

三辺固定一辺自由矩形版の計算及びその応用

正員 工学博士 水野高明*
 准員 吉村芳男**

CALCULATION OF RECTANGULAR SLAB WITH THREE EDGES BUILT-IN AND ONE EDGE FREE, AND ITS APPLICATION.

(JSCE April 1951)

Dr. Eng., Takaaki Mizuno, C.E. Member, Yoshio Yoshimura, C.E. Assoc. Member

Synopsis For the purpose of application to designing the caisson walls, the retaining walls, or the reservoirs, the authors introduce a method of calculation and show a few examples on rectangular slabs with three built-in edges and one free edge. This process is divided into two systems. In the first system, the slab is treated as an infinite cantilever carrying the given load and in the second the same slab is treated as a slab loaded only at the supporting lines of the fixed slab by some forces which give the slab the same deflection along these lines as in the first system, and these two systems are combined. For the calculation of the second system, the different equations are used.

1. 概 説

ケーソン、扶壁式擁壁、貯水槽等の壁体では、3辺準固定、1辺自由なる矩形版構造の場合が少くない。所が之等が水圧、土圧等を受ける場合には3辺は殆んど回転を起さないから、近似的には3辺固定、1辺自由なる版として取扱い得るものと考えられる。然るに慣用計算法では、水平に切断してラーメン又は連続梁として取扱っている為に側壁の水平方向の曲げモーメントは深さに比例して増大すると云う実際とはかけ離れた結果を与え、最も大なる底部の鉛直方向のモーメントを算出し得ない。

さて、版の厳密解は弾性版の基本微分方程式によるべきであるが、この場合の支持条件に適合する様な解を求める事は容易でない。併し乍ら実用的には差方程式を用いて近似解を求めて充分であろう。

かつて、本問題の差方程式による解法は坂博士りによつて発表されているが、同氏は4階の方程式を其儘取扱つておられるし、又ポアソン比の影響を無視してある。

本文では計算を簡単ならしむる為に、Marcus²⁾の方法にならつて4階の式を2組の2階の式に分ける方法を示した。又鉄筋コンクリートを対象としてポアソン比を1/6に取つたが、此の影響も必ずしも無視し得ない様に思われる。

2. 版の基本式

a) 微分方程式 版の中心面に x, y 軸を有する直交座標による版の基本微分方程式は

$$\nabla^4 w = \nabla^2 \nabla^2 w = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{p}{D} \dots\dots\dots(2.1)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \dots\dots\dots(2.2)$$

で示される。此処に

p : (x, y) 点の荷重強度, w : (x, y) 点の撓み
 D : 版の剛度 $Eh^3/12(1-\nu^2)$, h : 版の厚さ
 E : 弾性係数, ν : ポアソン比

を表わす。

与えられた境界条件に適合する(2.1)の解 w を求めれば、曲げモーメント M 及び反力 V は次式で計算される。

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right),$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \dots\dots\dots(2.3)$$

$$V_x = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]$$

$$V_y = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right] \dots\dots(2.4)$$

同様に振りモーメント及び剪断力も w より得られる。

b) 差方程式 今、版を図-1の如く x, y 方向に夫々 $\Delta x, \Delta y$ なる間隔の小網目に分割したものとすれば微分を近似的に次の如き階差式で置き換える事が出来る。任意の k 点に於て

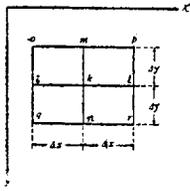
* 九州大学教授, 工学部土木工学教室

** 運輸省港湾局計画課

1) 坂 壽雄: 自由辺をもつ矩形版の設計曲げモーメント 建築学会論文集 昭和11年3月

2) H.Marcus: Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung liegsamer Platten.

図-1



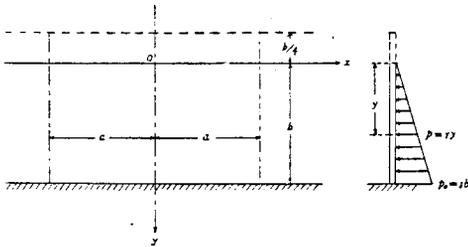
$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_k &= \frac{w_l - w_i}{2\Delta x}, \\ \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_k &= \frac{w_n - w_m}{2\Delta y}, \\ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_k &= \frac{w_i - 2w_k + w_l}{\Delta x^2} \\ &= \frac{(\Delta^2 w_k)_x - (\Delta w_l)_x}{\Delta x^2} = \frac{(\Delta^2 w_k)_x}{\Delta x^2}, \\ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_k &= \frac{w_m - 2w_k + w_n}{\Delta y^2} = \frac{(\Delta^2 w_k)_y}{\Delta y^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots(2.5)$$

但し、 Δw 、 $\Delta^2 w$ は夫々以上の如き意味を有する第1及第2階差も表わす。(2.5)の値を(2.1)に用いれば版の差方程式が得られる。

3. 第1系

先づ第1系として無限に巾の広い長さ b なる片持版を考え、之に図-2の如き等変水圧荷重を作用させる場合の曲げモーメント M^o 及び撓み w^o を求める。

図-2



次に第2系として、この片持版に x 方向の間隔 a 毎に週期的にある力を加えて、この線に沿う撓みを第1系の w^o と同一ならしめる如くした時のモーメント及び撓みを求め、この結果を第1系のモーメント及び撓みより夫々差引けば、巾 a 、高さ b なる3辺固定1辺自由矩形版が水圧(土圧)荷重を受ける場合の解が得られる筈である。

第1系に於ては w^o は y のみの函数であるから、(2.1)式は次の如くなる。

$$\frac{d^4 w^o}{dy^4} = \frac{p}{D} = \frac{\gamma y}{D} \dots\dots(3.1)$$

γ : 水(土砂)の単位重量

之を解いて、 $y=0$ に於ては自由端の境界条件 M_y^o

$=0$ 、 $V_y^o=0$ 、 $y=b$ に於ては固定端の条件 $w^o=0$ 、 $\frac{\partial w^o}{\partial y}=0$ を入れれば解が得られる。よつて之より各点の M_y^o 、 M_x^o 、 w^o を計算して表-1に示す。但し $\nu=1/6$ とした。

尚、後の都合上、図-2に点線で示した $y=-b/4$ なる仮想の線上の撓みを求めて同表に記入した。

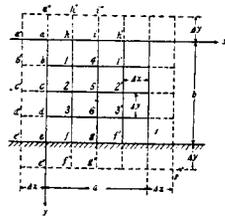
表-1 第1系の w^o 、 M_y^o 、 M_x^o

y/b	$w^o(\times \gamma b^5/D)$	$M_y^o(\times \gamma b^3)$	$M_x^o(\times \gamma b^3)$
-1/4	0.043 7500	—	—
0	0.033 3333	0	0
1/4	0.022 9248	-0.002 6042	-0.000 4340
1/2	0.012 7604	-0.020 8333	-0.003 4722
3/4	0.004 0609	-0.070 3125	-0.011 7188
1	0	-0.166 6667	-0.027 7778

4. 第2系

第2系としては、図-3の如き巾無限大の片持版に問題の固定版の巾 a に相当する間隔毎に周期的の荷重を加えるものとする。

図-3



図に於て $a''abcd$ なる線をその一つとすれば、この線上の撓みは与えられたものとする。差方程式を用いるに当つて、分割数を多く取る程正確なる結果を得るのは当然であるが、

実用上は計算が面倒となつて余り多くに分割する事は出来ない。今 $a \times b$ なる版を縦横共に4等分し格点に図の如き番号を附する。然る時は格間長は夫々 $\Delta x=a/4$ 、 $\Delta y=b/4$ (4.1)

となる。尚、この周辺より各方向に1格間だけ外方に延長した点線の如き格点を仮想する。

今の場合、周辺以外の内部点に於ては荷重 $p=0$ であるから、版の微分方程式は

$$\nabla^2 \nabla^2 w = 0 \dots\dots(4.2)$$

となる。今

$$\nabla^2 w = u \dots\dots(4.3)$$

と置けば、

$$\nabla^2 u = 0 \dots\dots(4.4)$$

となる。(4.3)及び(4.4)を差方程式で示せば、図-1の一般記号を使用して

$$\frac{w_i + w_l - 2w_k}{\Delta x^2} + \frac{u_m + u_n - 2u_k}{\Delta y^2} = u_k \dots\dots(4.5)$$

$$\frac{u_i + u_l - 2u_k}{\Delta x^2} + \frac{u_m + u_n - 2u_k}{\Delta y^2} = 0 \dots\dots(4.6)$$

を得る。又曲げモーメント及び反力は次の如き階差式

で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{M_{kx}}{D} &= \frac{2w_k - w_l - w_i}{\Delta x^2} + \nu \frac{2w_k - w_m - w_n}{\Delta y^2} \\ \frac{M_{ky}}{D} &= \frac{2w_k - w_m - w_n}{\Delta y^2} + \nu \frac{2w_k - w_l - w_i}{\Delta x^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots(4.7)$$

$$-\frac{V_{ky}}{D} = \frac{u_n - u_m}{2\Delta y} + (1-\nu) \frac{(\Delta^2 w_n)_x - (\Delta^2 w_m)_x}{2\Delta y \Delta x^2} \dots(4.8)$$

図-3 の版に対する境界条件は次の如きものである。

$y=b$ 固定端: $w=0, \frac{\partial w}{\partial y}=0 \dots\dots(4.9)$

$y=0$ 自由端: $M_y=0, V_y=0 \dots\dots(4.10)$

$x=0$ 及び $x=a$: $w=w^0, \frac{\partial w}{\partial x}=0 \dots\dots(4.11)*$

$*x=a/2$ 対称: $\frac{\partial w}{\partial x}=0 \dots\dots(4.12)$

5. $a=b$ なる版

i. 内部点 1, 2, 3, 4, 5, 6 に於ける w 式

$$\left. \begin{aligned} u_b + u_4 + u_n + u_2 - 4u_1 &= 0 \\ u_c + u_5 + u_1 + u_3 - 4u_2 &= 0 \\ u_d + u_6 + u_2 + u_7 - 4u_3 &= 0 \\ 2u_1 + u_i + u_5 - 4u_4 &= 0 \\ 2u_2 + u_4 + u_6 - 4u_5 &= 0 \\ 2u_3 + u_5 + u_9 - 4u_6 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(5.1)$$

(5.1) なる聯立方程式を解いて $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$ を求めれば表-2 を得る。*

表-2

	u_d	u_b	u_c	u_d	u_f	u_g	u_h	u_i
u_1	0	$37/112$	$1/8$	$5/112$	$5/112$	$3/112$	$37/112$	$11/112$
u_2	0	$1/8$	$3/8$	$1/8$	$1/8$	$1/16$	$1/8$	$1/16$
u_3	0	$5/112$	$1/8$	$37/112$	$37/112$	$11/112$	$5/112$	$3/112$
u_4	0	$11/56$	$1/8$	$3/56$	$3/56$	$5/112$	$11/56$	$37/112$
u_5	0	$1/8$	$1/4$	$1/8$	$1/8$	$1/8$	$1/8$	$1/8$
u_6	0	$3/56$	$1/8$	$11/56$	$11/56$	$37/112$	$3/56$	$5/112$
$u_1 - u_n''$	1	$37/56$	$1/4$	$5/56$	$5/56$	$3/56$	$-187/56$	$67/56$
$u_4 - u_i''$	0	$11/28$	$1/4$	$3/28$	$3/28$	$5/56$	$67/28$	$-187/56$

**

ii. h, i に於ける w 式 i と同様にして求め変形した値を表-2 下欄に附記する。

iii. 内部点 1, 2, 3, 4, 5, 6 に於ける w 式 この場合の w 式は (4.5) (4.6) より明らかな如く (5.1) の左辺 u の代りに w を又右辺の 0 の代りに $u_n \Delta y^2$ を代入したものに等しい。故に (5.1) を解くと同様にして w の値を求める事が出来る。

iv. f, g に於ける境界条件及び w 式

$w_f = w_g = 0 \dots\dots(5.2)$

$w_f'' = w_3, w_g'' = w_6 \dots\dots(5.3)$

$2w_3 = u_f \Delta y^2, 2w_6 = u_g \Delta y^2 \dots\dots(5.4)$

(5.4) の関係を前の w_3, w_6 の値に使用すれば w_h 及び w_i を求める事が出来る。

v. a, b, c, d に於ける境界条件及び w 式

$w_a' = w_h, w_b' = w_1, w_c' = w_2, w_d' = w_3 \dots(5.5)$

$$\left. \begin{aligned} 2w_h + w_a'' + w_b - 4w_a &= u_a \Delta y^2 \\ 2w_1 + w_a + w_c - 4w_b &= u_b \Delta y^2 \\ 2w_2 + w_b + w_d - 4w_c &= u_c \Delta y^2 \\ 2w_3 + w_c - 4w_d &= u_d \Delta y^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots(5.6)$$

上に求めた w_h, w_1, w_2 及び w_3 の値を (5.6) に入れば u_a, u_b, u_c, u_d が得られる。

vi. h, i に於ける w 式及び境界条件

$$\left. \begin{aligned} u_a + w_i + w_h'' + w_1 - 4w_h &= u_n \Delta y^2 \\ 2w_h + w_i'' + w_4 - 4w_i &= u_i \Delta y^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots(5.7)$$

$M_y=0$ より次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} 2w_h - w_h'' - w_1 + \nu(2w_h - w_i - w_a) &= 0 \\ 2w_i - w_i'' - w_4 + \nu(2w_i - 2w_h) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(5.8)$$

(5.7) の w_h'', w_i'' を (5.8) に使用すれば、次の関係が得られる。

$$\left. \begin{aligned} w_i &= w_a - \frac{(u_h + u_i)}{(1-\nu)} \Delta y^2 \\ w_h &= w_i + \frac{u_i}{2(1-\nu)} \Delta y^2 = w_a - \frac{(2u_h + u_i)}{2(1-\nu)} \Delta y^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots(5.9)$$

$V_y=0$ より

$$\left. \begin{aligned} (u_1 - u_n'') + \frac{(1-\nu)}{\Delta x^2} (\Delta^2 w_{1x} - \Delta^2 w_h''_x) &= 0 \\ (u_4 - u_i'') + \frac{(1-\nu)}{\Delta x^2} (\Delta^2 w_{4x} - \Delta^2 w_i''_x) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(5.10)$$

を得る。但し $\Delta^2 w_{1x}, \Delta^2 w_h''_x, \Delta^2 w_{4x}, \Delta^2 w_i''_x$ は (2.5) を参照の事。

よつて今 $\nu=1/6$ として (5.10) に (5.7) (5.9) 等

の関係をいれれば結局次式となる。

$$\left. \begin{aligned} u_1 - u_1'' &= 2.33333u_h - 0.16667u_i \\ &+ (3.33333w_1 - 1.66667w_a \\ &+ 0.83333w_a'' - 1.66667w_a \\ &- 0.83333w_b)/\Delta y^2 \\ &\dots\dots\dots(5.11) \\ u_1 - u_1'' &= -0.33333u_h \\ &+ 2.33333u_i + (-3.33333w_1 \\ &+ 3.33333w_a)/\Delta y^2 \end{aligned} \right\}$$

よつて (5.9) 及び (5.11) に前に求めた数値を入れれば、 u_f, u_g, u_h, u_i に関する 4 個の聯立方程式が得られるから、之を解いてその結果を用いて表-3 の解が求まる。次に表-1 に示す第 1 系の w^0 の値を、表-3 の夫々に代入し各々集計すれば表-3 最右欄の結果が得られる。

表-3

	$w_a/\Delta y^2$	$w_b/\Delta y^2$	$w_c/\Delta y^2$	$w_d/\Delta y^2$	$\Sigma (w/\Delta y^2)$
u _a	0.97949	1.21554	1.39463	-0.07797	-0.02350
u _b	0.02628	1.13277	2.65431	1.31231	-0.01947
u _c	-0.00799	0.00272	1.30499	-2.78852	1.16481
u _d	-0.00354	-0.00789	0.07440	1.25774	-3.04782
u _f	0.00540	-0.00795	0.07440	0.25774	0.93219
u _g	-0.00285	-0.00396	0.11531	0.30791	0.53255
u _h	0.01407	0.04507	-0.10782	0.01499	0.01614
u _i	0.00276	0.07706	-0.10533	-0.1326	0.02921
w ₁	-0.00277	0.07706	0.17476	-0.1002	-0.03369
w _a	0.00213	0.16637	0.67177	0.15616	-0.00782
w _b	-0.00355	-0.00446	0.7047	0.60557	0.07831
w _c	-0.00772	-0.01470	0.03530	0.12877	0.46609
w _d	-0.00403	0.03544	0.52918	-0.00206	-0.05442
w _f	-0.00712	0.22605	0.55770	0.19327	-0.09352
w _g	-0.00479	0.00591	0.20277	0.40527	0.00293
w _h	-0.00341	-0.00009	0.05766	0.15076	0.27627

vii. 曲げモーメント

(2.3) により、任意の k 点に於て次の関係が成立する。

$$M_x + M_y = -D(1+\nu)u \dots\dots\dots(5.12)$$

さて、 a, b, c, d 縁に於ては、 $w = w^0$ とし、且つ w^0 は y のみの函数であるから、第 2 系に於て

$$\left. \begin{aligned} M_{kx} &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_x^0 \\ -Du_k &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_y^0 \end{aligned} \right\}$$

が成立つ筈である。故に之等より

$$M_{kx} = -Du_k + M_x^0 - M_y^0 \dots\dots\dots(5.13)$$

を得る。

e, f, g 縁に於ては、 $w = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$ であるから、

$$u_k = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad M_{ky} = -Du_k \dots\dots\dots(5.14)$$

h, i 縁に於ては、 $M_{ky} = 0$ であるから (5.12) によつて、

$$M_{kx} = -D(1+\nu)u_k \dots\dots\dots(5.15)$$

で計算される。内部点では一般式 (4.7) を用いて曲げモーメントを算定する。

以上によつて得られた各点の第 2 系の曲げモーメント及び撓み M_x, M_y, w を表-4 左欄に示す。更に之等を第 1 系の曲げモーメント及び撓みから差引いた値を $\mathfrak{M}_x, \mathfrak{M}_y, W$ として同表右欄に掲げる。

$\mathfrak{M}_x, \mathfrak{M}_y, W$ が求める 3 辺固定 1 辺自由正方形版が水圧荷重を受ける場合の値である。尚之等を図-4 に示す。

6. $a=b/1.5$ 及び $a=b/2$ なる版

$a=b$ の場合と同様に $\Delta x=a/4, \Delta y=b/4$ に分割して計算した結果を図-5 に掲げる。

表-4 $a=b$, 曲げモーメント及び撓み

格点	第 2 系			合 計		
	$M_x (x/b^2)$	$M_y (x/b^2)$	$W (x/b^3)$	$\mathfrak{M}_x (x/b^2)$	$\mathfrak{M}_y (x/b^2)$	$W (x/b^3)$
Q	0.02233	0.03333	-0.02055	0	0	0
C	0.01631	0.02225	-0.01674	0	0	0
b	0.01144	0.01740	-0.01492	0	0	0
d	-0.00915	0.01461	-0.01357	0	0	0
f	0	-0.12247	0	-0.04420	0	0
g	0	-0.11825	0	-0.04263	0	0
h	-0.00235	0.02283	0.00295	0	0.000480	0
l	-0.01242	0.02254	0.01022	0	0.000807	0
1	-0.00466	-0.00612	0.022361	0.00423	0.00352	0.000565
2	-0.00719	-0.00789	0.02219	0.00530	0.00466	0.000548
3	-0.01378	-0.00730	0.022027	0.00206	0.00257	0.000234
4	-0.01176	-0.00785	0.022032	0.01113	0.00525	0.000973
5	-0.00441	-0.01777	0.01920	0.00782	0.01093	0.000461
6	-0.01630	-0.01717	0.023675	0.00458	0.00284	0.000365

図-4 $a=b$

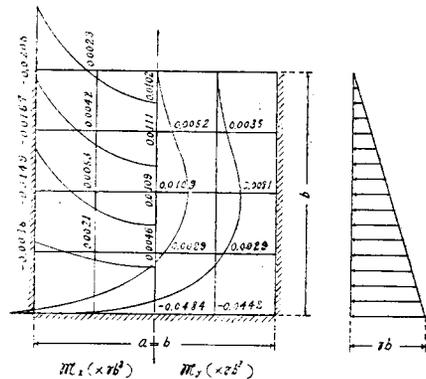
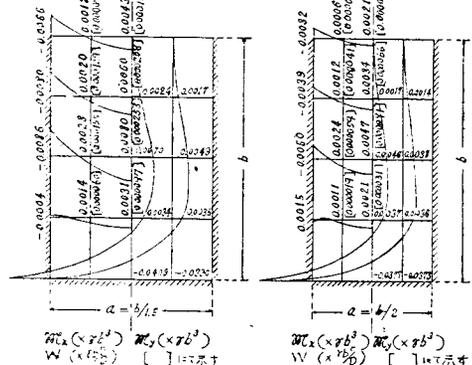


図-5 $a=b/1.5$ 及び $a=b/2$



7. 結 語

以上、3 辺固定、1 辺自由矩形版が等変水圧荷重を受ける場合の数例を示した。この結果はケーソン壁等の計算に於て一般に採用されている値とは全然趣きを異にし、下部の横方向曲げモーメントはずつと小さくなる事を知る。又縦方向のモーメント分布を明らかに

する事が出来る。更に数種の $a : b$ について計算して置けば、中間の場合は内挿法によつて求め得るであろう。

尙本法によれば、三角荷重以外についても表-2、3 の係数をその儘使用し得る便利がある。

本研究は文部省科学研究費の補助によるものゝ一部である事を附記する。(昭. 25.10. 7)

測角の精度に関する実験的研究

准 員 北 郷 繁*

EXPERIMENTAL RESEARCH ON THE ACCURACY OF ANGLE MEASUREMENT.

(JSCE April 1951)

Shigeru Kitago, C.E. Assoc. Member

Synopsis An angle was measured experimentally by two methods, single and repeating, using 3 transits, each of which has double axis and 20" reading vernier, operated by 3 observers, to see the effective limit of repeating number in the method of repetition, and to compare the above mentioned methods of angle measurement and the two kinds of repeating method, which are simple and returning.

要 旨 本文は、複軸型、20秒読みのトランシット 3 台を用いて、単測法及び倍角法による測角を行い、倍角回数の有効な限度、二種の倍角法の精度及び単測法と倍角法との比較、等について実験結果を検討したものである。

1. 緒 言

複軸型トランシットによる倍角法は、小規模の技術測量に於ては重要な測量法の一つである。所が倍角法についての文献は至つて少く、僅かに Jordan-Eggert⁽¹⁾ に誤差理論がある程度である。従つて、普通用いられる 20 秒読みトランシットで倍角法を採用した場合の倍角回数の有効な限界や、同じ倍角回数を望遠鏡の正位(又は反位)のみで行うべきか、或いは正反兩位に折半してその平均をとるべきか、及び同じ回数の単測法の平均と比較したらどんなものか、と言つた事については何れの書物も触れておらない。それで前述の誤差理論を土台に実験値を整理し、以上の事項について二、三の考察を行つた。

2. 観 測

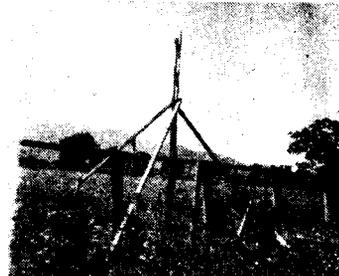
- a) 日時及び場所: 1950 年 8 月, 北大構内。
- b) 使用器械: 名称, 性能は表-1 の通りで、何れも完全に調整して使用した。本学部備品。
- c) 観測小屋及び視標: 観測中の風の影響を少くし器械附近の温度を略々一定に保つために、観測小屋を

* 北海道大学助教授, 工学部土木工學教室

表-1 使用器械の性能²⁾

名稱	ガ-レ	ワッツ	フヂ
製作所	アイリス ボール社	アイリス ワッツ社	日本 測機舎
望遠鏡全長 (mm)	292	233	220
倍率	26×	20×	27×
映像	正	倒	倒
鏡筒全長	91	内	内
水平分度	170	119	152
垂直分度	20	20	20
視標 (mm)	20	20	20
重量 (kg)	6.0	2.0	1.03
三脚重量 (kg)	7.2	6.1	7.3
製作番号	27242	11967	1419

写真-1 テン 標



造つた。視標としては、ボールを使用し、写真-1 に示すように固定した。ボールの中央の高さは、視準線を水平にしたときの高さとし、トランシットからの距