

# 自動車の内側車輪の走行軌跡について

正員 樋 渡 正 美\*

## ON THE INSIDE WHEEL-TRACKS OF AN AUTOMOBILE

(JSCE July 1950)

Masami Hiwatashi, C. E. Member

**Synopsis** When an automobile changes its direction, the inside wheels describe various curves according to the management of handle, speed of car and interval between foreward and backward wheel. Especially, it is important factor how to manage the handle. I have induced here the equations of the curves described by the inside wheels on the assumption that revolution angle of the handle is proportional to  $n$ -power of time, and then decided the values of  $n$  and proportional constant  $k$  with the records and practical measurements. I explained about its applications, because the management of an automobile would become rational if these curves were used to a street corner or a hair-pin curve.

**要 旨** 自動車が方向変換をする場合その内側車輪の画く走行軌跡はハンドルの操作、自動車の速サ及び前後輪の間隔に依つて変化するが、此等の中ハンドルの操作は最も重要な要素であるから、筆者はハンドルの廻転角が時間の  $n$  乗に比例するものとして走行曲線を表わす式を導き、文献及び実測に依つて  $n$  と比例常数  $k$  とを定めた。尚街角やヘアピン曲線への応用について述べた。

### 1. 算式の誘導

#### (1) 内側後輪の走行曲線

図-1 に於て  $\varphi$  は内側前輪の方向角、 $l$  は軸間距離  $\rho$  は走行曲線の曲率半径、 $\theta$  は螺旋角、 $s$  は曲線長、

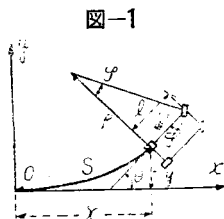


図-1

$x$  及び  $y$  は夫々横距及び縦距を示す。一般に

$$\rho = \frac{ds}{d\theta} \quad \dots\dots(1)$$

従つて

$$\rho = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dt}{d\theta} = v \frac{dt}{d\theta}$$

$$\therefore d\theta = \frac{v}{\rho} dt$$

此処に  $v$  は内側後輪の速サ、 $t$  は経過時間、又図-1 より

$$\rho = l \cot \varphi \quad \therefore d\theta = \frac{v}{l} \tan \varphi dt \quad \dots\dots(2)$$

次に (1) 式から

$$ds = \rho d\theta = v dt \quad \dots\dots(3)$$

$$dx = ds \cos \theta = \rho \cos \theta d\theta = v \cos \theta dt \quad \dots\dots(4)$$

$$dy = ds \sin \theta = \rho \sin \theta d\theta = v \sin \theta dt \quad \dots\dots(5)$$

さて自動車が街角等を曲る場合にはブレーキをかけるのが普通であるが、燃料その他経済的な損失を来すから出来得ればブレーキを踏まない事が望ましい。従つて此処では  $v$  を一定とし且つ、

$$\varphi = kt^n \quad \dots\dots(6)$$

にて表わされるものとする。然る時は (3) 式より

$$s = \int v dt = vt \quad \dots\dots(7)$$

(2) 式より

$$\theta = \frac{v}{l} \int \tan(kt^n) dt = \frac{sp}{l} \left\{ \frac{1}{n+1} + 3 \frac{\varphi^2}{(3n+1)} + \frac{2\varphi^4}{15(5n+1)} + \frac{17\varphi^6}{315(7n+1)} + \frac{62\varphi^8}{835(9n+1)} + \dots\dots \right\} \quad \dots\dots(8)$$

(4) 式より

$$x = v \int \cos \theta dt = v \int \left( 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24} - \frac{\theta^6}{720} + \frac{\theta^8}{40320} - \dots\dots \right) dt$$

上式の  $\theta$  に (8) 式を代入して積分すると

$$x = s \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{sp}{l} \right)^2 \left\{ \frac{1}{(n+1)^2(2n+3)} + \frac{2\varphi^2}{3(n+1)(3n+1)(4n+3)} + \frac{5(n+1)(5n+1)+12(3n+1)^2}{45(n+1)(3n+1)^2(5n+1)(6n+3)} \varphi^4 + \dots\dots \right\} + \frac{1}{24} \left( \frac{sp}{l} \right)^4 \left\{ \frac{1}{(n+1)^4(4n+5)} + \frac{4\varphi^2}{3(n+1)^3(3n+1)(6n+5)} + \frac{30(n+1)(5n+1)+24(3n+1)^2}{45(n+1)^3(3n+1)^2(5n+1)(8n+5)} \varphi^4 + \dots\dots \right\} - \frac{1}{720} \left( \frac{sp}{l} \right)^6 \left\{ \frac{1}{(n+1)^6(6n+7)} + \frac{6\varphi^2}{3(n+1)^5(3n+1)(8n+7)} + \frac{75(n+1)(5n+1)+36(3n+1)^2}{45(n+1)^5(3n+1)^2(5n+1)(10n+7)} \varphi^4 + \dots\dots \right\} + \frac{1}{40320} \left( \frac{sp}{l} \right)^8 \left\{ \frac{1}{(n+1)^8(8n+9)} + \frac{8\varphi^2}{3(n+1)^7(3n+1)(10n+9)} \right\} \right]$$

\* 神戸工業専門学校教授

$$+ \left. \frac{140(n+1)(5n+1)+48(3n+1)^2}{45(n+1)^2(3n+1)^2(5n+1)(12n+9)} \varphi^4 + \dots \right\} - \dots \dots (9)$$

同様にして (5) 式から

$$y = v \int \sin \theta dt = v \int \left( \theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^5}{120} - \frac{\theta^7}{5040} + \dots \right) dt$$

$$= s \left[ \left( \frac{s\varphi}{l} \right) \left\{ \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{\varphi^2}{3(3n+1)(3n+2)} + \frac{2\varphi^4}{15(5n+1)(5n+2)} + \frac{17\varphi^6}{315(7n+1)(7n+2)} + \dots \right\} - \frac{1}{6} \left( \frac{s\varphi}{l} \right)^3 \left\{ \frac{1}{(n+1)^3(3n+4)} + \frac{3\varphi^2}{3(n+1)^2(3n+1)(5n+4)} + \frac{15(n+1)(5n+1)+18(3n+1)^2}{45(n+1)^2(3n+1)^2(5n+1)(7n+4)} \varphi^4 + \dots \right\} + \frac{1}{120} \left( \frac{s\varphi}{l} \right)^5 \left\{ \frac{1}{(n+1)^5(5n+6)} + \frac{5\varphi^2}{3(n+1)^4(3n+1)(7n+6)} + \frac{50(n+1)(5n+1)+30(3n+1)^2}{45(n+1)^4(3n+1)^2(5n+1)(9n+6)} \varphi^4 + \dots \right\} - \frac{1}{5040} \left( \frac{s\varphi}{l} \right)^7 \left\{ \frac{1}{(n+1)^7(7n+8)} + \frac{7\varphi^2}{3(n+1)^6(3n+1)(9n+8)} + \frac{105(n+1)(5n+1)+42(3n+1)^2}{45(n+1)^6(3n+1)^2(5n+1)(11n+8)} \varphi^4 + \dots \right\} + \dots \dots \right] \dots \dots (10)$$

(2) 内側前輪の走行曲線

$\rho'$  は前輪が画く走行曲線の曲率半径,  $\theta'$  はその螺旋角,  $s'$  は曲線長,  $x'$  及び  $y'$  は夫々横距及び縦距を示す。

図-2 より

$$x' = x + l \cos \theta - l \dots \dots (11)$$

$$y' = y + l \sin \theta \dots \dots (12)$$

今内側前輪の速さを  $v'$  で表わすと

$$v' = \frac{ds'}{dt} = v \sec \varphi \dots \dots (13)$$

$$\therefore s' = v \int \sec(kt^n) dt = s \left\{ 1 + \frac{\varphi^2}{2(2n+1)} + \frac{5\varphi^4}{24(4n+1)} + \frac{61\varphi^6}{720(6n+1)} + \frac{1385\varphi^8}{40 \cdot 320(8n+1)} + \dots \dots \right\} \dots \dots (14)$$

$\theta' = \theta + \varphi$  であるから,

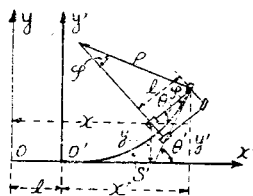


図-2

$$\frac{d\theta'}{dt} = \frac{d\theta}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} = \frac{v}{l} \tan \varphi + nk t^{n-1}$$

従つて

$$\rho' = \frac{ds'}{d\theta'} = \frac{ds'}{dt} \cdot \frac{dt}{d\theta'} = \frac{ls}{s \sin \varphi + n l \varphi \cos \varphi} \dots \dots (15)$$

2. 走行曲線の計算

自動車が行中その方向を変える時内側前輪及び後輪が画く軌跡の座標を与える(11), (12) 式及び(9), (10)式は後輪の速さ  $v$ , 軸間距離  $l$ , 方向角  $\varphi$  の3つが定まれば計算できる。此の内  $v$  は人為的に自由に変える事が出来るが,  $l$  は小型で 2 m, 大型で 4 m 位である。此処では貨物車を標準に採つて  $l=4m$  とする。次に  $\varphi$  の値は筆者が実測に使用した貨物自動車の場合左曲り最大 35°, 右曲り最大 42° であつた。一般に  $\varphi$  の最大値は自動車の種類に依つて異なるが大約 35°~45° であると云う。 $\varphi$  が時間の経過と共に如何なる変化を為すかは運転の状態に従ひ色々変わるけれども此処では(6)式で表わされるものとする。(6)式に於ける  $k$  及び  $n$  の値を決めるには実測以外に方法がない。

表-1

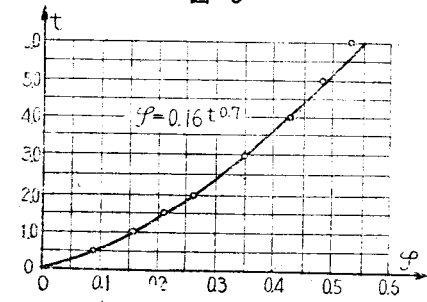
経過時間(秒)	0.5	1.0	1.5	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0
ハンドル廻転角	90°	160°	220°	270°	360°	440°	503°	550°
前輪の方向角	0.523	0.851	0.223	0.368	0.7891	0.224	0.4577	0.5333
$\varphi$	0.165t <sup>0.7</sup>	0.0785	0.1660	0.2273	0.2876	0.3453	0.4222	0.4736

を示す。これは各々の角度に対する 10 回以上の平均値であつて方向角はハンドル廻転角の約 1/18 であつたと云う。此等の実測値を用いて  $k$  及び  $n$  の値を計算すると夫々約 0.16 及び 0.7 となる。経過時間に対する方向角の値を求めグラフに示すと図-3 を得る。図中の○印は実測値である。尙筆者の実測では  $n=0.7$  とすれば  $k=0.13 \sim 0.25$  と云う値が出た。

さて此処で  $n$  を 0.7 に採ると (8), (9), (10) 及び (14) の各式から走行曲線の式は次の様になる。

$$\theta = \frac{s\varphi}{l} (0.5882 + 0.1075\varphi^2 + 0.0296\varphi^4 + 0.0091\varphi^6 + 0.0030\varphi^8 + \dots) \dots \dots (8')$$

図-3

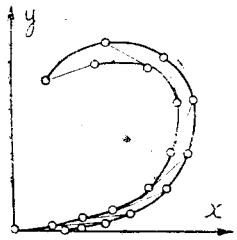


$$x = s \left[ 1 - \frac{1}{20} \left( \frac{sp}{l} \right)^2 \left\{ 0.7854 + 0.2181\varphi^2 \right. \right. \\ \left. \left. + 0.0645\varphi^4 + \dots \right\} + \frac{1}{240} \left( \frac{sp}{l} \right)^4 \left\{ 0.1535 \right. \right. \\ \left. \left. + 0.0952\varphi^2 + 0.0454\varphi^4 + \dots \right\} - \frac{1}{72\,000} \left( \frac{sp}{l} \right)^6 \right. \\ \left. \left\{ 0.3599 + 0.3607\varphi^2 + 0.2378\varphi^4 + \dots \right\} \right. \\ \left. + \frac{1}{4\,032\,000} \left( \frac{sp}{l} \right)^8 \left\{ 0.0982 + 0.1310\varphi^2 \right. \right. \\ \left. \left. + 0.1103\varphi^4 + \dots \right\} - \dots \right] \quad \dots(9')$$

$$y = s \left[ \left( \frac{sp}{l} \right) \left\{ 0.2179 + 0.0262\varphi^2 + 0.0054\varphi^4 \right. \right. \\ \left. \left. + 0.0013\varphi^6 + \dots \right\} - \frac{1}{60} \left( \frac{sp}{l} \right)^3 \left\{ 0.3337 \right. \right. \\ \left. \left. + 0.1488\varphi^2 + 0.0575\varphi^4 + \dots \right\} + \frac{1}{12\,000} \left( \frac{sp}{l} \right)^5 \right. \\ \left. \left\{ 0.7413 + 0.5906\varphi^2 + 0.3356\varphi^4 + \dots \right\} \right. \\ \left. - \frac{1}{504\,000} \left( \frac{sp}{l} \right)^7 \left\{ 0.1889 + 0.2181\varphi^2 \right. \right. \\ \left. \left. + 0.1637\varphi^4 + \dots \right\} + \dots \right] \quad \dots(10')$$

$$s' = s \left[ 1 + 0.2083\varphi^2 + 0.0548\varphi^4 + 0.0163\varphi^6 \right. \\ \left. + 0.0052\varphi^8 + \dots \right] \quad \dots(14')$$

$v=10\text{km/h}$ ,  $l=4\text{m}$ ,  $\varphi=0.16t^{0.7}$  なる時  $\varphi$  の種々なる値に対応する  $t, s, \rho, \theta, x, y$  等を求めたものが表



角に対する前後輪の位置を示している。

図-4

—2 である。此の表から自動車の方向転換時に於ける前後輪の運動状態がよくわかる。図-4 は走行軌跡を示す。内側が後輪の軌跡、外側が前輪の軌跡である。○印は夫々の方向

表-2

	$V = 10 \text{ km/h}$		$l = 4 \text{ m}$		$\varphi = 0.16t^{0.7}$					
方向角 $\varphi$	5°00'	10°00'	15°00'	20°00'	25°00'	30°00'	35°00'	40°00'	45°00'	
経過時間 sec	6.421	1.132	2.020	3.008	4.192	5.439	6.779	8.204	9.707	
速度 $v$ (km/h)	10.04	10.15	10.35	10.64	11.03	11.55	12.21	13.05	14.14	
曲線長 (m)	S	1.19	3.14	5.61	8.47	11.64	15.11	18.83	22.77	26.56
"	S	1.17	3.16	5.69	8.69	12.13	16.04	20.45	25.45	31.11
曲率半径 (m)	$\rho$	45.72	22.68	14.73	10.99	8.58	6.93	5.71	4.77	4.00
"	$\rho'$	13.53	12.25	10.39	8.88	7.73	6.85	6.17	5.65	5.23
螺旋角 $\theta$	$\theta$	6.52	4.37	2.92	2.57	4.42	7.017	10.418	14.752	20.243
"	$\theta'$	5.52	4.37	2.92	4.57	6.922	10.017	13.918	18.752	24.743
横距 (m)	$x$	1.17	3.14	5.58	8.28	10.88	12.77	12.77	10.73	6.75
"	$x'$	1.17	3.13	5.49	7.87	9.74	10.12	7.78	3.34	-0.75
縦距 (m)	$y$	0.01	0.09	0.45	1.36	3.16	6.04	9.51	12.88	13.17
"	$y'$	0.07	0.42	1.32	3.07	5.95	7.80	13.38	15.01	11.63

3. 街角への応用

自動車が四つ角を廻るのを見ていると先づブレーキを掛けて速力を落とし一旦反対方向にハンドルをきり、それから徐々に目的方向にきる。運転手の話ではそうしないと後輪が前輪より内側を通る為隅角にぶつかるといふ。そこで街角を内側後輪の軌跡と同じ様に剪除して置けば運転も便利になる速力をゆるめる必要もない。今一例として自動車が交角 90° なる街角を 20km/h の速力で廻り得る様な曲線の設置を考えて見よう。但し軌間距離は貨物車を標準に採つて 4m とし方向角の最大限は 35° とする。尙土地の利用上街角剪除は成る可く小さくしたいからハンドルを出来る限り急速に廻して貰う事にして此処では  $\varphi=0.20t^{0.7}$  とする。

さて一般に自動車が屈曲部を走行する場合の遠心力による横滑りに関しては久野博士が

$$\rho = \frac{v^2}{g} \frac{a-fi}{f+ai} \quad \dots(16)$$

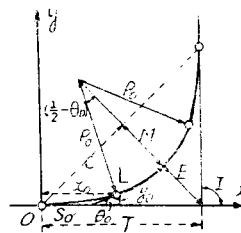
なる式を導かれて居る。(土木学会誌第20巻第2号)

(16) 式に於て  $\rho$  は曲率半径,  $v$  は速力,  $g$  は重力の加速度,  $a$  は横滑りに対する安全率,  $f$  は同じく摩擦係数,  $i$  は横断勾配である。街角は通常舗装され排水の為に 2% 位の横断勾配をつける。又ゴムタイヤと舗装道路との摩擦係数は 0.4 位である。今  $v=20\text{km/h}$ ,  $g=9.8\text{m/sec}^2$ ,  $a=2$ ,  $f=0.4$ ,  $i=0.02$  とすれば (16) 式より  $\rho=14.26\text{m}$  を得る。此れは自動車の重心の位置に於ける曲率半径であるから内側後輪ではそれよりも小さく 14m を最小半径  $\rho_0$  と考えて差し支えない。従つて此の場合の最大方向角  $\varphi_0$  は

$$\varphi_0 = \tan^{-1} \left( \frac{l}{\rho_0} \right) = 15^\circ 57'$$

此れは方向角の極限 35° よりも小さい。表-3 に  $\varphi$  の種々なる値に対する  $t, s, \theta, x, y$  が示してある。結局求むる曲線は図-5 に示す如く半径 14m なる円曲線の前後に緩和曲線を挿入した様な恰好となる。図-5 に於て  $s_0, \theta_0, x_0, y_0$  は夫々  $\varphi$  が 15°57' なる時の曲線長, 螺旋角, 横距, 縦距であり, 此処から自動車

図-5



はハンドルをその儘にして廻転する。又線の切線長  $T$ , 外線長  $E$ , 中央縦距  $M$ , 半長弦  $C$ , 及び曲線長  $L$  の値は次の様である。

$$T = x_0 + y_0 \tan \frac{I}{2} + \rho_0 \sin \left( \frac{I}{2} - \theta_0 \right) \sec \frac{I}{2}$$

$$= 17.97m$$

$$E = (\rho_0 \cos \theta_0 + y_0) \sec \frac{I}{2} - \rho_0 = 6.16m$$

$$M = T \sin \frac{I}{2} - E = 6.55m$$

$$C = T \cos \frac{I}{2} = 12.71m$$

$$L = s_0 + \rho_0 \left( \frac{I}{2} - \theta_0 \right) = 14.73m$$

此等の値及び表-3 を用いると曲線を設置する事が出来る。

表-3.

V=20 km/h, l=4m, ϕ=0.20 <sup>t0.7</sup>					
ϕ	5°00'	10°00'	13°00'	15°57'	
t(Δec)	0.306	0.823	1.197	1.603	
S(m)	1.70	4.57	6.65	8.91	
θ	1°15'	6°46'	12°25'	21°11'	
χ(m)	1.70	4.57	6.61	8.77	
ψ(m)	0.01	0.20	0.55	1.20	

4. 反方向曲線の応用

反方向曲線は通常山腹等地形急峻な箇所 に設けられる。従つて運転を誤れば谷底へ墜落したりする危険があるからハンドルの廻転速度にも充分余裕を見込んで置く事が必要である。此処では ϕ=0.15<sup>t0.7</sup> とし交角 20°自動車 の速 10 km/h なる場合に設置すべき曲線を求めて見よう。尚軸間距離は 4 m とし方向角の最大限を 35°とする。今全体が一つの曲線にて形成されるものと仮定し、最大螺旋角

$$\theta_0 = \frac{I}{2} = 100^\circ$$

に対する ϕ の値を (8') 式より試算法で算出すると

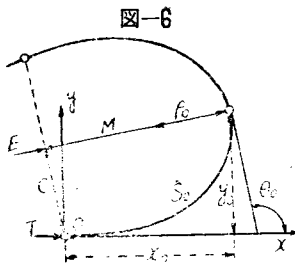
$$\phi_0 = 33^\circ 13'$$

を得る。此れは方向角の極限値 35° よりも小さい。故に最大曲率半径 ρ<sub>0</sub> は

$$\rho_0 = l \cot \phi_0 = 6.11m$$

となる。

一方横滑りに対する最小曲率半径は (16) 式から計



算される。即ち此の場合山道であるから舗装されていないと考え f=0.3 とし横断勾配は道路構造令の規定による最大限 6%とする。又 v=10km/h,

g=9.8m/sec<sup>2</sup>, a=2とすれば(16)式より ρ=3.72mとなる。然し此れは ρ<sub>0</sub>=6.11m よりも小さいから結局最小半径を 6.11m に採つて何等の不都合もない。従つて求むる曲線は図-6 に示す如く全体が一つの曲線所謂全緩和曲線を以て構成される事になる。表-4 に ϕ の色々な値に対応する t, s, θ, x, y 等の値を示す。尚切線長 T, 外線長 E, 中央縦距 M, 半長弦 C 及び曲線長 s<sub>0</sub> の値は次の様である。

表-4

V=10 km/h, l=4m, ϕ=0.15 <sup>t0.7</sup>							
ϕ	5°00'	10°00'	15°00'	20°00'	25°00'	30°00'	33°13'
t(Δec)	0.461	1.242	2.216	3.342	4.597	5.965	6.901
S(m)	1.28	3.45	6.16	9.28	12.77	16.57	19.17
θ	0°56'	5°66'	13°45'	27°56'	48°40'	77°04'	100°00'
χ(m)	1.28	3.45	6.12	9.04	11.78	13.52	13.60
ψ(m)	0.01	0.11	0.55	1.66	3.76	7.10	9.68

$$T = y_0 \tan(\pi - \theta_0) - x_0 = 86.94m$$

$$E = T \sin(\pi - \theta_0) = 86.52m$$

$$M = x_0 \sin(\pi - \theta_0) + y_0 \cos(\pi - \theta_0) = 13.84m$$

$$C = T \cos(\pi - \theta_0) = 15.10m$$

$$s_0 = 19.17m$$

此等の値及び表-4 を用いれば曲線を設置する事が出来る。

5. 結 語

本文で求めた走行曲線の式は前輪の方向角が経過時間の n 乗に比例すると云う仮定を基にして居る。而かも此の仮定は藤井博士の実測に依る平均値と略々一致して居るから走行曲線も実際に近いものが得られる筈である。筆者は折を見て実際の走行軌跡を測定し本文で求めた走行曲線と一致するかどうか比較検討して見る積りである。尚此の曲線を応用出来るのは街角や反方向曲線等自動車が急激に方向転換する場所に限られる。而して其の際 n の値は 0.7~0.8 位で大した変化もないだろうが比例常数 k の値は運転の難易, 危険の程度を考えて 0.10~0.25 位の範囲で適当に選ぶ事が望ましい様に思う。

[新 刊]

最 新 土 質 工 學

(昭和 25 年 8 月土質工学講習会資料)

頒布費 : 150 円

〒 15 円

[予約者に限り 1 割引]