UDC 624.072.33 : 624.041

不完全剛結ラーメンの解法に応用したる撓角分配法

正員　山　崎　徳　也*

METHOD OF SLOPE DISTRIBUTION APPLIED TO ANALYSIS OF SEMI-RIGID FRAMES.

(JSCE Sept. 1951)

Tokuya Yamasaki, C.E.Member.

Synopsis By introducing the factor *j* "Degree of Fixity", the Slope-Deflection Equations modified considering the effect of semi-rigidity of joints are derived in this paper and the method of their application to the Slope-Distribution Method is presented.

Thus, the calculation of the semi-rigid frames, carrying loads vertically and horizontally can be carried out very easily with a little additional computation to that of the ordinary rigid frames.

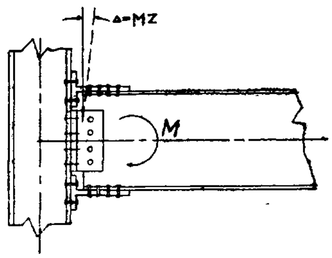
要旨 "拘束度" j, を導入することにより，結合部の不完全剛性を考慮した撓角式を導き，その撓角分配法への適用法を述べたものである。かくて，垂直或いは水平荷重を受ける一般不完全剛結構の解法は，準備計算を若干行うだけで在来の剛結構の場合と同様に簡単に行い得ることになる。

1. 緒　言

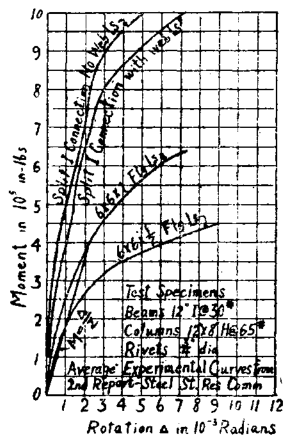
図—1 (a) の如く，桁と柱を取付けるに当り angle や tee-section を用いて不完全に剛結し結合部に回転角を生ずる様な，所謂不完全剛結構造物を，完全剛結として解くことは種々の結合様式に対する実物実験の結果が多数発表されている今日に於ては最早不合理であり，且つ不完全剛性の結果たる端モーメントの減小延いては材料の節約という点も無視され不経済と云わねばならず，その研究が近時盛んになつてきたのも当然のことである。此の不完全剛結ラーメンを解くに当つては，結合部の回転角がモーメントに比例するという仮定を基にするか，然らざる場合の２種が考えられる。実際の実験結果は 図—1(b) の如きカーブをなすが簡単には数式化出来ず，後者[1)2)] の見地を採れば英国の報告に示されている様に逐次近似法又は図解的に解法を進めねばならぬ。が今前者 [3)4)5)6)] を採れば結合部も含め構造全体として弾性的に取扱い得る。而して結合部は桁端と柱面との間に存在する局部的弱小断面と見做し，補強的な haunch や cover-plate とは逆の効果を有すると考え，従つて構造全体としては斯かる局部的弱小断面を含める剛結構造と見ることが出来，普通の弾性理論に基くラーメンの解法を応用し得ることになる。

筆者も上記の仮定にたつて Rathbun[3)] の導いた撓角式が未完成にして，其の儘では爾来の取扱を不可能ともする故，"拘束度" j, を導入して統一された形に変えこれを用いて撓角分配法の不完全剛結ラーメンへの適用を可能ならしたものである。

図—1 (a)



図—1 (b)



2. 撓角式の誘導

今，結合部の回転角はモーメントに比例するとし，接合常数 Z を単位モーメントによる角変化として定義すれば，

$Z=\Delta/M$ にして，諸研究[1)2)3)4)] の結果より既知常数として決定される。而して部材 AB の A—端に於ける Z を Z_{ab}，B—端に於けるものを Z_{ba} にて表わす。

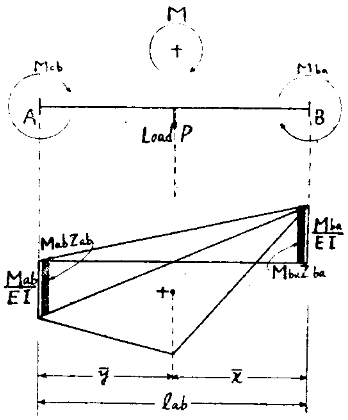
図—2 の如き端モーメント及び荷重の作用する一般部材を考え，荷重による単純梁としてのモーメント部の面積を A，その重心より B 端迄の距離を $\bar{x}$ とし，更に 図—3 の如く撓角，撓度を θ, α にて表わし時針方向を正とする。

M/EI 図は 図—2 の如くなり，$M/EI \cdot dx$ は dx 部

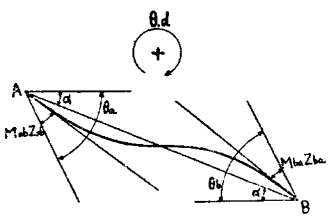
* 九州大学助教授

分の微小角変化を示す故，不完全剛結の影響はかかる局所的な角変化として取扱われ M/EI 圖の両端に MZ として加えれば良い。扨て，慣用の如く部材両端の変化に関しての考察より，端モーメントと撓角，撓度との関係式を求め整理すれば

図—2



図—3



$$2L_{ab}M_{ab}-l_{ab}M_{ba}=6EI(\theta_a-\alpha)-\frac{6A\bar{x}}{l_{ab}} \quad\cdots\cdots(a)$$

同様に

$$2L_{ba}M_{ba}-l_{ab}M_{ab}=6EI(\theta_b-\alpha)+\frac{6A\bar{y}}{l_{ab}} \quad\cdots\cdots(b)$$

(a),(b) 式を連立に解けば

$$M_{ab}=6EI\frac{2L_{ba}(\theta_a-\alpha)+l_{ab}(\theta_b-\alpha)}{4L_{ab}L_{ba}-l_{ab}^2}-\frac{6A}{l_{ab}}\frac{2L_{ba}\bar{x}-l_{ab}\bar{y}}{4L_{ab}L_{ba}-l_{ab}^2} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(c)$$

$$M_{ba}=6EI\frac{2L_{ab}(\theta_b-\alpha)+l_{ab}(\theta_a-\alpha)}{4L_{ab}L_{ba}-l_{ab}^2}+\frac{6A}{l_{ab}}\frac{2L_{ab}\bar{y}-l_{ab}\bar{x}}{4L_{ab}L_{ba}-l_{ab}^2} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(d)$$

此所で式を系統的に整理し，且つ爾後の解法を便にする為，"拘束度" なる概念を導入し，$j_{ab}=l_{ab}/L_{ab}$，$j_{ba}=l_{ab}/L_{ba}$ にて定義する。此の j は (5) 式より求められ，1～0 の値を取り不完全剛性の程度を表わす目安となるものである。

更に慣用の通り $\varphi_a=2E\theta_a$，$\varphi_b=2E\theta_b$，$\mu_{ab}=-6E\alpha$，$K_{ab}=I_{ab}/l_{ab}$ と約束すれば，(c) (d) 式を整理して

$$M_{ab}=\frac{3}{4-j_{ab}j_{ba}}K_{ab}\left\{2j_{ab}\varphi_a+j_{ab}j_{ba}\varphi_b+\frac{2j_{ab}+j_{ab}j_{ba}}{3}\mu_{ab}\right\}-C_{ab}' \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$M_{ba}=\frac{3}{4-j_{ab}j_{ba}}K_{ab}\left\{2j_{ba}\varphi_b+j_{ab}j_{ba}\varphi_a+\frac{2j_{ba}+j_{ab}j_{ba}}{3}\mu_{ab}\right\}+C_{ba}' \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$C_{ab}'=\frac{4j_{ab}-j_{ab}j_{ba}}{4-j_{ab}j_{ba}}C_{ab}+\frac{2j_{ab}-2j_{ab}j_{ba}}{4-j_{ab}j_{ba}}C_{ba} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$C_{ba}'=\frac{4j_{ba}-j_{ab}j_{ba}}{4-j_{ab}j_{ba}}C_{ba}+\frac{2j_{ba}-2j_{ab}j_{ba}}{4-j_{ab}j_{ba}}C_{ab} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

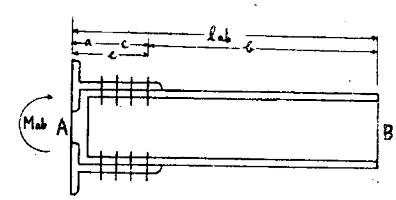
但し，C_{ab}，C_{ba} は完全剛結の場合の荷重項[7] とする。

(1) (2) (3) (4) 式が求める不完全剛結材に対する一般撓角式である。

此所に

$$\left.\begin{aligned}&j_{ab}=l_{ab}/L_{ab},\ j_{ba}=l_{ab}/L_{ba}\\&\text{但し,}\\&L_{ab}=l_{ab}-3e\left(1-\frac{e}{l}\right)\\&\quad+\frac{bc}{2l^2}(3b+c)+3EIZ_{ab}\left(1-\frac{a}{l}\right)\\&\quad\fallingdotseq l_{ab}+3EIZ_{ab}-3e\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(5)\ \text{(図—4 参照)}$$

図—4



3. 撓角分配法の適用法

Cross 氏のモーメント分配法も部材角のない而も一節点に集る部材数の少ない連続梁の如き場合にはすぐれた簡易さを示し，(1) (2) (3) (4) 式を用いれば，不完全剛性を考慮してのモーメント分配法も取扱整然とし亦拡張可能となる。が此所ではモーメント分配法の欠点を補つて余りある鷹部屋博士提案になる撓角分配法[7] への適用を企図するものである。

扨て，撓角分配法を拡張適用するに当り

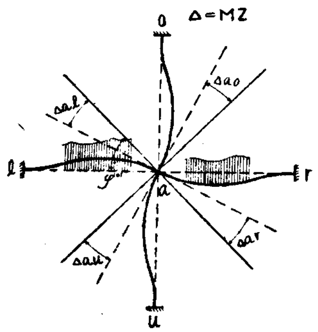
(1) 不均衡性撓角の分配に依る理論

(2) 不均衡性撓角及び撓度の分配に依る理論

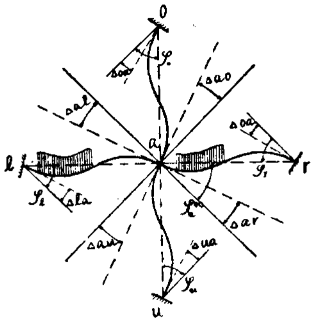
の2つにして論を進めること従来の通りである。

(1) 不均衡性撓角の分配に依る理論　各節点に移動を生ずることなく，撓角のみの変化を取扱えば良い様な構造について説明すれば次の如くである。即ち，撓角を生ずる如き節点を中心端とする部材群を取り出

図—5



図—6



し，夫々の他端を固定した図—5の如き，所謂“固定端ラーメン”を考え節点方程式をたてれば

$$\left.\begin{aligned}&\varphi_a^{(o)}=\frac{P_a}{\rho_a}\\&\text{茲に,}\\&P_a=\Sigma C_{ab}',\ \rho_a=2\sum_{b=o,r,u,l}\left(\frac{3j_{ab}}{4-j_{ab}j_{ba}}\right)K_{ab}\end{aligned}\right\}\cdots(6)$$

P_a, ρ_a はラーメンと荷重とが与えられれば数値として予め計算される故，各節点の固定端ラーメンとしての撓角 $\varphi^{(o)}$ は (6) 式より夫々単独に算出される。

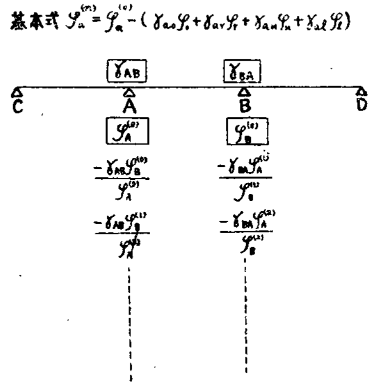
次に実在ラーメンを考え，図—6 の如く各隣接端に夫々撓角が作用する場合中央節点の撓角は，節点方程式より

$$\left.\begin{aligned}&\varphi_a^{(n)}=\varphi_a^{(o)}-(\gamma_{ao}\varphi_o+\gamma_{ar}\varphi_r\\&\qquad+\gamma_{au}\varphi_u+\gamma_{al}\varphi_l)\\&\text{茲に撓角分配率}\\&\gamma_{ao}=\frac{\left(\dfrac{3j_{ao}j_{oa}}{4-j_{ao}j_{oa}}\right)K_{ao}}{\rho_a}\\&\gamma_{ar},\gamma_{au},\gamma_{al}\ \text{も同様}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(7)$$

(6),(7) 式が基本式で，先ず (6) 式より $\varphi_a^{(o)}$ を各節点につき求め，これを概算値とし (7) 式右辺の括弧内の各撓角に代入し，φ_a の第1次近似値 $\varphi_a^{(1)}$ を各節点につき単独に算出する。以下 (7) 式に繰返し代入し収斂する迄行う図上計算の過程は従来と全く同じであり，ただ予め計算さるべき P, φ, γ 等に不完全剛性が取入れられてあり予備計算が多少手間取る点だけが異る。

連続梁について計算配置を示せば図—7の如くである。

図—7

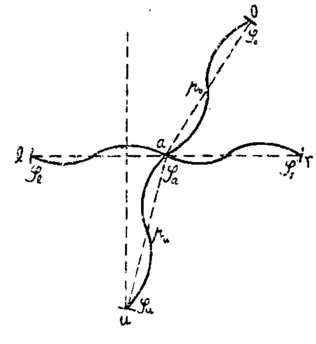


(2) 不均衡性撓角撓度の分配に依る理論　前節より一層一般的なる場合として，節点に移動を起し撓角及び撓度を共に生ずる場合を次の (i)(ii) の場合に分けて考える。

(i) 非対称垂直荷重の場合: 図—9 を参照して，上から第 n 層に於ける層方程式より，第 n 層の撓度を得る式として次式を得る。

$$\left.\begin{aligned}&\mu_n=-(\varphi_a t_{aA}+\varphi_A t_{Aa}+\varphi_b t_{bB}\\&\qquad+\varphi_B t_{Bb}+\cdots\cdots\cdots\cdots)\\&\text{茲に撓度分配率}\\&t_{aA}=\frac{\left\{\dfrac{3(2j_{aA}+j_{aA}j_{Aa})}{4-j_{aA}j_{Aa}}\right\}K_{aA}}{2\sum\limits_{\substack{a=a,b,c\cdots\\b=A,B,C\cdots}}\dfrac{(j_{ab}+j_{ba}+j_{ab}j_{ba})}{4-j_{ab}j_{ba}}K_{ab}}\\&t_{Aa},\ t_{bB}\cdots\cdots\cdots\ \text{も同様}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

図—8



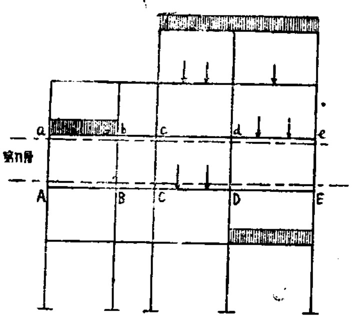
更に図—8 に示す如く，材端 o, r, u, l に夫々 φ_o, $\varphi_r, \varphi_u, \varphi_l$ の撓角を与え，柱 ao, au に夫々 μ_o, μ_u の撓度を与えた場合の中央節点の撓角は，諸点に於ける節

点方程式より

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_a^{(n)}=\varphi_a^{(0)}-\{(\varphi_o+q_{ao}\mu_o)\gamma_{ao}+\varphi_r\gamma_{ar} \\ &\qquad+(\varphi_u+q_{au}\mu_u)\gamma_{au}+\varphi_l\gamma_{al}\} \\ &\text{茲に,} \\ &q_{ao}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{j_{oa}}\right) \\ &q_{au}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{j_{ua}}\right)\ \text{にして撓度補正} \\ &\qquad\text{係数と呼ぶことにする。} \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(9)$$

(9) 式より気付くことは従来の撓角分配法とは聊か異り，撓角は γ に比例して分配されるが，撓度は γ に補正係数を乗じた $q\gamma$ に比例分配される故図上計算に撓度に対する分配率 $q\gamma$ の項を加えることになる。(**図—10** 参照)。

図—9

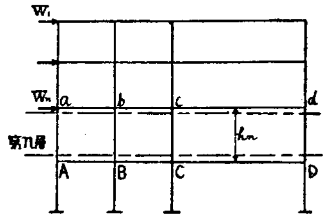


(8) (9) 式が基本式にして先ず固定端ラーメンを考え，前節 (6) 式より $\varphi_a^{(0)},\varphi_A^{(0)},\varphi_b^{(0)},\varphi_B^{(0)}$……etcを求め，之等を出発値として (8) 式より各層の撓度の第1近次値 $\mu^{(1)}$ を算出する。次に $\mu^{(1)}$ 及び前記 $\varphi^{(0)}$ を (9) 式括弧内に代入して各節点の撓角第1次近似値 $\varphi^{(1)}$ を決定，以下 (8) (9) 式を繰返し用い収斂する迄繰返し計算を行う。図上計算配置を示せば **図—10** の如くである。

(ii) 水平荷重を有する場合：**図—11,13** に示す如き水平荷重を有するラーメンは各節点に撓角を生じ，且つ各層に撓度を1つ宛生ずる。

総べて撓角分配法で問題を解くには撓角，撓度の概算値を必要とすることは明白であるが，本文の不完全剛性の場合は複雑性の為に良き考察も叶わぬ故，既に解かれた類似の構造物があれば，其等の値を利用し，然らざる時は従来の撓角分配法にて用い来つた概算値の概念をその儘適用して計算の出発点とする。

図—11



(a) 水平節点荷重を有する場合

図—11 にて上から第 n 層の層方程式より撓度の計算式として次式を得る。

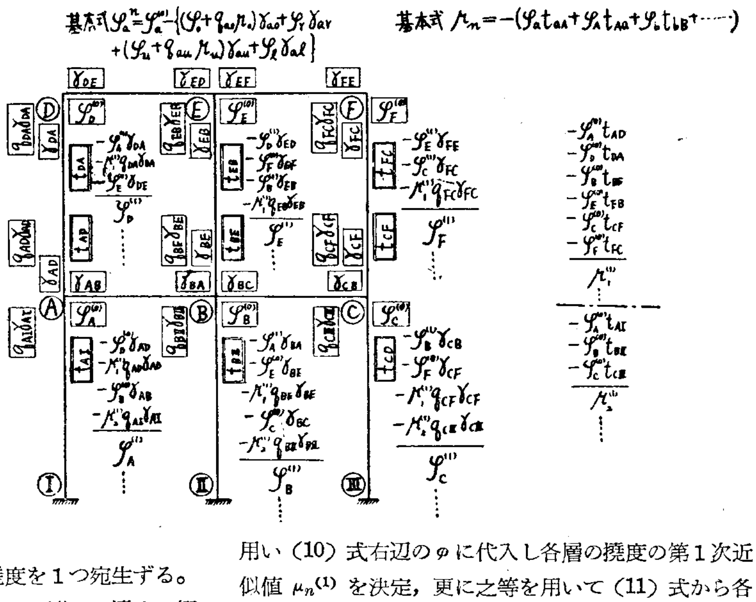
$$\left.\begin{aligned} &\mu_n=-\frac{H_n}{T_n}\{\varphi_a t_{aA}+\varphi_A t_{Aa}+\varphi_b t_{bB}\cdots\} \\ &H_n=(W_1+W_2+\cdots+W_n)h_n \\ &T_n=2\sum_{\substack{a=a,b,c\cdots \\ b=A,B,C\cdots}}\frac{(j_{ab}+j_{ba}+j_{ab}j_{ba})}{4-j_{ab}j_{ba}}K_{ab} \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(10)$$

又節点方程式より撓角の式として次式を得る。

$$\varphi_a=-\{(\varphi_o+q_{ao}\mu_o)\gamma_{ao}+\varphi_r\gamma_{ar}+(\varphi_u+q_{au}\mu_u)\gamma_{au}+\varphi_l\gamma_{al}\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

(10) (11) 式が基本式にして，在来の撓角分配法と同じ計算にて概算撓角を先ず算出し之を出発値として

図—10



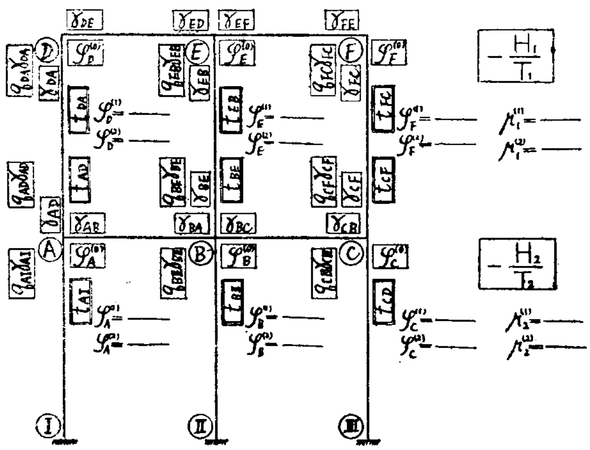
用い (10) 式右辺の φ に代入し各層の撓度の第1次近似値 $\mu_n^{(1)}$ を決定，更に之等を用いて (11) 式から各節点の撓角第1次近似値 $\varphi^{(1)}$ を求める。以下 (10) (11) 式を逐次繰返し用い収斂する迄行う。

図上計算配置を示せば **図—12** の如くである。

(b) 一般水平荷重を有する場合

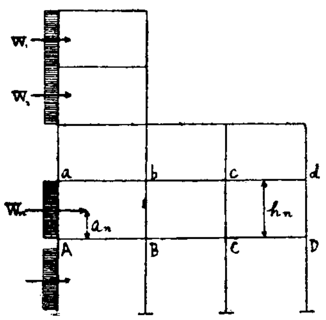
図—13 に示す如くラーメンの一側にかかる一般水平荷重を有する場合の計算に対し出発値として必要な

図―12



各層の撓度概算値 $\mu_n^{(0)}$ 及び撓角概算値 $\varphi_m^{(0)}$ は，従来の撓角分配法と全く同じ試算にて決定する。扨て，図―13 にて上層より数えて第1層の柱にかかる水平荷重の合成力を W_1，第 n 層のそれを W_n，柱の高さを夫々 $h_1, h_2 \cdots\cdots h_n$ とする。

図―13



第 n 層の層方程式よりその撓度 μ_n は次式にて求まる。

$$\left.\begin{aligned} \mu_n &= -\frac{H_n'}{T_n} - \{\varphi_a t_{aA} + \varphi_A t_{Aa} + \varphi_b t_{bB} \\ &\quad + \varphi_B t_{Bb} + \cdots\cdots\} \\ H_n' &= h_n(W_1 + W_2 + \cdots\cdots + W_{n-1}) \\ &\quad + a_n W_n + C_{aA}' - C_{Aa}' \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots(12)$$

(12) 及び (9) 式が基本式であり，既に概算した $\varphi_m^{(0)}$ を用い (12) 式より各層の撓度の第1次近似値 $\mu_n^{(1)}$ を求める。次に (9) 式の右辺括弧内に $\varphi_m^{(0)}$ 及び此の $\partial_n^{(1)}$ を代入して各節点の撓角の第1次近似値 $\varphi^{(1)}$ を求める。以下 (12) (9) 式を繰返し用い近似度を高め収斂に至る。その計算配置は 図―12 と同じであり省略する。

4. 結　語

本法を実際構造物に適用するに当り Z の数値を決定することが必要となる。これに対する最善の方法はその結合部の実物試験を行い M-Δ カーブを描き，これを近似的且つ安全側において1本或いは数本の直線で表わし直接 Z を決定することであり，同一結合形式を多数使用する構造物などの場合は行わるべきであるが，然らざる場合は高価なものとなり今日の我国ではあまり期待さるべきもない。

しかし現今まで英国[1] 及び米国[3] で種々の形式の結合部の実物試験結果が報告されており（一例を示せば 図―1 (b) の如し），実験数の少い web-cleat connections 及び combined web and flange cleat connections に対してはその標準カーブを計算より導く Beanfoy 氏の研究[2]，更には Lothers 氏の理論的に Z を算出する研究[4] なども あつて，これらの報告は現在実用に供せられる結合様式を一応包括しているといえる故，これらを利用して Z を決定使用すればよい。

さて本文にて導かれた撓角式は剛結と鉸結の間のあらゆる拘束状態を含むものにして，慣用法にては特別に準備する必要のあつた鉸結に対する撓角式も不用となり，剛結に対しては $j=1$，鉸結に対しては $j=0$ とすればよく，撓角分配法の諸係数についても同様のことが云え $j=1$ とすれば在来の撓角分配法に帰せられ，又鉸結ある場合は $j=0$ と取扱えば事足りるを以て，包括的且つ取扱上一貫しており，一層の簡易さを与えるとも云える。又 P, ρ, γ, q, t の式は一見複雑に見えるが，総べて数値として予め計算せられ，爾後の図上計算は従来の撓角分配法と全く同じ操作を行えば良く同法の長所を其の儘踏襲することになる。

御指導を賜つた鷹部屋教授に感謝致すと共に，文部省科学研究費の援助を得たことを附記する。

参考文献

(1) "1 st., 2 nd., and Final Reports" Steel Structures Research Committee, Dept. of Scientific and Industrial Research of Great Britain, H.M. Statinery Office, London, 1931～1936
(2) "Moment Angle Curves for Combined Web and Cleat Connections" by L.A.Beaufoy, Engineering, Dec. 30, 1949
(3) "Elastic Properties of Riveted Connections" by Charles Rathbun, Transactions, ASCE, 1936. p.524～563
(4) "Elastic Restraint Equations for Semi-Rigid Connections" by J. E. Lothers, Proceedings, ASCE. vol. 76, Separate No.5 1950
(5) "Wind Stresses in Semi-Rigid Connections of Steel Framework" by Basil Sourchnikoff, Proceedings, ASCE, Feb. 1949. p. 235～246
(6) "Statically Indeterminate Structures" by L.C.Maugh, John Wiley & Sons. New York, 1946 p. 292～299
(7) 鷹部屋福平著 "ラーメン新論" p. 159～201 又は "一般剛節構の実用解法" p. 16～86

(昭. 26. 6. 12)