 \dots \dots \dots (2)$$

で与えられ、又 ζ 平面と Z 平面との関係は Schwartz-Christoffel の写像定理、境界条件及び(2)式より、

$$\left. \begin{aligned} e_2 &= \frac{\left(\frac{c}{b}\right)^n - 2}{\left(\frac{c}{b}\right)^n + 1} e_1 \\ e_3 &= \frac{1 - 2\left(\frac{c}{b}\right)^n}{\left(\frac{c}{b}\right)^n + 1} e_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

となり、したがつて、

* 京都大学工学部講師，土木工学教室勤務

1) 佐々木達次郎“等角写像の応用”
P は Weierstrass の楕円函数を表わす。以下同じ

$$\zeta = -\frac{3e_1}{b^n + c^n} z^n + e_1 \dots\dots\dots(4)$$

となる。(1)式と(4)式より ζ を消去すれば z 平面と w 平面の関係が得られる。すなわち(1), (4)式の右辺を等置して、

$$\frac{3e_1}{b^n + c^n} = A, P(\varphi) = \Phi, P(\psi) = \Psi,$$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

とおき、実部虚部を分離すれば次の2つの等式が得られる。

$$r^n \cos n\theta = \frac{1}{A} \left\{ \frac{(\Phi\Psi + \frac{1}{4}g_2)(\Phi - \Psi) + \frac{g_3}{2}}{(\Phi + \Psi)^2} + e_1 \right\}$$

$$r^n \sin n\theta = -\frac{1}{2A} \frac{\sqrt{(4\Phi^3 - g_2\Phi - g_3)(4\Psi^3 - g_2\Psi - g_3)}}{(\Phi + \Psi)^2}$$

.....(5)

ここに、 $\frac{1}{4}g_2 = -(e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1), \frac{1}{4}g_3 = e_1e_2e_3$

したがって任意の φ, ψ に対して z 平面における座標 r, θ を計算することができる。すなわち実際計算にあたっては、

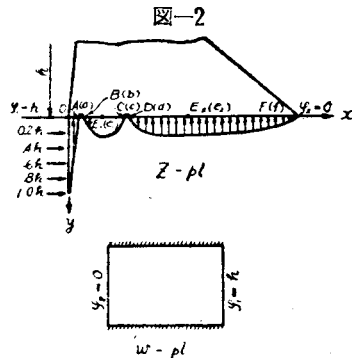
$$\sqrt{e_1 - e_3} w = u, \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = k^2 \dots\dots\dots(6)$$

とおけば、

$$\varphi_1 \sqrt{e_1 - e_3} = K, i\psi_2 \sqrt{e_1 - e_3} = iK' \dots\dots(7)$$

$$P(w) = \left(\frac{K}{\varphi_1}\right)^2 \left(-\frac{1}{\sin^2 u} - \frac{1+k^2}{3}\right) \dots\dots(8)$$

として $P(w)$ 関数を Jacobi の S_n 関数で表わすことができるから、先ず(3), (6)式より k の値を求め φ_1 のある値に対して(7)式より e_1 を決定すれば、(8)式によつて S_n 関数表を利用して $P(w)$ が求められるから、これを(5)式に代入してそのポテンシャルに対応する z 平面上の座標を定めることができる。図-1に



掲げた圧力分布は、 $b=100m, c=200m (b/c = \frac{1}{2}), n = \frac{1}{4}$ の場合の数値計算結果である。

(2) 排水孔が存在する場合 堤底に設置せられた排水孔の効果に関しては、Brathtz氏がGrand

Coulee 堰堤について理論的実験的考察を行つている²⁾。図-2の如く排水孔が2列に存在する場合 B, C 及び D, F 間に流れのない澁み点 E_1, E_2 ができる。このことに着目すれば w 平面と z 平面の関係は、Schwartz-Christoffel の写像によつて次のように表わすことができる。

$$\frac{dw}{dz} = -v + iu$$

$$= A \sqrt{\frac{(z-e_1)(z-e_2)}{z(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)(z-f)}} \dots\dots\dots(9)$$

ここに u, v は各々 x, y 軸方向の速度を表わす。上式を積分して w を求めることは甚だ煩雑であるから、任意点の圧力と速度の関係を表わす(ただし堤底に沿う) Darcy の法則、

$$p_{1-2} = -\frac{1}{K} \int_1^2 u dx \dots\dots\dots(10)$$

を適用してこれを数値積分するのが便利である。すなわち堤底に沿う水平方向の流速 u は(9)式において $y=0$ とおけば、

$$u = A \sqrt{\frac{x^2 - (e_1 + e_2)x + e_1e_2}{x(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-f)}}$$

$$= A \sqrt{\frac{x^2 - (e_1 + e_2)x + e_1e_2}{f(x)}} \dots\dots\dots(11)$$

で表わされる。この式において A, e_1, e_2 が未知数であるから、Darcy の法則によつてこれらの常数を決定すればよいわけである。 b, c 及び d, f において圧力は0であるから(10)式より次の2式、

$$\left. \begin{aligned} \int_c^b \frac{x^2}{\sqrt{f(x)}} dx - (e_1 + e_2) \int_c^b \frac{x}{\sqrt{f(x)}} dx \\ + e_1e_2 \int_c^b \frac{1}{\sqrt{f(x)}} dx = 0 \\ \int_f^d \frac{x^2}{\sqrt{f(x)}} dx - (e_1 + e_2) \int_f^d \frac{x}{\sqrt{f(x)}} dx \\ + e_1e_2 \int_f^d \frac{1}{\sqrt{f(x)}} dx = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(12)$$

が成立する。この式に含まれる各積分は図式的に計算することができるから結局、

$$\left. \begin{aligned} \alpha - (e_1 + e_2)\beta + e_1e_2\gamma = 0 \\ \alpha' - (e_1 + e_2)\beta' + e_1e_2\gamma' = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(13)$$

から e_1, e_2 を求めることができる。更に O, C 点の間で圧力は h から 0 まで変化するので同様に(10)式によつて、

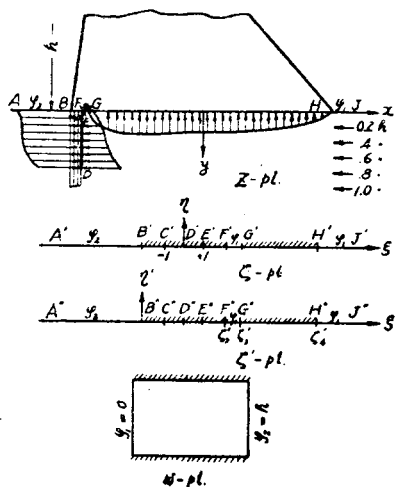
$$A \int_0^f \sqrt{\frac{(x-e_1)(x-e_2)}{f(x)}} dx = -hK \dots\dots(14)$$

²⁾ J.H.A.Brathtz: "Pressures due to percolating water and their influence upon stresses in hydraulic structures" Trans. Second Congress on Large Dams, Vol. V, 1936, p.43~71.

となり、 A を求めることができる。かくして A, e_1, e_2 が定まれば圧力の既知の点と任意点の間に(10)式を適用し、図式積分を遂行することによつて任意点の揚圧力の大きさを求めることができるわけである。図-2 は $a=4.5\text{m}$, $b=5.5\text{m}$, $c=24.5\text{m}$, $d=25.5\text{m}$, $f=100\text{m}$ の場合の揚圧力の計算結果である。

(3) グラウト壁及び排水孔が存在する場合 堰堤の建設に際しては基礎にグラウト工を施して止水壁となし、その下流側に排水孔を設けるのが普通である。このような場合各点の対応を図-3 のように定めれば、 ξ' 平面と z 平面の間には次式が成立する。

図-3



$$\xi' = \sqrt{\left(\frac{z-b}{d}\right)^2 + 1} + \sqrt{\left(\frac{-a-b}{d}\right)^2 + 1} \dots\dots\dots(15)$$

次に w 平面上の図形を ξ' 平面に写像すれば、

$$\frac{dw}{d\xi'} = -v' + iw' = \frac{(\xi' - s)}{A \sqrt{\xi'(\xi' - \xi_2')(\xi' - \xi_3')(\xi' - \xi_4')}} \dots\dots\dots(16)$$

となる。ここに s は澁み点の位置を表わすのであつて $\xi_3' < s < \xi_4'$ であり、 v', w' は ξ' 及び η' 軸方向の流速である。(2) と全く同様にして(16)式に Darcy の法則を適用して未知数 A 及び s を求めれば、 ξ' 平面上の各点の圧力分布が明らかとなり、したがつて、

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\xi'} \frac{d\xi'}{dz} \dots\dots\dots(17)$$

であるから容易に(15)式の関係から z 平面上の揚圧力が求められることとなる。図-3 の圧力分布は B(-70), C(-64), D(-64, 30), F(-63), G(-61), H(70) (単位 m) とした場合の計算結果である。なお F, G 間の鉛直方向流速から排水孔に流入する流量を

求めることができるのでこの場合、

$$Q = 0.853 \times 24.6K = 21K(\text{m}^2) \dots\dots\dots(18)$$

となる。ここに K は透透係数である。

以上の理論的計算によつて不透水性傾斜地層、グラウト壁、排水孔の揚圧力分布に及ぼす影響を明らかにすることができるわけであるが、上に掲げた場合のみならず z 平面の図形を ξ' 又は ξ'' 平面を介して w 平面上に写像し、Darcy の法則を適用して数値積分を行うならば、さらに種々の場合の揚圧力の分布状況を明らかにすることができる。しかしながらその計算は可成り煩雑であるため、著者は境界条件が種々変化する場合の揚圧力分布を実験的に求めてみた。次にその結果を掲げ若干の考察を行つてみよう。

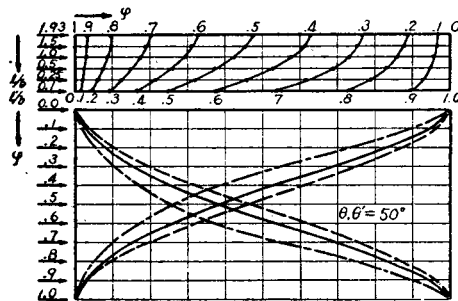
3. 実験的考察

さきに述べた電氣的計測法³⁾によつて種々の不透水性地層状態、堤体構造に対して堤底に作用する揚圧力を測定し、堤底全面に全水圧が作用した場合を 100% として各場合の総揚圧力の百分率を算出した。すなわちこの値を 2 倍すれば揚圧力が 3 角形分布をなすと仮定した場合の“揚圧係数”が得られるわけである。勿論揚圧力はいかなる場合にも 3 角形分布を示さないが設計々算を簡単化するためにいわゆる揚圧係数を適用するならば、地層状態、堤体構造を考慮してここに述べるようにしてその値を決定すれば、若干でも合理的であるように思われる。

(1) 不透水性傾斜地層の影響 図-5 に示すよう

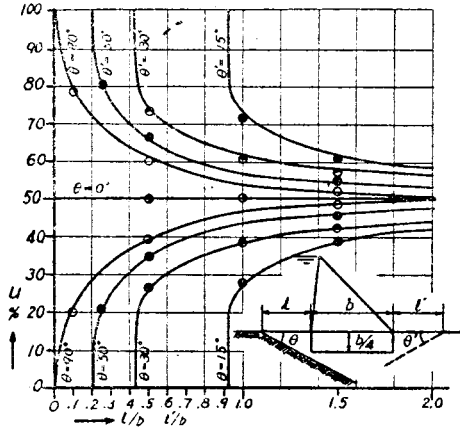
に不透水性地層が存在する場合、堤底に作用する揚圧力分布は図-4 のようになる。全水頭を 1 とし傾斜角 θ を一定 (50°) として不透水性地層の位置すなわち l/b を変化させて堤底各点のポテンシャル ϕ を求めた結果である。 l/b の値が小さい程等ポテンシャル点は上流に移動し、流入点付近で急速にポテンシャルを減少し、したがつて総揚圧力を減ずる傾向がある。圧力

図-4



3) 丹羽義次：“滲透水流の電氣的計測について”土木学会誌，昭 25，35 卷，7 号，18 頁。

図-5



分布曲線中破線, 実線, 鎖線は各々 l/b が 1.5, 0.5, 0.1 の場合を示す。逆に下流側に地層が露出している場合には l/b が小さくなる程総揚圧力を増大する。不透水性地層の位置と総揚圧力の百分率との関係を各傾斜角に対して図示すれば図-5 のようになる。ただし $\theta=0^\circ$ は地層が水平な場合を示すのであつて, l は地表よりの深さを表わす。図より明らかな如く地層が水平の場合にはその深さに無関係に揚圧力 u は 50% である。次に l/b 又は l'/b を一定としてその傾斜角 θ 又は θ' を変化せしめた場合の総揚圧力 u の変化は図-6 のようになり, いずれの場合にも θ 又は θ' の増大にしたがつて直線的に漸増又は漸減するようである。

(2) グラウト壁の影響 均一な滲透係数を有する基礎内にグラウト壁が設けられた場合は理論的にも解析せられているが¹⁾、図-7 の実線は $\frac{b}{4}$ の深さのグラウト壁の上流踵部よりの位置によつて変化する総揚圧力の大きさを表わす。破線は踵部に設けられたグラウト壁の深さ d と揚圧力の大きさとの関係を表わす

図-6

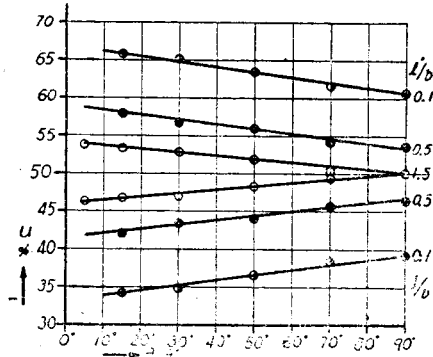
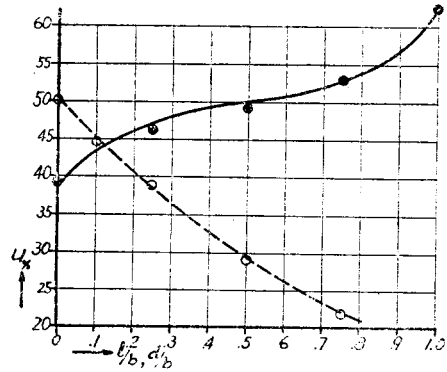


図-7

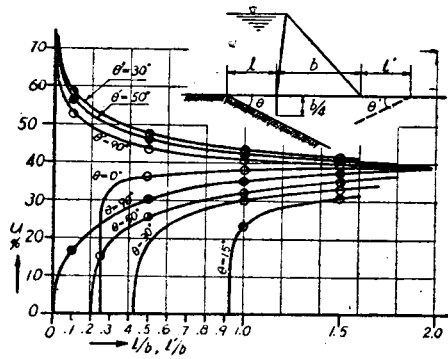


ものであつて, その深さが増すにしたがつて可成り急速に減少することがわかる。

(3) 掘込み基礎の影響 矩形の掘込み基礎の場合についても理論的解析が行われているが⁵⁾ このような場合総揚圧力は掘込み部の深さに無関係に 50% のようであつて, 掘込みによつて揚圧力の軽減を期待することはできないようである。

(4) 不透水性傾斜地層とグラウト壁の影響 堰堤踵部に堤底長の 1/4 の長さのグラウト壁が設けられ, 不透水性地層が存在する場合 l/b 又は l'/b と u との関係は図-8 のようになるが, 堤体の構造が対称でないため地層が上流又は下流側に露出しているかによつて, 揚圧力曲線が著しく異つている。この場合にも一定の l/b 又は l'/b に対する θ 又は θ' と u の関係は直線に変化するようである。いずれにしてもグラウト

図-8



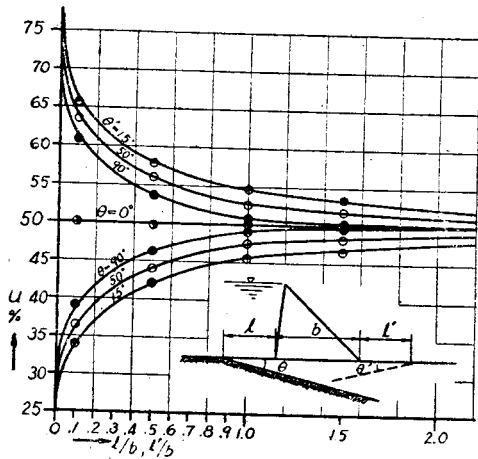
壁のない(1)の場合と比較して, 揚圧力の軽減にグラウト壁がいかに有効に作用するかが明らかになると思う。

(5) 不透水性傾斜地層と掘込み基礎の影響 掘込

1) M.Muskat: "The Flow of Homogeneous Fluids through porous Media" p.195

5) 本間仁, 浜田徳一: "滲透性基礎の地下水流と揚圧力について" 土木学会誌, 昭 19, 30 卷, 133 頁

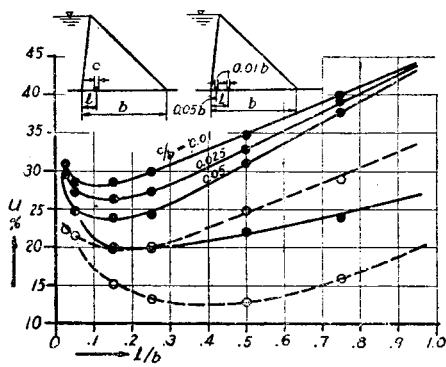
図-9



み基礎と傾斜地層の揚圧力に及ぼす影響は図-9より明らかになる。(4)のグラウト壁の場合と比べてその効果に余り期待することができないことがわかる。

(6) 排水孔の影響 堤底に設けられた排水孔が揚圧力分布に及ぼす影響を明らかにするため排水孔の大きさ、位置、個数を変化して実験を行った。これらの結果を整理して排水孔の位置と総揚圧力との関係を示せば図-10のようになる。すなわちちきさ $c/b=0.01$ 、 0.025 、 0.05 の排水孔の位置 l/b を変化して総揚圧力

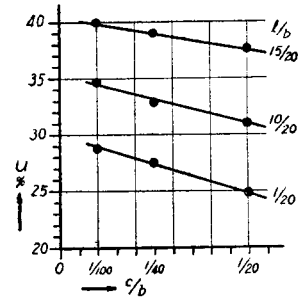
図-10



を求めると図の上部の3つの曲線となる。これより明らかのように堤底に設置せられる排水孔がたゞ1つの場合、 $c/b=0.01$ のものに対しては $l/b=0.1$ 、 $c/b=0.025$ 、 0.05 に対しては $l/b=0.15$ の位置に設けるのが、総揚圧力の点から最も効果的であることがわかる。なお堤底のある位置 l/b に設けられた排水孔の c/b と総揚圧力との関係を示せば図-11のように直線的な変化を

示す。次に上流踵部より $0.05b$ の位置に大きさ $0.01b$ の1つの排水孔を設け、他の1つの排水孔($0.01b$)の位置を変化した場合の総揚圧力曲線は図-10の下部の実線となり、大略第2の排水孔を踵部より $0.2b$ の位置に設けるのが最も有効であることがわかる。

図-11



(7) グラウト壁及び排水孔の影響 (6)と同様の実験を踵部に $b/4$ の深

さのグラウト壁を設けて行つた。この場合排水孔の大きさは $0.01b$ とした。その結果は図-10の破線の如くである。すなわち上の曲線は1つの排水孔の位置 l/b を変化した場合であり、(6)の結果と比較して可成りの揚圧力の減少が認められる。この場合も排水孔を $0.2b$ の位置に設けるのが最も効果的である。次に下の曲線はグラウト壁より $0.05b$ 下流の位置に第1の排水孔を設け、他の1つの位置 l/b を変化した場合の曲線であり、同様に(6)と比較して相当の揚圧力の軽減が認められる。このときは第2の排水孔を踵部より $0.4b$ の位置に設けるのがよく、約 12.5% の揚圧力となる。

4. 結語

以上の理論的実験的考察によつてグラウト壁、掘込み基礎、排水孔及び完全不透水性傾斜地層の揚圧力に及ぼす影響が明らかになつたと思う。しかし揚圧力の真の大きさは、これが作用する有効断面積の詳細な研究をまつて定めねばならないが、著者は K.Terzaghi 氏の研究⁶⁾の如くその殆んど全面積に揚圧力が作用すると考えるのが妥当であるように思う。グラウト壁、排水孔は揚圧力の軽減に最も有効なものであり、基礎の地質状態に考慮を払い、できる限り深いグラウト壁を踵部に設けると共に、できる限り大きい排水孔を数多く適切な位置に設置することが望ましいわけである。

本研究は文部省科学研究費をうけ、京大教授石原博士の御指導のもとに行つたものであり、計算には学生森忠次君の労を煩わせた。こゝに当局並びに同博士、同君に謝意を表す。(昭26.6.10)

⁶⁾ K.Terzaghi "Stability of Straight Concrete Gravity Dams" (Discussion), Trans. Am. Soc. C.E., Vol.99, 1934, p.1107.