

L. E. Grinter の Grid Analysis

正員 工学博士 横尾 義 貫*

1. は し が き

これは、Hardy Cross の Moment distribution Method の 25周年を記念して、Illinois Institute of Technology の Research Professor of Civil, Engineering and Mechanics である Linton E. Grinter により編集された Numerical Methods of Analysis in Engineering (Successive Corrections); (Macmillan 書房, N. Y. 1949) という一書の一章の紹介である。この書は H. Cross の偉大な功績に敬意を表して In Honor of Hardy Cross の語を冠している。この書の内容とするところは、数値計算に関する欧米における最新の進歩を集成したものであつて、長年戦争のために耳塞がれていたわれわれにとつて、まことに好都合の書であると信ずる。こゝにその分章を掲げて、概容を知る参考とする。

I Numerical Methods Based Upon Physical Concepts.

Chap. 1. Analysis of Continuous Frames by Distributing Fixed-End Moments; Hardy Cross.

Chap. 2. Statistical State of Stress Studied by Grid Analysis; L.E. Grinter.

II Numerical Solutions of Equations for State of Stress.

Chap. 3. Numerical Solutions of Boundary Value Problems by Relaxation Methods; F.E. Shaw.

Chap. 4. The Quest for Accuracy in Computations Using Finite Differences; R.V. Southwell.

Chap. 5. A New Approach to the Numerical Solution of Laplace's Equation;

M. M. Frocht.

III Applications of Numerical Methods to Heat Transfer.

Chap. 6. Numerical Solutions for Thermal Systems; L. M. K. Boelter and Myron Tribus.

Chap. 7. Two Problems in Building Heating Solved Numerically; G. M. Dusinberre.

IV Surveys and Bibliographies of Numerical Methods.

Chap. 8. Successive Corrections—A pattern of Thought; Frank Baron.

Chap. 9. Numerical Methods of Analysis of Bars, Plates and Elastic Bodies; N. M. Newmark.

Chap. 10. A Survey of the Approximate Solution of Two-Dimensional Physical Problems by Variational Methods and Finite Differences Procedures; Thomas J. Higgins.

こゝに紹介しようとするのは、本書の編者である L. E. Grinter による Chap. 2. の Statistical State of Stress Studied by Grid Analysis についてである。なお書き方は必ずしも原文によらず順序その他変更していることを附記しておく。その他の章の内容については、その若干のものについて、筆者の同僚によつて引き続き紹介をする予定である。

2. Grid と Plate との Analogy

こゝにいう板 (Plate) とはその面内に外力、内力が働くいわゆる Scheibe のことで、こゝでは矩形板としておく。いま板の面に縦横に小さな等間隔 L に引いた鉛直線、水平線を材軸線とするような格子状の構造

*京大教授 工学部土木工学教室

物 (Grid) を仮想しこの両者の間に Analogy を成立せるようにできるかどうかを考えてみよう。こゝに諸記号を次のように定めておく。

- L: 格子間隔 t: 板厚
- A: 格子材断面積 I: 格子材断面二次モーメント
- b: 格子材断面巾 (矩形断面として)
- d: 格子材断面高 (")
- σ: 板の直応力度 τ: 板の剪断応力度
- P: 格子材の直応力 Q: 格子材の剪断応力

さて板においては次の3種の変形を生ずる。すなわち、(i) 直応力度によりその作用方向に縦変形
(ii) 直応力度によりその作用方向と直角方向に横変形
(iii) 剪断応力度により剪断変形を生ずる。

これらの3種の変形を格子に reproduce するには格子をどのようなものにすればよいかを考えてみる。

まず縦変形について。

板においては、長Lにつき縦変形は

$$\Delta P = \frac{\sigma}{E} L \dots\dots\dots (a)$$

格子においては、材長Lにつき

$$\Delta G = \frac{PL}{EA} \dots\dots\dots (b)$$

である。いま格子材の軸応力が板のその対応する部分の直応力の合力と等しく、おのおのの縦変形も等しいとすると、すなわち、

$$P = \sigma Lt \quad \Delta P = \Delta G$$

とすると (a), (b) より

$$A = bt = Lt \dots\dots\dots (1)$$

なる関係がえられる。

つぎに横変形については、板においてはσの作用方向と直角方向に

$$\Delta' P = \Delta P \mu \quad \mu: \text{ポアソン比} \dots\dots\dots (c)$$

なる変形を生ずる。格子においては、普通のラーメン構造では例えば縦材の応力により横材は伸縮することはないが、この格子は縦材が応力Pにより ΔP なる変形をすると横材に

$$\Delta' G = \Delta G \mu \dots\dots\dots (d)$$

なる材軸方向の変形を生ずる性質をもっているものとする。このようにすることにより板と格子の横変形に関して Analogy をもたせることができる。

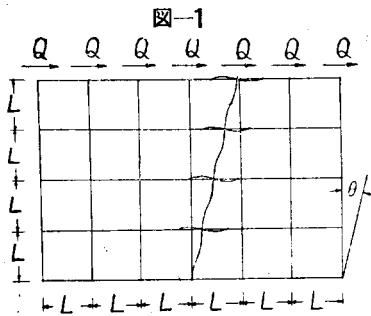
第3に剪断変形について。板においては、

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \dots\dots\dots (e)$$

なる剪断歪を生ずる。この変形は格子においては始め方形であつた格子の目が平行四辺形につぶれることである。このような変形は格子材の剪断変形を考えない

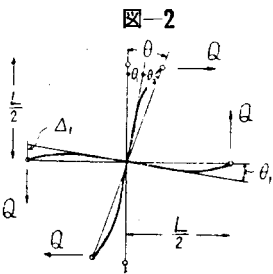
でも、曲げ変形を考えただけでも生ぜしめることができる。そこで格子材は剪断変形は生ぜず曲げ変形のみ生ずる普通のラーメンの部材のように考える。そして縦材、横材のそれぞれの両端の格点を結んだ直線のなす角の変形前と変形後との変化量を板の剪断歪に同じになるように格子材の寸法を定める。

このために、板が単純剪断をうけた場合に対応する図-1のような場合を考えてみる。そうすると各格子材



の中点で曲げモーメントは0となり剪断Qのみが働いている。1つの格点にあつまる4材をそれぞれ

の中点で切り離して取り出すと図-2のような状況で



ある。

図-2において、

$$A_1 = \frac{QL^3}{24EI}$$

したがつて

$$\theta_1 = \frac{A_1}{L/2} = \frac{QL^2}{12EI} = \theta_2$$

$$\therefore \theta = \theta_1 + \theta_2 = \frac{QL^2}{6EI} \dots\dots\dots (f)$$

(e), (f) において、 $Q = \tau Lt, \gamma = \theta$

$$\text{とおくと、} I = \frac{GL^3t}{6E} = \frac{Lt^3}{12(1+\mu)} \dots\dots\dots (2)$$

なる関係をうる。

板格子の剪断変形の Analogy を(2)のようにすることにより持たせることにする。*

(1), (2) より格子材の断面寸法は次のように定まる。

$$d = \sqrt{\frac{L}{1+\mu}} \quad b = t\sqrt{1+\mu} \dots\dots\dots (3)$$

とくに $\mu=0$ とすれば $d=L, b=t$

なお、縦材と横材の断面は同じである。

結局(3)のような断面寸法の格子状ラーメンを考え、軸応力による変形も考慮し、かつ先にのべたような横変形をおこす性質をもつものとすれば、目が細か

*筆者 註: —(2)は単純剪断の場合として導いたものである。一般の場合にも(2)を成立たせるには格子材の中點にピンを挿入した方が Analogy がより完全になると考える。しかし實際上こづることにより大した相異はないのかもしれない。この點筆者は審かにしえぬ。ともかくこゝでは Grinter にしたがひ材は中點にピンを挿入しない様を材としておく。

くなれば、 $P = \sigma A, Q = \tau A$

に近ずき、格点の変位は板の対応点の変位に近くなる。

3. 格子の計算

この格子は軸応力による変形を考慮したラーメンであるので次の3種の Relaxation Methods を適宜の順序に繰返して行えば解ける。すなわち、

(i) 格点の廻転を抑持したまま、格点の鉛直移動のみを生ぜしめる。

(ii) 格点の廻転を抑持したまま、格点の水平移動のみを生ぜしめる。

(iii) 格点の水平、鉛直移動を抑持したまま、格点の廻転のみを生ぜしめる。

第3の場合は明らかにモーメント分配法であるから問題でない。前2者の場合については縦材、横材間の荷重の分配率はつぎのようになる。いま(i)の場合として、

縦材を単位長ちめるに必要な力

$$P = \frac{AE}{L} = tE \dots \dots \dots (g)$$

横材を固定梁として両端の相対鉛直変位を単位長だけ生ぜしめるに必要な剪断力は

$$Q = \frac{12EI}{L^3} = \frac{tE}{1+\mu} \dots \dots \dots (h)$$

ゆえに縦材と横材との間に荷重は次の比により分配されねばならぬ。

$$\text{縦材: } 1 \quad \text{横材: } \frac{1}{1+\mu}$$

横変形の計算についてはここに詳述しないがポアソン比が一般に小であるから大した精度を要せず、場合によっては最後に修正として行えば充分である。

4. STRAIN JUSTIFICATION

上に格子の計算の原理を略述したが、支えられた荷重から出発して上記の弛緩法を行うと収斂が遅い。収斂を促進させるには、Block Movement, Relative Movement 等の方法もあるが、一般にこの場合直応力を適当に仮定するのが簡便である。そして、まず例えば縦材直応力の仮定値から格点の鉛直変位、構材の剪断力を計算し、材端モーメントを求め、極めて荒い計算で格点のモーメントを分配してから縦方向の釣合 $\sum V = 0$ を各格点で吟味してみる。満足されなければ仮定値を改めてこれを繰返えし釣合が殆んど到達されるまでおこなう。このようにして問題の如何により1あるひは2方向の直応力の仮定値の改善をはかる。この課程を Grinter は Strain Justification という語であらわしている。

このような課程を経て直応力の仮定値を定めると、Relaxation の計算の収斂は非常に早まる。なお算例として周辺自由な矩形板の中心線上に溶接により収縮が生じた場合の解および A.J. Pyka による Notched Beam の解を掲げてある。

おわりに Grinter が冒頭に強調している点につき附記する。Grid Analysis によつてえられた結果は板の弾性理論からえられる結果とは異なる。しかし後者は理想的な均質、等方、連続な材料とした時の点応力を与えるが、前者は、格子材間隔が適当であれば、破壊前の准弾性域における、材間隔における Statistical Stress を与えるもので、後者よりも有益な値を与えるとしている。このような見地から Statistical State of Stress という表題を附している。

鉄筋コンクリート舗道における応力測定

正員 成 岡 昌 夫*

本文はイリノイス道路局の技師 H.W. Russell 氏が道路研究局の第27回年次大会に提出した論文中、鉄筋コンクリート中の鉄筋の応力、歪の測定に関する部分の要を Baldwin Locomotive Works の Testing Topics, Vol. 3, No. 2, April-May 1948 より抄録したものである。

アメリカにおいては最近応力測定法の一つとして、Baldwin Locomotive Works の SR-4 歪計が非常に多く用いられ、これを用いた実験が近著各種文献においてしばしば見受られる。これについて筆者は多少の紹介を本誌第35巻第9月資料欄にのせておいたので

*京都大学助教授、工学部土木工学教室

あるが更にこれの新しい応用を紹介致したい。

近年道路技術者は横目地も中央目地もなく、直接自然土壌の上に敷設した連続鉄筋コンクリート舗道をつくる考に興味をいざしくようになって来た。このようにすると砂利で置換えるとか、特種の路盤処理をすることなどが省略出来る。この型式の構造では、舗道が路盤の上を滑るとか、路盤がコンクリート床版とともに弾性的に動くことが要求される。龜裂の発生は当然予期されることであるが、適当に補強しておけば、このような龜裂は非常に小さいものであるから舗道は損傷をうけないものと考えられる。この型式の構造を試験するためにイリノイス州では約5.5マイルの実験舗道