資料

不規則断面の一次率及び二次率の加法のみによる数値計算法

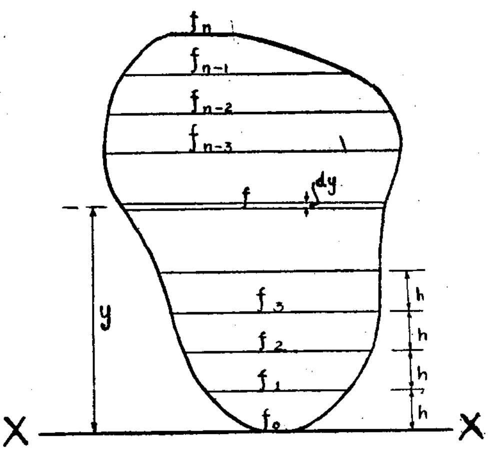
1. 序　土木構造物に限らず，一般の工学上，一次率及び二次率を計算しなければならない場合は非常に多い。その場合，一般の不規則断面の場合には数値積分によらなければならないが，従来の図式計算では精度が不足するし，又微小部分に分けて，その面積と，軸よりの距離及び距離の自乗との積を加算する方法はすこぶる煩雑であり，計算の誤りをなす率も多く，且つ精度も割合に悪い。

よつてこゝに加法及び最後に簡単なる係数を乗ずることのみで算出する方法を案出した。又，この方法は測定された点の中間は二次変化と仮定され，シンプソンルールに依つてゐる。

尚本方法に関して，懇切なる指導と助言とをたまわつた柴田直光氏に深く感謝する次第である。

2. 計算方法　本方法は，**図—1** の如く断面を各間隔 h 毎に n 等分（n は偶数）してその横距を $f_0, f_1, f_2 \cdots f_{n-1}, f_n$ とする。

図—1



表—1 の如く横距 f を並べ次の欄に面積の項として最上部は $\frac{1}{2}f_n+f_{n-1}$ その次よりは $f_{n-1}+f_{n-2}+f_{n-3}$, $f_{n-3}+f_{n-4}+f_{n-5}$, ……, $f_5+f_4+f_3$, $f_3+f_2+f_1$ と一つ当重複せしめて，3ケづつ加えたものを書く。最後は最初と同じく $f_1+\frac{1}{2}f_0$ とする。之を全部加算したものを a とすれば，面積は $A=\frac{2}{3}ha$ で現わされる。

面積の項に書いた数値を $a_n, a_{n-2}, a_{n-4} \cdots\cdots a_4, a_2, a_0$ で現わすと，次の一次率の項は，第1段は空欄とし，第2段に $a_n=g_{n-2}$ を，第3段に第2段の g_{n-2} とその右の欄の a_{n-2} との和 $g_{n-2}+a_{n-2}=g_{n-4}$ を，同様にして第4段に $g_{n-4}+a_{n-4}=g_{n-6}$ の如く $g_{n-8} \cdots\cdots g_4, g_2, a_2+g_2=g_0$ 迄記入する。この項を g_{n-2} より g_0 迄加算せるものを g とすれば，一次率は

$$G=\frac{4}{3}h^2 \cdot g \quad \text{で現はされる。}$$

二次率は，一次率の場合と同様の手数で $g_{n-2}=j_{n-4}$, $j_{n-4}+g_{n-4}=j_{n-4}$　$j_{n-4}+g_{n-4}=j_{n-6}$, ……… $j_4+g_4=j_2$, $j_2+g_0=j_0$ を作り j_{n-4} より j_0 迄加算して之を J とする。又別に奇数番の横距 $f_{n-1}, f_{n-3}, f_{n-5}, \cdots\cdots f_5, f_3\ f_1$ を書き出し之の和を m とすると，

二次率は $I=\frac{8}{3}h^3(2J+g-\frac{1}{2}m)$ で現はされる。

この m の項は通常分割数を，十数等分以上にすれば1%以下，二十等分以上の場合は0.5%以下となる。

表—1 には以上の計算順序を矢を以て示してある。

表—2 には半径1なる四分円を計算したる場合で，（　）の中に真の積分値を示してある。

3. 上記方法の証明　**図—1** について，面積一次率及び二次率は，それぞれ次式

$$A=\int_0^k f dy,\ G=\int_0^k fy dy,\ I=\int_0^k fy^2 dy$$

で現わされるが，$y=0, h, 2h \cdots\cdots nh$ 点の f, fy, fy^2 は次の如く現わされる。

y	f	fy	fy^2
0	f_0	0	0
h	f_1	hf_1	h^2f_1
$2h$	f_2	$2hf_2$	$2^2h^2f_2$
⋮	⋮	⋮	⋮
$(n-1)h$	f_{n-1}	$(n-1)hf_{n-1}$	$(n-1)^2h^2f_{n-1}$
nh	f_n	nhf_n	$n^2h^2f_n$

之等を用ひ，各点の中間点は二次変化をなすものとしてシンプソンルールによつて積分すれば

$$A=\frac{h}{3}\Big[(f_0+f_n)+4(f_1+f_3+f_5+\cdots+f_{n-3}+f_{n-1})+2(f_2+f_4+\cdots+f_{n-2})\Big]$$

$$G=\frac{h}{3}\Big[(0+nhf_n)+4\{hf_1+3hf_3+5hf_5+\cdots(n-3)hf_{n-3}+(n-1)hf_{n-1}\}+2\{2hf_2+4hf_4+\cdots+(h-2)hf_{n-2}\}\Big]$$

$$=\frac{h^2}{3}\Big[nf_n+4\{f_1+3f_3+5f_5+\cdots(n-3)f_{n-3}+(n-1)f_{n-1}\}+2\{2f_2+4f_4+\cdots+(n-2)f_{n-2}\}\Big]$$

$$I=\frac{h}{3}\Big[(0+n^2h^2f_n)+4\{h^2f_1+3^2h^2f_3+\cdots+(n-3)^2h^2f_{n-3}+(n-1)^2h^2f_{n-1}\}+2\{2^2h^2f_2+4^2h^2f_4+\cdots+(n-2)^2h^2f_{n-2}\}\Big]$$

$$=\frac{h^3}{3}\Big[n^2f_n+4\{f_1+3^2f_3+5^2f_5+\cdots+(n-3)^2f_{n-3}+(n-1)^2f_{n-1}\}+2\{2^2f_2+4^2f_4+\cdots+(n-2)^2f_{n-2}\}\Big]$$

となる，

又，上記方法にて計算せる結果は

$$a=\frac{1}{2}(f_0+f_n)+2(f_1+f_3+f_5+\cdots+f_{n-5}+f_{n-3}+f_{n-1})+(f_2+f_4+\cdots+f_{n-4}+f_{n-2})$$

$$\therefore\ \frac{2}{3}h\cdot a=\frac{h}{3}\Big[(f_0+f_n)+4(f_1+f_3+f_5\cdots+f_{n-5}+f_{n-3}+f_{n-1})+2(f_2+f_4+\cdots f_{n-4}+f_{n-2})\Big]$$

$$g=\frac{1}{4}nf_n+\{f_1+3f_3+5f_5+\cdots(n-3)f_{n-3}+(n-1)f_{n-1}\}+\frac{1}{2}\{2f_2+4f_4+6f_6+\cdots+(n-4)f_{n-4}+(n-2)f_{n-2}\}$$

$$\therefore\ \frac{4}{3}h^2g=\frac{h^2}{3}\Big[nf_n+4\{f_1+3f_3+\cdots+(n-3)f_{n-3}+(n-1)f_{n-1}\}+2\{2f_2+4f_4+6f_6+\cdots+(n-4)f_{n-4}+(n-2)f_{n-9}\}\Big]$$

$$J=\frac{n}{8}\Big(\frac{n}{2}-1\Big)f_n+\{f_3+2^2f_5+3^2f_7+\cdots\cdots+\Big(\frac{n}{2}-2\Big)^2f_{n-3}+\Big(\frac{n}{2}-1\Big)^2f_{n-1}\}+\frac{1}{2}\{f_4+3f_6+6f_8+\cdots+\Big(\frac{n}{2}-3\Big)\Big(\frac{n}{2}-2\Big)f_{n-4}+\Big(\frac{n}{2}-2\Big)\Big(\frac{n}{2}-1\Big)f_{n-2}\}$$

$$\therefore\ \frac{3}{8}h^3\Big(2J+g-\frac{1}{2}m\Big)=\frac{h^3}{3}\Big[n^2f_n+4\{f_1+3^2f_3+5^2f_5+\cdots+(n-3)^2f_{n-3}+(n-1)^2f_{n-1}\}+2\{2^2f_2+4^2f_4+\cdots(n-2)^2f_{n-2}\}\Big]$$

となり，シンプソン・ルールにより積分せるものと全く一致する。

表―1

y	f	A	G	I	
n	f_n	$\frac{1}{2}f_n+f_{n-1}=a_n$			
n-1	f_{n-1}				f_{n-1}
n-2	f_{n-2}	$f_{n-1}+f_{n-2}+f_{n-3}=a_{n-2}$	$a_n=g_{n-2}$		
n-3	f_{n-3}				f_{n-3}
n-4	f_{n-4}	$f_{n-3}+f_{n-4}+f_{n-5}=a_{n-4}$	$g_{n-2}+a_{n-2}=g_{n-4}$	$g_{n-2}=j_{n-4}$	
n-5	f_{n-5}				f_{n-5}
n-6	f_{n-6}	$f_{n-5}+f_{n-6}+f_{n-7}=a_{n-6}$	$g_{n-4}+a_{n-4}=g_{n-6}$	$j_{n-4}+g_{n-4}=j_{n-6}$	
n-7	f_{n-7}				f_{n-7}
n-8	f_{n-8}	$f_{n-7}+f_{n-8}+f_{n-9}=a_{n-8}$	$g_{n-6}+a_{n-6}=g_{n-8}$	$j_{n-6}+g_{n-6}=j_{n-8}$	
n-9	f_{n-9}				f_{n-9}
n-10	f_{n-10}	$f_{n-9}+f_{n-10}+f_{n-11}=a_{n-10}$	$g_{n-8}+a_{n-8}=g_{n-10}$	$j_{n-8}+g_{n-8}=j_{n-10}$	
n-11	f_{n-11}				
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
5	f_5				f_5
4	f_4	$f_5+f_4+f_3=a_4$	$g_6+a_6=g_4$	$j_6+g_6=j_4$	
3	f_3				f_3
2	f_2	$f_3+f_2+f_1=a_2$	$g_4+a_4=g_2$	$j_4+g_4=j_2$	
1	f_1				f_1
0	f_0	$f_1+\frac{1}{2}f_0=a_0$	$g_2+a_2=g_0$	$j_2+g_2=j_0$	
	Σ	a	g	J	m

$A=\frac{2}{3}h\,a$

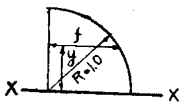
$G=\frac{4}{3}h^2g$

$I_X=\frac{8}{3}h^3\Big(2J+g-\frac{1}{2}m\Big)$

$I_N=\frac{8}{3}h^3\Big(2g+g-\frac{1}{2}m-\frac{g^2}{a}\Big)$

$=I_X-\frac{8}{3}h^3\frac{g^2}{a}$

表―2



x	y	A	G	I	
1.0	.0000	.3122			
.95	.3122				.3122
.90	.4359	1.2748	.3122		
.85	.5268				.5268
.80	.6000	1.7882	1.5870	.3122	
.75	.6614				.6614
.70	.7141	2.1354	3.3752	1.8992	
.65	.7599				.7599
.60	.8000	2.4751	5.5106	5.2744	
.55	.8352				.8352
.50	.8660	2.5942	7.9857	10.7850	
.45	.8930				.8930
.40	.9165	2.7492	10.5799	18.7707	
.35	.9397				.9397
.30	.9539	2.8618	13.3291	29.3506	
.25	.9682				.9682
.20	.9798	2.9367	16.1909	42.6797	
.15	.9887				.9887
.10	.9950	2.9824	19.1276	58.8706	
.05	.9987				.9987
.00	1.0000	1.4987	22.1100	77.9982	
	Σ	23.6087	100.1082	245.9406	7.8838

$A=\frac{2}{3}\times\frac{1}{20}\times23.6087=0.78696$　(0.7854)

$G=\frac{4}{3}\times\Big(\frac{1}{20}\Big)^2\times100.1082=0.333694$　(0.3333)

$I=\frac{8}{3}\times\Big(\frac{1}{20}\Big)^3\times\Big\{245.9406\times2+100.1082-7.8838\times\frac{1}{2}\Big\}=0.19602$

(0.1963)

註( )は真値

（鹿島建設企画監査部第２部　村田　保）