機会に譲ることにしたい。q', $\bar{q}$ は何れも著者の実験における最大観測値よりも安全側の値を与えている。

5. 結　　語

著者は以上実験結果についてのみ説明したが尚以上の砂の外に豊浦砂に重量比にしてその23.3%の花崗岩粉（粒径160メッシュ以下）を混和して作つた砂を用いて堤体を作つて同様の実験を行つた。23.3%は豊浦砂の場合の間隙比 $p=46.6$ %の$^1/_2$をとつたのである。この場合の $q-i$ 曲線及び流線の決定については多少その趣を異にしている。著者は第2報において流線に関する実験結果について論じたいと思つている。尚本研究は文部省科学研究費の補助を得て行つたものであることを記して感謝の意を表したい。

（昭. 25. 10. 9）

等剛比高層ラーメンの水平荷重による変形と固有振動週期の計算公式

正員　工学博士　酒　井　忠　明*

CALCULATION FORMULAE OF DEFORMATION DUE TO HORIZONTAL LOAD AND NATURAL VIBRATION PERIOD FOR HIGH STORIED BAENTS WITH CONSTANT RATIO OF STIFFNESS.

(JSCE March 1951)

Dr. Eng. Tadaaki Sakai, C.E. Member

Synopsis. The calculation formulae proposed in this paper give quickly and directly deformation for a tall building frame with constant ratio of stiffness subjected to horizontal joint load. Practical calculation formula for natural vibration period is also given in this paper.

要旨　本文は任意の張間数と層数を有する等剛比ラーメンの水平荷重による変形とその固有振動週期を直接かつ即座に求める公式を階差方程式の解法理論を用いて誘導提案したものである。

1. 緒　言

こゝに取扱つたラーメンはその中心線に対して対称で等剛比を有し各階はすべて等高，荷重はラーメンの左側節点にかゝるものとする。この節点水平荷重はすべてWとし最上端のみ$\dfrac{W}{2}$の時とWの時を考えた。

1張間より5張間のラーメンに対しては別々に，6張間以上のものには張間数を任意数として含むまとめた式として求めた。前者に関する計算式は精解値を与え，後者は多少近似値を与える。しかしこの場合も大体4桁迄採用出来るので工学上の目的には充分である。

なおこゝに提案した式は4，5層の位層ラーメンに対しても高い精度の結果を与える。固有振動週期の式は2，3層のものにも満足すべき結果を期待できる。

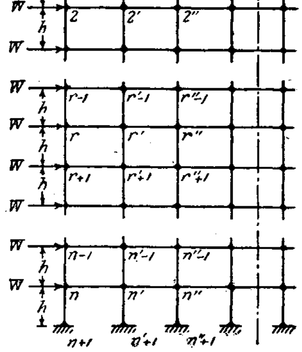
変形に関する一般計算式はラーメンの上部と下部附近に対してはこれに上部と下部の局所影響補正値なるものを加えて用いる。最初にこの一般計算式と補正値をあげ後にその計算例と誘導法をのべる。

2. 等剛比高層ラーメンの変形計算公式

ラーメンの全層数をn，全張間数をmとし節点と層の位置は上端から数える。節点に関しては最左側柱から内側に2番目及び3番目のものは夫々′と″を附して最左側柱のものと区別する。(図—1参照）式中E:弾性係数，K: 部材剛度，h:柱高，θ:節点の廻転角，R:柱の部材廻転角としこれにサフイックスを附してその位置をしめす。y_rは上端よりr番目の節点の水平変位である。

図—1　m 張間 n 層ラーメン

Frame with m bays and n stories



* 北海道大学教授，工学部土木工学教室

(1) 水平変位の一般計算式 Calculation Formulae of Horizontal Deflection.

最上端荷重が $\frac{W}{2}$ の場合 Top load $=\frac{W}{2}$. 係数：$\frac{Wh^2}{EK}$

1張間ラーメン ($m=1$)：

$$y_r=0.062\,5000\{n^2-r(r-2)-1\}-0.053\,791n$$

2張間ラーメン ($m=2$)：

$$y_r=0.036\,1111\{n^2-r(r-2)-1\}-0.027\,175n$$

3張間ラーメン ($m=3$)：

$$y_r=0.025\,1736\{n^2-r(r-2)-1\}-0.017\,702n$$

4張間ラーメン ($m=4$)：

$$y_r=0.019\,3345\{n^2-r(r-2)-1\}-0.013\,062n$$

5張間ラーメン ($m=5$)：

$$y_r=0.015\,6933\{n^2-r(r-2)-1\}-0.010\,325n$$

m 張間ラーメン ($m>5$)：

$$y_r=[143.5\{n^2-r(r-2)-1\}-(82.95+68.76/m+1)n]\frac{1}{12(143m+47)}$$

$$(r=1\sim n)$$

最上端荷重が W の場合 Top load: W. 係数：$\frac{Wh^2}{EK}$

1張間ラーメン ($m=1$)：$y_r=0.062\,5000\times\{n(n+1)-r(r-1)\}-0.053\,791(n+0.5)$*

*2張間ラーメン ($m=2$)：$y_r=0.036\,1111\times\{n(n+1)-r(r-1)\}-0.027\,175(n+0.5)$

3張間ラーメン ($m=3$)：$y_r=0.025\,1736\times\{n(n+1)-r(r-1)\}-0.017\,702(n+0.5)$

4張間ラーメン ($m=4$)：$y_r=0.019\,3345\times\{n(n+1)-r(r-1)\}-0.013\,062(n+0.5)$

5張間ラーメン ($m=5$)：$y_r=0.015\,6933\times\{n(n+1)-r(r-1)\}-0.010\,325(n+0.5)$

m 張間ラーメン ($m>5$)：

$$y_r=[143.5\{n(n+1)-r(r-1)\}-(82.95+68.76/m+1)(n+0.5)]\frac{1}{12(143m+47)}$$

$$(r=1\sim n)$$

(2) ラーメンの上部と下部における水平変位の補正値 Correction of Horizontal Deflection for Upper and Lower Local Effects.

ラーメンの上部と下部の水平変位の計算には，上の計算式の結果に更に，上端荷重が $\frac{W}{2}$ の場合には表—1と表—2にあげた補正値を加える。上端荷重が W の場合には上部の補正値は表—3を用い下部の補正値には表—2中の n の代りに $n+0.5$ としたものを用いる。

表—1 上部の補正値 (上端荷重 $=W/2$)

Upper local effect $\left(\text{Top load}=\frac{W}{2}\right)$ 係数：$\frac{Wh^2}{EK}$

Δy_r	1張間ラーメン ($m=1$)	2張間ラーメン ($m=2$)	3張間ラーメン ($m=3$)	4張間ラーメン ($m=4$)	5張間ラーメン ($m=5$)	m 張間ラーメン ($m>5$)
Δy_1	0.019 566	0.009 430	0.005 946	0.004 313	0.003 371	$(25.77+30.30/m+1)\frac{1}{12(143m+47)}$
Δy_2	0.002 485	0.000 940	0.000 537	0.000 367	0.000 277	$(1.82+4.32/m+1)$ 〃
Δy_3	0.000 315	0.000 106	0.000 054	0.000 035	0.000 026	$(0.14+0.54/m+1)$ 〃
Δy_4	0.000 040	0.000 011	0.000 004	0.000 003	0.000 002	

表—2 下部の補正値 (上端荷重 $=W/2$)

Lower local effect $\left(\text{Top load}=\frac{W}{2}\right)$ 係数：$\frac{Wh^2}{EK}$

Δy_r	1張間ラーメン ($m=1$)	2張間ラーメン ($m=2$)	3張間ラーメン ($m=3$)	4張間ラーメン ($m=4$)	5張間ラーメン ($m=5$)	m 張間ラーメン ($m>5$)
Δy_n	$0.006\,832n$	$0.002\,748n$	$0.001\,620n$	$0.001\,128n$	$0.000\,860n$	$(5.89+11.82/m+1)n\frac{1}{12(143m+47)}$
Δy_{n-1}	$0.000\,867n$	$0.000\,297n$	$0.000\,159n$	$0.000\,105n$	$0.000\,077n$	$(0.44+1.53/m+1)n$ 〃
Δy_{n-2}	$0.000\,110n$	$0.000\,028n$	$0.000\,014n$	$0.000\,008n$	$0.000\,005n$	$(0.02+0.18/m+1)n$ 〃
Δy_{n-3}	$0.000\,014n$	$0.000\,003n$	$0.000\,001n$			

表—3 上部の補正値 (上端荷重 $=W$)

Upper local effect (Top load $=W$) 係数：$\frac{Wh^2}{EK}$

Δy_r	1張間ラーメン $m=1$	2張間ラーメン $m=2$	3張間ラーメン $m=3$	4張間ラーメン $m=4$	5張間ラーメン $m=5$	m 張間ラーメン $m>5$
Δy_1	0.007 826	0.003 564	0.002 059	0.001 419	0.001 068	$(0.67+18.59/m+1)\frac{1}{12(143m+47)}$
Δy_2	0.000 994	0.000 321	0.000 169	0.000 109	0.000 079	$(0.44+1.74/m+1)$ 〃
Δy_3	0.000 126	0.000 041	0.000 020	0.000 013	0.000 009	$(0.04+0.24/m+1)$ 〃
Δy_4	0.000 016	0.000 002	0.000 001	0.000 001		

3. 等剛比高層ラーメンの固有振動週期計算公式

Calculation Formula of Natural Vibration Period

各層の質量がすべて一様にして M なる m 張間 n 層等剛比ラーメンの第 s 次固有振動週期 T_s は

$$T_s=\frac{2}{2s-1}\left(2n+1-\sqrt{\frac{F_m}{3}}\right)\sqrt{1+F_m}\sqrt{\frac{Mh^2}{12(m+1)EK}}$$

こゝに F_m は張間数 m に関するもので

1張間ラーメン：$F_1=2$

2張間ラーメン：$F_2=\frac{8}{5}$

3張間ラーメン：$F_3=\frac{17}{12}$

4張間ラーメン：$F_4=\frac{367}{278}$

5張間ラーメン：$F_5=\frac{160}{127}$

m張間ラーメン：$F_m=\frac{48(3m+5)}{143m+47}$

4. 計算例題

5張間5層の等剛比ラーメン（$m=5$, $n=5$）によつて水平変位の計算例をのべる。最上端荷重は $W/2$ とする。5張間ラーメンの水平変位の一般計算式は

$$y_r=[0.0156\ 933\{n^2-r(r-2)-1\}-0.010\ 325n]\frac{Wh^2}{EK}$$

でこれに $n=5$, $r=1, 2, \cdots\cdots 5$ を代入して

$$y_1=0.340\ 708,\ y_2=0.325\ 014,\ y_3=0.277\ 934$$
$$y_4=0.199\ 468,\ y_5=0.089\ 615\ \left(\text{係数：}\frac{Wh^2}{EK}\right)$$

これに上部の補正値を表—1 から

$$\varDelta y_1=0.003\ 371,\ \varDelta y_2=0.000\ 277,\ \varDelta y_3=0.000\ 026$$

下部の補正値を表—2 から

$$\varDelta y_5=0.000\ 860\times5,\ \varDelta y_4=0.000\ 077\times5,$$
$$\varDelta y_3=0.000\ 005\times5$$

と求めて上の値に加え結局各節点の水平変位は

$$y_1=0.344\ 079(0.344\ 08),\ y_2=0.325\ 291(0.325\ 29)$$
$$y_3=0.277\ 985(0.277\ 99),\ y_4=0.199\ 853(0.199\ 85)$$
$$y_5=0.093\ 915(0.093\ 91)\ \left(\text{係数：}\frac{Wh^2}{EK}\right)$$

括弧内の数値は鷹部屋博士著“建築架構モーメント図譜”に記載の部材廻転角の値を用いて計算したものである。

5. 計算公式の誘導法

5張間ラーメンを例にとつてのべる。節点 r, r' 及び r'' における撓角法による節点平衡方程式と第 r 層及び $r-1$ 層における剪断平衡方程式をもとめこれから Rを消去し θ のみの式をつくると次のようになる。

$$\left.\begin{aligned}&(\theta_{r-1}+5\theta_r+\theta_{r+1})\\&\quad-(\theta_{r-1}'+7\theta_r'+\theta_{r+1}')-\theta_r''=0\\&\theta_r+(\theta_{r-1}'+7\theta_r'+\theta_{r+1}')\\&\quad-(\theta_{r-1}''+8\theta_r''+\theta_{r+1}'')=0\\&(\theta_{r-1}+10\theta_r+\theta_{r+1})-(\theta_{r-1}'+\theta_{r+1}')\\&\quad-(\theta_{r-1}''+2\theta_r''+\theta_{r+1}'')=(S_r+S_{r-1})\frac{h}{12EK}\end{aligned}\right\}\ (1)$$

$[r=2\sim(n-1)]$

ラーメンの最上端と最下端においてはこの式は次のようになる。上端では

$$\left.\begin{aligned}&3\theta_1+\theta_2-5\theta_1'-\theta_2'-\theta_1''=0\\&\theta_1+5\theta_1'+\theta_2'-6\theta_1''-\theta_2''=0.\\&7\theta_1+\theta_2+\theta_1'-\theta_2'-\theta_1''-\theta_2''=\frac{S_1h}{12EK}\end{aligned}\right\}\cdots(2)$$

下端では，

$$\left.\begin{aligned}&(\theta_{n-1}+5\theta_n)-(\theta_{n-1}'+7\theta_n')-\theta_n''=0\\&\theta_n+(\theta_{n-1}'+7\theta_n')-(\theta_{n-1}'+8\theta_n'')=0\\&(\theta_{n-1}+10\theta_n)-\theta_{n-1}'-(\theta_{n-1}''+2\theta_n'')\\&\qquad=(S_n+S_{n-1})\frac{h}{12EK}\end{aligned}\right\}\cdots(3)$$

こゝに S_r は第 r 層に働く剪断力で，最上端荷重が $\frac{W}{2}$ の時には

$$S_r=\left(r-\frac{1}{2}\right)W,\ (S_r+S_{r-1})=2(r-1)W$$
$$S_1=\frac{W}{2}\quad,\ (S_n+S_{n-1})=2(n-1)W$$

である。これを用い(1)なる聯立階差方程式の特殊解を求めると

$$\left.\begin{aligned}&\theta_r=33(r-1)\frac{Wh}{1\ 524EK}\\&\theta_r'=23(r-1)\quad〃\\&\theta_r''=24(r-1)\quad〃\end{aligned}\right\}\cdots(4)$$

従つて又

$$R_r=287\left(r-\frac{1}{2}\right)\frac{Wh}{6\times1\ 524EK}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

となる。このもとめかたは(1)式のような形のものでは $\theta_{r-1}+\theta_{r+1}=2\theta_r$, $\theta_{r-1}'+\theta_{r+1}'=2\theta_r'$, $\theta_{r-1}''+\theta_{r+1}''=2\theta_r''$ とおいて簡単に求められる。この(4)と(5)の式がラーメンの上下の限界効果即ち局所影響を考えない場合の θ と R に関する一般計算式でラーメンの上下両端附近を除いた部分に適用できる式である。

次に(1)式の右辺がすべて零なる所謂同次方程式の解を求める。微分方程式におけるように，

$$\theta_r=A\beta^r,\ \theta_r'=B\beta^r,\ \theta_r''=C\beta^r\quad\cdots\cdots\cdots(6)$$

とおいて，この同次方程式に入れると

$$\left.\begin{aligned}&(1+5\beta+\beta^2)A-(1+7\beta+\beta^2)B-\beta C=0\\&\beta A+(1+7\beta+\beta^2)B-(1+8\beta+\beta^2)C=0\\&(1+10\beta+\beta^2)A-(1+\beta^2)B-(1+2\beta+\beta^2)C=0\end{aligned}\right\}(7)$$

これから A, B, C を消去すると

$$\beta^6+2\beta^5-113\beta^4-542\beta^3-113\beta^2+2\beta+1=0\quad\cdots(8)$$

なる特性方程式がえられる。この6根を計算すると

$$\beta_1=0.085\ 51,\ \beta_2=-0.127\ 78,\ \beta_3=-0.176\ 99$$
$$\beta_4=\beta_1^{-1}=11.695\ 19,\ \beta_5=\beta_2^{-1}=-7.825\ 88,$$
$$\beta_6=\beta_3^{-1}=-5.650\ 05$$

となりこれを(7)式に入れ，A, B, C の比を決定すると，

$$\beta_1,\beta_4:A=1,\ B=0.847\ 95,\ C=0.355\ 63,$$

β_2,β_5: $A=1,\ B=1.139\ 25,\ C=-1.867\ 19$

β_3,β_6: $A=1,\ B=-0.75\ 150,\ C=0.054\ 53$

となり（6）式は結局

$$
\left.\begin{aligned}
\theta_r&=A\beta^r=C_1\beta_1{}^r+C_2\beta_2{}^r+C_3\beta_3{}^r+C_4\beta_4{}^r\\
&\quad+C_5\beta_5{}^r+C_6\beta_6{}^r\\
\theta_r'&=B\beta^r=0.847\ 95C_1\beta_1{}^r+1.139\ 25C_2\beta_2{}^r\\
&\quad-0.751\ 50C_3\beta_3{}^r+0.847\ 95C_4\beta_4{}^r\\
&\quad+1.139\ 25C_5\beta_5{}^r-0.751\ 50C_6\beta_6{}^r\\
\theta_r''&=C\beta^r=0.855\ 63C_1\beta_1{}^r-1.867\ 19C_2\beta_2{}^r\\
&\quad+0.054\ 53C_3\beta_3{}^r+0.855\ 63C_4\beta_4{}^r\\
&\quad-1.867\ 19C_5\beta_5{}^r+0.054\ 53C_6\beta_6{}^r
\end{aligned}\right\}\ (9)
$$

これが局所影響式でさきの特解の補正式となるものである。C なる常数は（2）と（3）の両式を用いて決定する。（3）式は下部の限界条件でこれに（9）式に（4）の特解を加えた一般解から $\theta_{n-1},\ \theta_n,\ \theta_{n-1}',\ \theta_n',\ \theta_{n-1}'',\ \theta_n''$ 等を求めて代入する。この場合（9）式の初めの3項に比し極めて小となり之を省略できるので，結局

$$
\left.\begin{aligned}
&-1.778\ 28\ C_4\beta_4{}^n-1.089\ 77\ C_5\beta_5{}^n\\
&\qquad+9.895\ 97C_6\beta_6{}^n=10n\frac{Wh}{1\ 524EK}\\
&0.089\ 96\ C_4\beta_4{}^n+23.528\ 11\ C_5\beta_5{}^n\\
&\qquad-4.554\ 08C_6\beta_6{}^n=-n\qquad〃\\
&8.228\ 58\ C_4\beta_4{}^n+13.513\ 58\ C_5\beta_5{}^n\\
&\qquad+9.590\ 59C_6\beta_6{}^n=-14n\qquad〃
\end{aligned}\right\}\ (10)
$$

これを解いて

$$
\left.\begin{aligned}
C_4&=-2.494\ 08n\beta_4{}^{-n}\frac{Wh}{1\ 524EK}\\
C_5&=0.077\ 53n\beta_5{}^{-n}\qquad〃\\
C_6&=0.570\ 87n\beta_6{}^{-n}\qquad〃
\end{aligned}\right\}\cdots(11)
$$

従つてラーメン下部の補正式これを $\varDelta\theta$ であらためて表わすと

$$
\left.\begin{aligned}
\varDelta\theta_r&=C_4\beta_4{}^r+C_5\beta_5{}^r+C_6\beta_6{}^r\\
&=(-2.494\ 08\beta_1{}^{n-r}+0.077\ 53\beta_2{}^{n-r}\\
&\qquad+0.570\ 87\beta_3{}^{n-r})n\frac{Wh}{1\ 524EK}\\
\varDelta\theta_r'&=(-2.114\ 85\beta_1{}^{n-r}+0.088\ 33\beta_2{}^{n-r}\\
&\qquad-0.429\ 00\beta_3{}^{n-r})n\qquad〃\\
\varDelta\theta_r''&=(-2.134\ 01\beta_1{}^{n-r}-0.144\ 76\beta_2{}^{n-r}\\
&\qquad+0.031\ 13\beta_3{}^{n-r})n\qquad〃
\end{aligned}\right\}\ (12)
$$

次に（2）式の上部限界条件式に（9）式に（4）式の特解を加えた一般解から $\theta_1,\ \theta_2,\ \theta_1',\ \theta_2',\ \theta_1'',\ \theta_2''$ を求め代入する。この場合には（9）式の第4項以下は省略可能で結局

$$
\left.\begin{aligned}
&-0.178\ 07\ C_1+0.103\ 65C_2\\
&\qquad-1.131\ 50C_3=-10\frac{Wh}{1\ 524EK}\\
&0.009\ 04\ C_1-2.238\ 08C_2\\
&\qquad+0.520\ 71C_3=1\qquad〃\\
&0.592\ 77\ C_1-1.250\ 40C_2\\
&\qquad-1.043\ 11C_3=77.5\qquad〃
\end{aligned}\right\}\ (13)
$$

これを解いて

$$
\left.\begin{aligned}
C_1&=110.9255\frac{Wh}{1\ 524EK}\\
C_2&=-2.0476\qquad〃\\
C_3&=-8.8067\qquad〃
\end{aligned}\right\}\cdots(14)
$$

従つて θ に対する上部の補正式は

$$
\left.\begin{aligned}
\varDelta\theta_r&=(110.9255\beta_1{}^r-2.0476\beta_2{}^r\\
&\qquad-8.8067\beta_3{}^r)\frac{Wh}{1\ 524EK}\\
\varDelta\theta_r'&=(94.0593\beta_1{}^r-2.3327\beta_2{}^r\\
&\qquad+6.6183\beta_3{}^r)\qquad〃\\
\varDelta\theta_r''&=(94.9112\beta_1{}^r+3.8232\beta_2{}^r\\
&\qquad-0.4802\beta_3{}^r)\qquad〃
\end{aligned}\right\}\ (15)
$$

部材廻転角の補正式はこの5張間ラーメンの場合は

$$
\left.\begin{aligned}
\varDelta R_r&=1/6(\varDelta\theta_r+\varDelta\theta_{r+1}+\varDelta\theta_r'\\
&\qquad+\varDelta\theta_{r+1}'+\varDelta\theta_r''+\varDelta\theta_{r+1}'')
\end{aligned}\right\}\cdots(16)
$$

から求められその結果は

$$
\left.\begin{aligned}
&\text{上部補正式}\quad \varDelta R=325.540\beta_1{}^r-0.486\beta_2{}^r\\
&\qquad\qquad-2.196\beta_3{}^r)\frac{Wh}{6\times1\ 524EK}\\
&\text{下部補正式}\quad \varDelta R=(-85.6030\beta_1{}^{n-r}\\
&\qquad-0.1440\beta_2{}^{n-r}-0.8044\beta_3{}^{n-r})n\qquad〃
\end{aligned}\right\}\ (17)
$$

その他の張間数のものに対しても全く同様に求めることができる。いま1張間から4張間のものに対する部材廻転角の一般計算式と補正式を示すと次のごとくである。節点廻転角に関するものは省略する。

1張間ラーメン：　係数: $\dfrac{Wh}{24EK}$

$$
\left.\begin{aligned}
&\text{一般計算式}\quad R_r=3(r-1/2)\\
&\text{上部補正式}\quad \varDelta R_r=3.227\ 47\beta_1{}^r\\
&\text{下部補正式}\quad \varDelta R_r=-1.127\ 02n\beta_1{}^{n-r}
\end{aligned}\right\}\cdots(18)
$$

2張間ラーメン：　係数: $\dfrac{Wh}{6\times60EK}$

$$
\left.\begin{aligned}
&\text{一般計算式}\quad R_r=26(r-1/2)\\
&\text{上部補正式}\quad 28.9034\beta_1{}^r-0.3278\beta_2{}^r\\
&\text{下部補正式}\quad (-8.6894\beta_1{}^{n-r}\\
&\qquad-0.1042\beta_2{}^{n-r})n
\end{aligned}\right\}\cdots(19)
$$

3張間ラーメン：　係数: $\dfrac{Wh}{4\times288EK}$

$$
\left.\begin{aligned}
&\text{一般計算式}\quad R_r=58(r-1/2)\\
&\text{上部補正式}\quad \varDelta R_r=65.140\beta_1{}^r-0.684\beta_2{}^r\\
&\text{下部補正式}\quad \varDelta R_r=(-18.3025\beta_1{}^{n-r}\\
&\qquad-0.2244\beta_2{}^{n-r})n
\end{aligned}\right\}(20)
$$

4張間ラーメン：　係数: $\dfrac{Wh}{1\ 668EK}$

$$
\left.\begin{aligned}
&\text{一般計算式}\quad R_r=64.5(r-1/2)\\
&\text{上部補正式}\quad \varDelta R_r=72.883\beta_1{}^r-0.234\beta_2{}^r\\
&\qquad-0.447\beta_3{}^r\\
&\text{下部補正式}\quad \varDelta R_r=(-19.6728\beta_1{}^{n-r}\\
&\qquad-0.0723\beta_2{}^{n-r}-0.1611\beta_3{}^{n-r}
\end{aligned}\right\}(21)
$$

6張間以上のものには近似的にラーメンの左側より4番目以上の節点の θ は3番目におけるものと等しいと仮定して簡単に解決出来る。この場合には第(1)式中の3番目の式が

$$(2m-4)\theta_{r-1}+12m\theta_r+(2m-4)\theta_{r+1}-\{6\theta_{r-1}'+(10-2m)\theta_r'+6\theta_{r+1}'\}-\{(3m-9)\theta_{r-1}''+(6m-18)\theta_r''+(3m-9)\theta_{r+1}''\}=(S_r+S_{r-1})\frac{h}{2EK} \quad \cdots(22)$$

となり1番目と2番目は同じである。この特解即ち局所影響を考えない一般計算式は

$$\left.\begin{aligned}\theta_r&=33(r-1)\frac{Wh}{2(143m+47)EK}\\ \theta_r'&=23(r-1)\quad〃\\ \theta_r''&=24(r-1)\quad〃\\ R_r&=287(r-1/2)\frac{Wh}{12(143m+47)EK}\end{aligned}\right\}\cdots(23)$$

局所影響の補正式は m の夫々の値を用いて別々に求めることになるがこの補正式から各層における補正値を計算すると張間数 m を任意数として含む式にまとめることができる。即ち5張間ラーメンと無限張間ラーメンに関するものから求めることが出来る。したがつて無限張間のものに関する R の補正値のみを示すと

$$\left.\begin{aligned}&\text{上部補正式}\quad \Delta R=(331.548\beta_1{}^r+2.041\beta_2{}^r-2.283\beta_3{}^r)\frac{Wh}{12(143m+47)EK}\\ &\text{下部補正式}\quad \Delta R=(-76.834\beta_1{}^{n-r}+0.721\beta_2{}^{n-r}-0.947\beta_3{}^{n-r})n\quad〃\end{aligned}\right\}(24)$$

以上の各補正式 β は表―4 にあげたような値である。これ等の補正式中，上部補正式には $r=1,2,\cdots$ 下部補正式には $r=n, n-1,\cdots$ 等と入れて各層の R の補正値を計算し表示しておけば使用に便利であるがこゝには省略した。

表―4　β の値

Values of β

m	β_1	β_2	β_3
1	0.127 017		
2	0.103 71	−0.179 65	
3	0.093 94	−0.164 63	
4	0.088 71	−0.140 61	−0.181 01
5	0.085 51	−0.127 78	−0.176 99
∞	0.071 87	−0.141 07	−0.179 32

次にラーメンの水平変位であるが，任意節点においては，

$$y_r=\sum_r^n R_rh=\sum_r^n \bar{R}_rh+\sum_r^n \Delta R_rh \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(25)$$

こゝに $\bar{R}$ は上下の局所影響を考えぬ時のものである。一般にさきに示したように

$$\bar{R}_r=\left(r-\frac{1}{2}\right)C\frac{Wh}{EK} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(26)$$

の形になつているので第1項は，

$$\sum_r^n \bar{R}h=\sum_1^n \bar{R}_rh-\sum_1^{r-1}\bar{R}_rh$$
$$=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)-\frac{1}{2}(r-1)(r-1+1)-\frac{1}{2}(n-r+1)\right\}C\frac{Wh^2}{EK}$$
$$=\{n^2-r(r-2)-1\}\frac{C}{2}\frac{Wh^2}{EK} \quad \cdots\cdots(27)$$

又第2項は各層の R の補正値を補正式から計算することによつて求められる。これを計算し更に各張間数に対する C を入れると最初にあげた水平変位の一般計算が得られるのである。計算式中第1項の係数は使用の便なるよう分数を小数になおして示した。

ラーメンの上部と下部では次の補正値を加えなければならぬことは明かである。

$$\left.\begin{aligned}&\Delta y_1=\sum_1^r \Delta R_rh,\ \Delta y_2=\sum_2^r \Delta R_rh,\ \Delta y_3=\sum_3^r \Delta R_rh\\ &\Delta y_n=-\sum_r^{n-1}\Delta R_rh,\ \Delta y_{n-1}=-\sum_r^{n-2}\Delta R_rh,\\ &\Delta y_{n-2}=-\sum_r^{n-3}\Delta R_rh\end{aligned}\right\}(28)$$

これ等はすべて R の補正式から計算できる。この結果を表示したのが表―1と表―2である。

次に最上端荷重が W の場合には

$(S_r+S_{r-1})=2\left(r-\frac{1}{2}\right)W$, $(S_n+S_{n-1})=2\left(n-\frac{1}{2}\right)W$

で，上端荷重が $\frac{W}{2}$ の時のこれ等に r と n の代りに夫々 $r+0.5$ と $n+0.5$ としたものに同じになる。従つて上端荷重が $\frac{W}{2}$ なる場合の諸式において r と n の代りに $r+0.5$ と $n+0.5$ を用いればよいことになり，たゞ上部の補正式のみは別に計算する必要がある。さきに用いた $S_1=\frac{1}{2}W$ の代りに $S_1=W$ として同様の計算をするのであるがこゝにはその最後の結果の Δy_r のみを表―3として示した。

固有振動週期の公式誘導には，ラーメンに働く震力と桁から柱に働く曲げモーメントはいづれも連続的に柱にかゝるものと仮定して振動方程式をつくると普通の棒の彎曲振動と剪断振動の合成した形のものが得られこれを解いて求めたのであるがこれに関しては本学会誌 26 巻4号に，より一般的なラーメンについてのべたところで，これに多少改良を加えたのである。

6. 結　語

こゝに提案した計算式によつて等剛比ラーメンに関するかぎり，2,3 層以上のものであればいかなる層数のものでもその変形と固有振動週期を極めて容易に計算することが出来る。又こゝには省略したが水平変位

の式を求める時に使用した θ と R から更に材端曲げモーメントも計算できるが，稿を別にして材端曲げモーメントに関する同様な計算公式をもとめて報告することにしたい。終りにこの研究は昭和 25 年度文部省科学研究費補助費による特殊不静定構造物の応力研究の一部をなすことを附記する。　（昭. 25. 9. 18）

橋脚の振動を考慮せる単桁橋の強制振動

―― 橋梁振動学への函数系の応用 ――

正員　安　部　清　孝*

ON THE APPLICATION OF FUNCTIONAL SYSTEMS FOR VIBRATION OF BRIDGES

――Forced Vibration of Girder Considered with Vibration of it's Pier――

(JSCE March 1951.)

Kiyotaka Abe, C.E.Member

Synopsis It is the main point of this manuscript to solve the problems of vibration of bridge, especially, the problem of impact coefficient or seismic coefficient of bridge due to the deflection of vibration.

At first, we solve the problem of forced vibration of girder considered with vibration of it's pier for the example of the problem of vibration of associative bodies of one domain body.

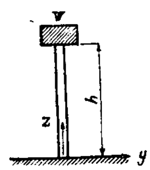
要旨　橋梁振動の問題特に振動変位に基因する衝撃率とか地震々度を求める問題は函数系によつて考究すれば好都合である。即ち一区間振動体（単桁，片持桁等）及びそれらの組合せ振動体並びに多区間振動体（根入れ基礎を考慮した橋脚，連続桁，ゲルバー桁等）の強制振動変位を求める事並びにそれに基因する衝撃率及び震度を求める事等に函数系を用いれば好都合である。本稿においては一区間振動体の組合せ振動体の一例即ち下端において固定された橋脚の振動を考慮に入れた単桁橋の横振動を考え，もつて正弦的地震動を受ける場合の単桁橋の震度を求めよう。

尚実際には橋脚の振動は橋脚基礎の支持状態並びに基礎地盤の状態に多分に左右されるものであつて，根入れ基礎部分も振動若くは揺動するもの即ち二区間体の振動をするものとして考究するのが至当であるがこれに関しては別に発表する事にする。更に単桁振動としては，その最も危険な場合即ち水平に横に振動する場合を考える事にしよう。

I　橋脚の強制振動

橋脚は等断面と仮定し[1)]，脚の頭部には橋体重量の半分 W が作用するものとし，橋脚の等断面二次率，高さ，単位長当りの質量及び重量，弾性係数，第 n 次の固有円振動数を夫々 I, h, ρ, w, E, ν_n とし，強制力の作用円振動数及び時間の変数を ν 及び t とし，強制力は正弦的に作用するものとし，橋脚の単位長当りに作用する強制力を $Y=Y_0\sin\nu t$, $Y_0=\sum_{n=1}^{\infty}q_n\eta_n$ (1) とし，長さの変数を z，橋脚の振動変位を y とすれば，橋脚の強制振動に関する基礎微分方程式は次の如く与えられる。

図―1



$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial z^4}+\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=Y=\sum_{n=1}^{\infty}q_n\,\eta_n\sin\nu t \quad\cdots\cdots(2)$$

茲に

$$\left.\begin{aligned}
&\eta_n=M_n(\cosh\gamma_n\zeta-\cos\gamma_n\zeta)\\
&\qquad-N_n(\sinh\gamma_n\zeta-\sin\gamma_n\zeta)\\
&M_n=\sinh\gamma_n+\sin\gamma_n,\\
&N_n=\cosh\gamma_n+\cos\gamma_n\\
&\gamma_n:\ \frac{1+\cosh\gamma_n\ \cos\gamma_n}{\cosh\gamma_n\sin\gamma_n-\sinh\gamma_n\cos\gamma_n}=\mu\gamma_n\\
&\qquad\text{の正の第 } n \text{ 根}\\
&\mu=\frac{W}{hw}\qquad \zeta=\frac{z}{h}
\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

さて，$t=0$ の時 $y=\frac{\partial y}{\partial t}=0$ なる如き条件を満足する（2）式の解を求めると次の如くなる。

$$y=\frac{1}{\rho}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_n\ \eta_n}{\nu_n^2-\nu^2}\left(\sin\nu t-\frac{\nu}{\nu_n}\sin\nu_n t\right)\quad\cdots\cdots(4)$$

茲に　$$\nu_n=\frac{\gamma_n^2}{h^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho}}\quad\cdots\cdots(5)$$

1)　變斷面の場合には振動學的に等値な等斷面橋脚を求める事は容易である。

*　建設技官，建設省土木研究所勤務